第 17 卷 第 5 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 5
1991 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sept., 1991

2-D 离散系统的观测器1)

杨成梧　陈雪如
(华 东 工 学 院, 南 京)

摘　　要

本文分别讨论了 2-D 离散系统 FM 模型的观测器问题，给出了系统存在全阶和降维状态观测器的新的充分条件和构造方法.

关键词: 多维系统,线性离散系统,观测器.

一、引　　言

观测器是 2-D 线性系统理论的组成部分，Kawaji[1] 曾在 1984 年较为透彻地研究了 RM 模型[3]的 2-D 观测器,获得了丰富的成果. Bisiacco[2] 在 1986 年进一步研究了 FM 模型的观测器问题，其方法是通过出现在 Bezout 恒等式中的矩阵来构造一个观测器的传递函数，再经实现的方式达到建立观测器方程的目的. 由于实现的问题本身就较为复杂,所以本文绕过了实现问题,直接试图从观测器的定义来构造观测器，最终得到了观测器存在的新的充分条件,同时也给出了观测器的构造方法,最后给出了一个说明性算例.

二、FM 的观测器

考虑如下形式的 FM II 模型[3]

$$\boldsymbol{x}(i+1,j+1)=A_1\boldsymbol{x}(i,j+1)+A_2\boldsymbol{x}(i+1,j)+B_1\boldsymbol{u}(i,j+1)+B_2\boldsymbol{u}(i+1,j), \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{y}(i,j)=C\boldsymbol{x}(i,j),\ (i,j=0,1,2,\cdots), \tag{1.2}$$

式中 i,j 分别为垂直和水平的整值坐标，$\boldsymbol{x}(i,j)\in R^n$ 为 (i,j) 处的局部状态向量，$\boldsymbol{u}(i,j)\in R^m$ 为输入向量，$\boldsymbol{y}(i,j)\in R^l$ 为输出向量，A_1,A_2,B_1,B_2,C 为具有适当维数的常值实矩阵,式(1)的边界条件由下式给出:

$$\boldsymbol{x}(i,0)=\boldsymbol{x}_{i0},\ \boldsymbol{x}(0,j)=\boldsymbol{x}_{j0},\ (i,j=0,1,2,\cdots). \tag{2}$$

考察如下的 2-D 线性系统:

$$\boldsymbol{z}(i+1,j+1)=F_1\boldsymbol{z}(i,j+1)+F_2\boldsymbol{z}(i+1,j)$$

本文于 1989 年 1 月 7 日收到.

1) 本文曾在 1989 年全国控制理论与应用学术年会上宣读.

$$+ G_1\boldsymbol{u}(i,j+1) + G_2\boldsymbol{u}(i+1,j) + H_1\boldsymbol{y}(i,j+1) + H_2\boldsymbol{y}(i+1,j), \tag{3.1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(i,j) = L\boldsymbol{z}(i,j) + K\boldsymbol{y}(i,j), \tag{3.2}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}(i,j)\in R^n$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的渐近估计，$\boldsymbol{z}(i,j)\in R^p$，而 F_α，$G_\alpha, H_\alpha(\alpha=1,2)$ 以及 L,K 是具有适当维数的常值矩阵.

定义. 2-D 系统(3)称为 FMM II 的 p 阶状态渐近观测器,系指:

$$\lim_{i,j\to\infty}(\hat{\boldsymbol{x}}(i,j) - \boldsymbol{x}(i,j)) = 0, \tag{4}$$

且此收敛与已知(可量测)输入及(已知或未知)边界条件(2)无关.

定义观测器的误差为

$$\boldsymbol{e}(i,j) = \boldsymbol{z}(i,j) - T\boldsymbol{x}(i,j),\ T\in R^{p\times n}, \tag{5}$$

则有如下定理.

定理 1. 2-D 系统(3)是 FMM II 的渐近观测器的充分条件是:

$$TA_1 = F_1T + H_1C, \tag{6.1}$$

$$TA_2 = F_2T + H_2C, \tag{6.2}$$

$$G_1 = TB_1, \tag{6.3}$$

$$G_2 = TB_2, \tag{6.4}$$

$$LT + KC = I_n. \tag{6.5}$$

如果边界条件(2)未知,则充分条件中还必须包括

$$\lim_{i\to\infty}F^{i,j} = 0,\ j=0,1,2\cdots, \tag{7.1}$$

$$\lim_{j\to\infty}F^{i,j} = 0,\ i=0,1,2,\cdots, \tag{7.2}$$

其中 $F^{i,j} = F_1F^{i-1,j} + F_2F^{i,j-1}$，$F^{0,0} = I$.

