第17卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 17, No. 5
1991 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1991

对角摄动下矩阵特征值摄动的估计

张 霖
(清华大学自动化系，北京)

摘 要

本文对于对角摄动利用相似变换给出了特征值的一种上界. 该上界计算简单，使用方便，并且保守性小.

关键词: 多变量系统，鲁棒性，相似变换.

一、引 言

由特征函数概念可对开环传递函数矩阵为 $G(s)$ 的系统给出充分必要的稳定条件，但系统的实际模型总是或多或少地存在不确定性. 设系统的标称模型为 $G(s)$，而 $G_p(s)$ 表示其实际模型，$\Delta(s)$ 表示实际模型关于标称模型的摄动. 它们之间的关系可以有各种不同的情况. 但本文只讨论以下这种情况，即相加性摄动

$$G_p(s) = G(s) + \Delta(s). \tag{1}$$

$G_p(s)$ 和 $G(s)$ 的特征轨迹可以有很大的差别，因此，基于标称模型的特征轨迹方法未必能给出一个可靠的稳定判据.

人们通常感兴趣的一种摄动是对角形摄动[1]，即

$$\Delta(s) \in \{\mathrm{diag}(\delta_1(s), \cdots, \delta_n(s)), |\delta_i(j\omega)| < r_i(j\omega),\ r_i \text{ 为正实函数},\ i = 1, 2, \cdots, n\}. \tag{2}$$

本文将针对这种对角摄动，给出一种特征值的上界，由于利用了相似变换，使得这种上界保守性很小.

二、利用相似变换改进特征值摄动的估计

设 $G(s)$ 有几个互不相同的特征函数 $\lambda_1(s), \cdots, \lambda_n(s)$，关于 $\lambda_i(s)$ 的左、右特征向量分别为 $\boldsymbol{y}_i(s), \boldsymbol{x}_i(s), i = 1, 2, \cdots, n$. 考虑对角形摄动(2)，由代数理论可知[2](以下为简单计，省略函数、函数向量与函数矩阵的记号中的"(s)". 例如，$G(s)$ 即略作 G):

$$|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i| \leqslant s_i^{-1}\|\Delta\|_2,\ i = 1, 2, \cdots, n, \tag{3}$$

其中 $\tilde{\lambda}_i$ 为 G_p 的特征值，s_i 称为 G 的第 i 个配正条件数，定义如下:

$$s_i = \frac{|\boldsymbol{y}_i^* \boldsymbol{x}_i|}{\|\boldsymbol{y}_i\|_2 \|\boldsymbol{x}_i\|_2}.$$

对式 $G_p = G + \Delta$ 两端同乘可逆矩阵 L, L^{-1}，得

$$LG_pL^{-1} = LGL^{-1} + L\Delta L^{-1},$$

为简单起见，取 L 为对角矩阵。由于 Δ 为对角的，所以有 $L\Delta L^{-1} = \Delta$。又因相似变换不改变矩阵特征值，所以有

$$|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i| \leqslant \tilde{s}_i^{-1} \max_k r_k(j\omega). \tag{4}$$

其中 $\tilde{s}_i$ 为矩阵 LGL^{-1} 的第 i 个配正条件数。

这样，就可以通过适当地选择 L，以使 $\tilde{s}_i$ 尽量大，从而使得对于特征值摄动量的估计尽量不保守。

定理 1. 对于 $G \in \boldsymbol{C}^{2\times 2}$，$G = T\mathrm{diag}(g_1, g_2)T^{-1}$，$T = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$，取 $L = \mathrm{diag}(1, l)$，l 为实数，且 $l \neq 0$，则使 LGL^{-1} 的配正条件数 $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2$ 最大的 l 均为

$$l = \left|\frac{g_{11}g_{12}}{g_{21}g_{22}}\right|^{1/2}.$$

证．由 T 的表达式知，LGL^{-1} 的第 1 个右特征向量为 $\tilde{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ lg_{21} \end{pmatrix}$．又由于

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix},$$

故 LGL^{-1} 的第 1 个左特征向量为 $\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \dfrac{1}{\det T}\begin{pmatrix} \bar{g}_{22} \\ -\dfrac{1}{l}\bar{g}_{12} \end{pmatrix}$．由配正条件数定义知

$$\tilde{s}_1 = \frac{|\tilde{\boldsymbol{y}}_1^* \tilde{\boldsymbol{x}}_1|}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_1\|_2 \|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|_2},$$

所以得到

$$\tilde{s}_1 = \frac{|\det T|}{\sqrt{(|g_{11}|^2 + l^2|g_{21}|^2)\left(|g_{22}|^2 + \dfrac{1}{l^2}|g_{12}|^2\right)}}.$$