证. 将式(1.1)、式(3.1)代入式(5),得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(i+1,j+1) = {} & F_1\boldsymbol{e}(i,j+1) + F_2\boldsymbol{e}(i+1,j) + (F_1T - TA_1 + H_1C)\boldsymbol{x}(i,j+1) \\ & + (F_2T - TA_2 + H_2C)\boldsymbol{x}(i+1,j) + (G_1 - TB_1)\boldsymbol{u}(i,j+1) \\ & + (G_2 - TB_2)\boldsymbol{u}(i+1,j).\end{aligned} \tag{8}$$

显然若式(6)成立,则

$$\boldsymbol{e}(i+1,j+1) = F_1\boldsymbol{e}(i,j+1) + F_2\boldsymbol{e}(i+1,j), \tag{9}$$

由文[6]知式(9)的解为

$$\boldsymbol{e}(i,j) = \sum_{k=1}^{i} F^{i-k,j-1}F_2\boldsymbol{e}(k,0) + \sum_{l=0}^{j} F^{i-1,j-l}F_1\boldsymbol{e}(0,l). \tag{10}$$

又将式(1.1)、式(5)代入式(3.2),得

$$\hat{\boldsymbol{x}}(i,j) = L\boldsymbol{e}(i,j) + (LT + KC)\boldsymbol{x}(i,j). \tag{11}$$

因此,如式(6.5)成立，则

$$\hat{\boldsymbol{x}}(i,j) = L\boldsymbol{e}(i,j) + \boldsymbol{x}(i,j). \tag{12}$$

若边界条件(2)未知且式(7)成立,则 $\lim\limits_{i,j\to\infty}\boldsymbol{e}(i,j) = 0$，从而由式(12)即得 $\lim\limits_{i,j\to\infty}(\hat{\boldsymbol{x}}(i,j) - \boldsymbol{x}(i,j)) = 0$. 而若边界条件(2)已知,则由式(5)确定观测器的边界条件 $\boldsymbol{z}(k,0),\boldsymbol{z}(0,l)$,

$k, l=0,1,2,\cdots$，即可使得 $e(k,0)=0$，$e(0,l)=0$，$k,l=0,1,2,\cdots$，从而 $e(i,j)=0$，$i,j=1,2,\cdots$，故亦有 $\lim\limits_{i,j\to\infty}(\hat{x}(i,j)-x(i,j))=0$。由此定理得证.

引理. 定理 1 中条件(7)成立的充分条件是下述条件之一成立:

1) F_1, F_2 分别具有形式 $F_1=\begin{bmatrix}F_{11} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$F_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}$，且 F_{11}, F_{22} 的特征值位于单位圆内;

2) F_1, F_2 分别具有形式 $F_1=\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$F_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & F_{22}\end{bmatrix}$，且 F_{11}, F_{22} 的特征值位于单位圆内.

证. 只须证1)即可. 记 $\tilde{F}\triangleq F_1+F_2=\begin{bmatrix}F_{11} & 0\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}$，则 $\tilde{F}^{1,0}=F_1$，$\tilde{F}^{0,1}=F_2$，从而

$$\tilde{F}^{i,j}=\tilde{F}^{1,0}\tilde{F}^{i-1,j}+\tilde{F}^{0,1}\tilde{F}^{i,j-1}=F_1\tilde{F}^{i-1,j}+F_2\tilde{F}^{i,j-1}=F^{i,j}.$$

于是由文献[1]中的引理 1 即知式(7)成立，证毕.

在式(6.4)、式(6.5)中令 $L=I_n, K=0$，则可解得

$$
\begin{aligned}
G_1 &= B_1,\\
G_2 &= B_2,\\
F_1 &= A_1-H_1C,\\
F_2 &= A_2-H_2C,\\
T &= I_n.
\end{aligned}
$$

于是可有如下定理.

定理 2. 任取 $n_1<n$，将 A_i 分块成 $A_i=\begin{pmatrix}A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)}\\ A_{21}^{(i)} & A_{22}^{(i)}\end{pmatrix}$ 其中 $A_{11}^{(i)}\in R^{n_1\times n_1}$，并设 $H_i=\begin{pmatrix}H_{i_1}\\ H_{i_2}\end{pmatrix}$，$C=[C_1, C_2]$，其中 $H_{i_1}\in R^{n_1\times l}, i=1,2$，$C_1\in R^{l\times n_1}$，则 FMMII 存在全阶观测器的充分条件是下列条件之一成立:

I) ① $((I_l-C_2C_2^-)C_1, (A_{11}^{(1)}-A_{12}^{(1)}C_2^-C_1))$ 可检测.

② $(C_2, A_{22}^{(2)})$ 可检测.

③ $\operatorname{rank} C_1=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}C_1\\ A_{11}^{(2)}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}C_1\\ A_{21}^{(1)}\end{pmatrix}$.

④ $\operatorname{rank} C_2=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}C_2\\ A_{12}^{(2)}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}C_2\\ A_{22}^{(1)}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}C_2\\ A_{12}^{(1)}\end{pmatrix}$.

II) ① $(C_1, A_{11}^{(1)})$ 可检测.

② $((I_l-C_1C_1^-)C_2, (A_{22}^{(2)}-A_{21}^{(2)}C_1^-C_2))$ 可检测.