记 $D(l) = (|g_{11}|^2 + l^2|g_{21}|^2)\left(|g_{22}|^2 + \dfrac{1}{l^2}|g_{12}|^2\right)$．为求最佳的 l，可将 $D(l)$ 对 l 求导，并令其为零，结果得

$$l = \left|\frac{g_{11}g_{12}}{g_{21}g_{22}}\right|^{1/2}.$$

可以验证此时恒有 $D''(l) > 0$，所以 l 为 $D(l)$ 的极小点，亦即为使 $\tilde{s}_1$ 最大的值。

同理可证，使 $\tilde{s}_2$ 最大的 l 值与此相同。

证毕

此时有

$$\tilde{s}_1 = \tilde{s}_2 = \frac{|g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}|}{|g_{11}g_{22}| + |g_{21}g_{12}|}. \tag{5}$$

定理 2. 对于 $G\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$, $G=T\mathrm{diag}(g_1,g_2,\cdots,g_n)T^{-1}$, $T=(g_{ij})$, $T^{-1}=(f_{ij})^*$, 取 $L=\mathrm{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_n)$,诸 l_k 为实数,则使 LGL^{-1} 的配正条件数 $\tilde{s}_i$ 最大的诸 $l_k^{(i)}, k=1,\cdots,n$, 满足下列方程组:

$$l_k^{(i)4}\left(\sum_{\substack{t=1\\t\neq k}}^{n}\frac{1}{l_t^{(i)2}}|f_{ti}|^2|g_{ki}|^2\right)=\sum_{\substack{t=1\\t\neq k}}^{n}l_t^{(i)2}|f_{ki}|^2|g_{ti}|^2.\ (k=1,2,\cdots,n,\ i=1,2\cdots,n).$$

证. LGL^{-1} 的第 i 个左、右特征向量分别为

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_i=\left(\frac{1}{l_1}f_{1i},\frac{1}{l_2}f_{2i},\cdots,\frac{1}{l_n}f_{ni}\right)^T,\quad \tilde{\boldsymbol{x}}_i=(l_1g_{1i},l_2g_{2i},\cdots,l_ng_{ni})^T,$$

则

$$\tilde{s}_i=\frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_i\|_2\|\tilde{\boldsymbol{x}}_i\|_2}=\frac{1}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}(l_t^2/l_m^2)|g_{ti}|^2|f_{mi}|^2}}.$$

将上式分母根号下的表达式对 l_k 求导,并令其为零,有

$$2l_k^{(i)}\left(\sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{n}\frac{1}{l_m^{(i)2}}|f_{mi}|^2|g_{ki}|^2\right)-\frac{2}{l_k^{(i)3}}\left(\sum_{\substack{t=1\\t\neq k}}^{n}l_t^{(i)2}|f_{ki}|^2|g_{ti}|^2\right)=0,$$

即

$$l_k^{(i)4}\left(\sum_{\substack{t=1\\t\neq k}}^{n}\frac{1}{l_t^{(i)2}}|f_{ti}|^2|g_{ki}|^2\right)=\sum_{\substack{t=1\\t\neq k}}^{n}l_t^{(i)2}|f_{ki}|^2|g_{ti}|^2,\ (k=1,2,\cdots,n,\ i=1,2,\cdots,n).$$

证毕

上述非线性方程组可以用数值方法求解,注意到:设 $l_1^{(i)}, l_2^{(i)},\cdots,l_n^{(i)}$ 为方程组的一组解,则 $al_1^{(i)},al_2^{(i)},\cdots,al_n^{(i)}$ 也为一组解(a非零实数). 所以在求解时不妨规定 $l_1^{(i)}=1$, $i=1,2,\cdots,n$.

定理 2 中用到矩阵 T 和 T^{-1} 的各向量. 为了避免计算 T^{-1}, 引入下述记号:

$$T=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n),$$
$$T_i=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{i-1},\boldsymbol{x}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{x}_n),$$
$$P_i=\begin{pmatrix}0 & I_{i-1} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{n-i}\end{pmatrix},$$

则有 $TP_i=(x_iT_i)$. 对 T_i 作奇异值分解

$$T_i=(U_i\vdots\boldsymbol{u}_i)\begin{pmatrix}\Sigma_i\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix}V_i^*,$$

于是有

定理 3. 对 $G\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$, 取 $L=\mathrm{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_n)$, 则 LGL^{-1} 的配正条件数 $\tilde{s}_i$ 最大的 L 满足下列方程组:

$$(\boldsymbol{u}_i^*L^{-2}\boldsymbol{u}_i)L^4\sum_{k=1}^{n}(E_k\boldsymbol{x}_i)(E_k\boldsymbol{x}_i)^*-(\boldsymbol{x}_i^*L^2\boldsymbol{x}_i)\sum_{k=1}^{n}(E_k\boldsymbol{u}_i)(E_k\boldsymbol{u}_i)^*=0,$$

其中 $E_k = \mathrm{diag}(0,\cdots,0,\underset{\substack{\vdots\\ k}}{1},0,\cdots,0)$，$L^{-2} = (L^{-1})^2$.

证. LGL^{-1} 的第 i 个左、右特征向量分别为

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_i = L^{-1}\boldsymbol{y}_i,\quad \tilde{\boldsymbol{x}}_i = L\boldsymbol{x}_i.$$

令 $\tilde{T}_i = LT_i$，$\tilde{T} = LT$，则 $\tilde{T}P_i = (\tilde{\boldsymbol{x}}_i T_i)$.

$$\tilde{T}_i = L(U_i\boldsymbol{u}_i)\begin{pmatrix}\Sigma_i\\ \hdashline 0\end{pmatrix}V_i^*,$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}^{-1} &= P_i(\tilde{x}_iT_i)^{-1} = P_i(x_iT_i)^{-1}L^{-1}\\ &= P_i\left[(U_i\boldsymbol{u}_i)\begin{pmatrix}U_i^*\boldsymbol{x}_i & \Sigma_iV_i^*\\ \boldsymbol{u}_i^*\boldsymbol{x}_i & 0\end{pmatrix}\right]^{-1}L^{-1}\\ &= P_i\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{\boldsymbol{u}_i^*\boldsymbol{x}_i}\\ V\Sigma_i^{-1} & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_i^*L^{-1}\\ \hdashline \boldsymbol{u}_i^*L^{-1}\end{pmatrix} = P_i\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{u}_i^*L^{-1}}{\boldsymbol{u}_i^*\boldsymbol{x}_i}\\ \hdashline *\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以 $\tilde{\boldsymbol{y}}_i = \dfrac{L^{-1}\boldsymbol{u}_i}{\boldsymbol{x}_i^*\boldsymbol{u}_i}$,

$$\tilde{s}_i^2 = \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{y}}_i\|_2^2\|\tilde{\boldsymbol{x}}_i\|_2^2} = \frac{|\boldsymbol{u}_i^*\boldsymbol{x}_i|^2}{(\boldsymbol{x}_i^*L^2\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{u}_i^*L^{-2}\boldsymbol{u}_i)},$$

对 L 求导,并其令为零,得

$$\frac{\partial(\boldsymbol{x}_i^*L^2\boldsymbol{x}_i)}{\partial L}(\boldsymbol{u}_i^*L^{-2}\boldsymbol{u}_i) + (\boldsymbol{x}_i^*L^2\boldsymbol{x}_i)\frac{\partial(\boldsymbol{u}_i^*L^{-2}\boldsymbol{u}_i)}{\partial L} = 0,$$

于是有

$$(\boldsymbol{u}_i^*L^{-2}\boldsymbol{u}_i)L^4\sum_{k=1}^{n}(E_k\boldsymbol{x}_i)(E_k\boldsymbol{x}_i)^* - (\boldsymbol{x}_i^*L^2\boldsymbol{x}_i)\sum_{k=1}^{n}(E_k\boldsymbol{u}_i)(E_k\boldsymbol{u}_i)^* = 0.$$

证毕

例. 设 $G = \begin{pmatrix}1 & -12\\ \dfrac{7}{12} & -\dfrac{25}{6}\end{pmatrix}$，$\max\limits_k r_k = \dfrac{3}{10}$.

则 $G = T\Lambda_GT^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & \\ & \dfrac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3} & \dfrac{8}{3}\\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{4}{3}\end{pmatrix}$.

G的右特征向量为　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\ \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}2\\ \dfrac{1}{4}\end{pmatrix}$,

G的左特征向量为　$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{8}{3}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}\\ -\dfrac{4}{3}\end{pmatrix}$,

所以

$$s_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}_1\|_2 \|\boldsymbol{x}_1\|_2} = \frac{6}{5\sqrt{13}},$$

同样可得 $s_2 = \frac{6}{5\sqrt{13}}$。而经相似变换以后

$$\tilde{s}_1 = \tilde{s}_2 = \frac{|g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}|}{|g_{11}g_{22}| + |g_{21}g_{12}|} = \frac{3}{5},$$

变换前的特征值估计

$$|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i| < \frac{5\sqrt{13}}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{\sqrt{13}}{4},\ i = 1, 2,$$

变换后的特征值估计

$$|\tilde{\lambda}_i - \lambda_i| < \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{2},\ i = 1, 2.$$

可见，变换后的估计优于变换前的估计。

三、结 论

本文针对对角摄动的特点，利用相似变换改进了特征值摄动上界的估计，使得保守性较小，并且计算比较简单。

参 考 文 献

[1] Safonov, M. G., Stability Margins of Diagonally Perturbed Multivariable Feedback System, IEE Proc., 129 (1982), 6, 251—256.

[2] Wilkinson, J. H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendan Press, Oxford (1965).

EIGENVALUE INCLUSION REGIONS FOR SYSTEMS WITH DIAGONAL UNCERTAINTIES

ZHANG LIN

(Dept. of Automation, Tsinghua University)

ABSTRACT

This paper presents a new method for determining eigenvalue inclusion regions for diagonally perturbed multivariable systems by using a similarity scaling technique. These regions are easy to calculate and less conservative.

Key words: Multivariable feedback system; robustness; similarity scaling.