③ $\operatorname{rank} C_1=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}C_1\\ A_{22}^{(1)}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}C_1\\ A_{11}^{(2)}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}C_1\\ A_{21}^{(2)}\end{pmatrix}$.

④ $\operatorname{rank} C_2=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}C_2\\ A_{22}^{(1)}\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}C_2\\ A_{12}^{(2)}\end{pmatrix}$.

其中$(\cdot)^{-}$表示矩阵$(\cdot)$的 Penrose 逆矩阵.

证. 只须证 I),在定理假定的分块情况下令

$$F_1 = A_1 - H_1C = \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)} - H_{11}C_1 & A_{12}^{(1)} - H_{11}C_2 \\ A_{21}^{(1)} - H_{12}C_1 & A_{22}^{(1)} - H_{12}C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$F_2 = A_2 - H_2C = \begin{pmatrix} A_{11}^{(2)} - H_{21}C_1 & A_{12}^{(2)} - H_{21}C_2 \\ A_{21}^{(2)} - H_{22}C_1 & A_{22}^{(2)} - H_{22}C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

则显然由引理和定理 2 即可知 FMM II 存在全阶观测器,由式(13)、式(14)得

$$H_{11}C_2 = A_{12}^{(1)}, \tag{15.1}$$

$$H_{12}C_1 = A_{21}^{(1)}, \tag{15.2}$$

$$H_{12}C_2 = A_{22}^{(1)}, \tag{15.3}$$

$$H_{21}C_1 = A_{11}^{(2)}, \tag{15.4}$$

$$H_{21}C_2 = A_{12}^{(2)}. \tag{15.5}$$

由 Kronecker-Capelli 定理即知,式(15)成立的充要条件是I)中③和④成立。因此有

$$H_{11} = A_{12}^{(1)}C_2^{-} + C_0(I_l - C_2C_2^{-}),\ C_0 \text{ 任意}. \tag{16}$$

从而 $F_{11} = A_{11}^{(1)} - H_{11}C_1 = A_{11}^{(1)} - A_{12}^{(1)}C_2^{-}C_1 - C_0(I_l - C_2C_2^{-})C_1$ 的特征值位于单位圆内,当且仅当 I) 中①成立. 而由式 (14) 知: $F_{22} = A_{22}^{(2)} - H_{22}C_2$ 的特征值位于单位圆内,当且仅当 $(C_2\ A_{22}^{(2)})$ 可检测,证毕.

三、算 例

例. 设给定 FMM II 的系数阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$C = [1\ 0\ 0].$$

求它的一个全阶观测器. 容易验证定理 2 中条件2)满足,令

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \end{bmatrix},\quad H_2 = \begin{bmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{bmatrix},$$

则

$$F_1 = A_1 - H_1C = \begin{bmatrix} 4 & -h_{11} & 0 & 2 \\ 1 & -h_{12} & 0 & 0 \\ -2 & -h_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ F_2 = \begin{bmatrix} -h_{21} & 0 & 0 \\ -h_{22} & 0 & 0 \\ -h_{23} & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $h_{11} = \frac{7}{2}$, $h_{12} = 1$, $h_{13} = -2$, $H_2 = 0$, 则得

$$F_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

故所求的全阶观测器的方程为

$$z(i+1,j+1)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}z(i,j+1)+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix}z(i+1,j)$$

$$+\begin{bmatrix}1\\ 6\\ 3\end{bmatrix}u(i,j+1)+\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 7\end{bmatrix}u(i+1,j)+\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\ 1\\ -2\end{bmatrix}y(i,j+1).$$

四、结 束 语

本文分别讨论了 FM 的渐近状态观测器问题，得出了一些新的有关充分条件和算法，这些结果具有直观易实现的特点，但未涉及有关参数扰动的灵敏度与鲁棒性问题，而这些问题的讨论，无疑也是十分有意义的.

参 考 文 献

[1] Kawaji, Minimal Order State Observer for Two-dimensional Systems, Copyright © IFAC 9th Triennial World Congress, Budapest, Hungary, (1984).

[2] Bisiacco, M., On the Structure of 2-D observers, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, **31**(1986), 7.

[3] 杨成梧，二维线性多变量系统，华东工学院，(1987).

[4] Kaczorek, T., Eigenvalue Assignment problem for 2-D Systems with Separable Characteristic Polynomials, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser Techn.*, **32**(1984), 2.

[5] 黄琳，系统与控制理论中的线性代数，科学出版社，(1984).

[6] Fornasini, E. & Marchesini, C., Doubly Indexed Dynamical System, State Space Models and Structural properties, *Mathematical Systems Theory*, **12**(1978), 1.

[7] 王 翼，离散控制系统，科学出版社，(1984).

THE OBSERVER OF TWO-DIMENSIONAL DISCRETE SYSTEMS

Yang Chengwu Chen Xueru

(East China Institute of Technology)

Abstract

In this paper, we discuss the observer design problems of the 2-D discrete linear systems. Some new sufficient conditions and algorithms for the exsistence of the observer are proposed.

Key words: Multidimensional systems; linear discrete systems; observer.