

# 一种带多重次优渐消因子的扩展 卡尔曼滤波器

周东华 席裕庚 张钟俊  
(上海交通大学自动控制系)

## 摘 要

本文提出了“强跟踪滤波器”的新概念,给出了强跟踪滤波器的一般结构,并提出了一个正交性原理用于此类滤波器的设计。在此基础上,提出了一种具有强跟踪滤波器性能的带多重次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器(SMFEKF),改进了文献[1]中提出的一种带单重次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器(SFEKF)。数值仿真说明了SMFEKF的有效性。

**关键词:** 非线性系统,随机系统,强跟踪滤波器,扩展卡尔曼滤波器,状态估计。

## 一、问题的提出

考虑由下面离散状态空间模型描述的一类非线性时变随机系统的状态估计问题。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{f}(k, \mathbf{x}(k)) + \mathbf{B}(k, \mathbf{x}(k)) \cdot \mathbf{u}(k) + \Gamma(k) \cdot \mathbf{v}(k), \\ \mathbf{y}(k+1) &= \mathbf{h}(k+1, \mathbf{x}(k+1)) + \mathbf{e}(k+1). \end{aligned} \quad (1)$$

其中,状态变量  $\mathbf{x} \in R^n$ ; 输出变量  $\mathbf{y} \in R^r$ ; 输入变量  $\mathbf{u} \in R^m$ ; 系统噪声  $\mathbf{v} \in R^q$ ; 测量噪声  $\mathbf{e} \in R^r$ ;  $\mathbf{f}: R^n \rightarrow R^n$ ;  $\mathbf{h}: R^n \rightarrow R^r$ ;  $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$ ;  $\Gamma \in R^{n \times q}$ ;  $\mathbf{v}(\cdot)$ ,  $\mathbf{e}(\cdot)$  是不相关的、零均值的高斯白噪声,其协方差阵分别为  $Q_1(\cdot)$  及  $Q_2(\cdot)$ 。并假定  $\mathbf{x}(0) \sim N(\hat{\mathbf{x}}_0, p_0)$ 。

用于由(1)式描述的一类非线性系统的状态估计的一个常用方法是采用扩展卡尔曼滤波器(EKF),它具有算法简单,实时性好的优点,其算法由下列递推方程给出<sup>[2]</sup>:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + K(k+1) \cdot \boldsymbol{\gamma}(k+1), \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{f}(k, \hat{\mathbf{x}}(k|k)) + \mathbf{B}(k, \hat{\mathbf{x}}(k|k)) \cdot \mathbf{u}(k), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} K(k+1) &= P(k+1|k) \cdot H^T(k+1, \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)) \cdot [H(k+1, \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)) \\ &\quad \cdot P(k+1|k) \cdot H^T(k+1, \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)) + Q_2(k+1)]^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} P(k+1|k) &= F(k, \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{x}}(k|k)) \cdot P(k|k) \cdot F^T(k, \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{x}}(k|k)) \\ &\quad + \Gamma(k) \cdot Q_1(k) \cdot \Gamma^T(k), \end{aligned} \quad (5)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k+1) \cdot H(k+1, \hat{\mathbf{x}}(k+1|k))] \cdot P(k+1|k), \quad (6)$$

其中

$$F(k, u(k), \hat{x}(k|k)) = \frac{\partial [f(k, x(k)) + B(k, x(k)) \cdot u(k)]}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}(k|k)}$$

$$H(k+1, \hat{x}(k+1|k)) = \frac{\partial h(k+1, x(k+1))}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}(k+1|k)},$$

残差向量  $\boldsymbol{v}(k+1) = \boldsymbol{y}(k+1) - \boldsymbol{h}(k+1, \hat{x}(k+1|k))$ . (7)

在通常情况下,由 EKF 得到的状态估计是有偏的,而且 EKF 关于模型失配的鲁棒性很差<sup>[4]</sup>,而非线性系统的状态估计问题恰恰又是实际系统设计中常常碰到的问题,因此,对 EKF 进行改进,使其具有更好的性能,便成为一个迫切需要研究的课题。

## 二、强跟踪滤波器

称某滤波器为强跟踪滤波器,若它与通常的滤波器相比具有以下优良特性<sup>[5]</sup>:

- 1) 较强的关于模型参数失配的鲁棒性;
- 2) 较低的关于噪声及初值统计特性的敏感性;
- 3) 极强的关于突变状态的跟踪能力,并在滤波器达到稳态时仍保持这种能力;
- 4) 适中的计算复杂性。

基于(1)式给出的一类非线性系统的一类强跟踪滤波器应具有如下一般结构:

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k+1) \cdot \boldsymbol{v}(k+1). \quad (8)$$

现在的问题是如何在线确定时变增益阵  $K(k+1)$ ,使得此滤波器具有强跟踪滤波器的特性。为此,给出如下正交性原理。

**正交性原理**(参阅作者的博士学位论文)。滤波器(8)成为强跟踪滤波器的一个充分条件是在线确定时变增益阵  $K(k+1)$ ,使得

$$E[\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1)] \cdot [\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1)]^T = \min, \quad (9)$$

$$E\boldsymbol{v}^T(k+1) \cdot \boldsymbol{v}(k+1+j) = 0,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots. \quad (10)$$

其中条件(10)要求残差序列处处保持相互正交。

此正交性原理具有明显的物理意义。它说明当存有较大的模型失配时,应在线调整  $K(k+1)$  使得输出残差序列相互正交,具有类似白噪声的性质,这也表明已将残差序列中的一切有效信息提取出来。

**注释 1.** 当用其它性能指标取代(9)式时,可得到其它类似的正交性原理。

## 三、一种带多重次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器

在文[1]中,通过改进 EKF,得到了一种具有强跟踪滤波器性能的带单重次优渐消因子的 EKF(简记为 SFEKF),它是通过在上述 EKF 的方程(5)中引入次优渐消因子得到的,即

1) 周东华,一类非线性系统故障检测与诊断的滤波方法,上海交通大学工学博士学位论文,1990。

$$P(k|k) = \lambda_1(k+1) \cdot F(k, \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{x}}(k|k)) \cdot P(k|k) \cdot F^T(k, \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{x}}(k|k)) + \Gamma^T(k) \cdot Q_1(k) \cdot \Gamma(k). \quad (11)$$

其中  $\lambda_1(k+1) \geq 1$  为次优渐消因子。求解  $\lambda_1(k+1)$  的两种算法可参见文[1]。

一个自然的想法是,如果在(5)式中引入多重次优渐消因子,分别对不同的数据通道以不同的速率进行渐消时,则可望得到更高性能的滤波器,为此,可修改(5)式为

$$P(k+1|k) = LMD(k+1) \cdot F(k, \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{x}}(k|k)) \cdot P(k|k) \cdot F^T(k, \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{x}}(k|k)) + \Gamma^T(k) \cdot Q_1(k) \cdot \Gamma(k), \quad (12)$$

其中  $LMD(k+1) = \text{diag}[\lambda_1(k+1), \lambda_2(k+1), \dots, \lambda_n(k+1)]$ ;  $\lambda_i(k+1) \geq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  为多重次优渐消因子。

由方程(2)–(4), (12), (6)–(7)所构成的带多重次优渐消因子的 EKF, 简记为 SMFEKF。

**引理 1** (参阅作者的博士学位论文)。基于模型(1), 当上述的 SMFEKF 可得到较精确的系统状态的估计值时, 有下式成立:

$$E[\boldsymbol{\gamma}(k+1+j) \cdot \boldsymbol{\gamma}^T(k+1)] \approx H(k+1+j, \hat{\mathbf{x}}(k+1+j|k+j)) \cdot F(k+j, \mathbf{u}(k+j), \hat{\mathbf{x}}(k+j|k+j)) \cdot [I - K(k+j) \cdot H(k+j, \hat{\mathbf{x}}(k+j|k+j-1))] \cdots F(k+2, \mathbf{u}(k+2), \hat{\mathbf{x}}(k+2|k+2)) \cdot [I - K(k+2) \cdot H(k+2, \hat{\mathbf{x}}(k+2|k+1))] \cdot F(k+1, \mathbf{u}(k+1), \hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1)) \cdot [P(k+1|k) \cdot H^T(k+1, \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)) - K(k+1) \cdot V_0(k+1)], \quad j = 1, 2, \dots. \quad (13)$$

其中均方误差阵  $V_0(k+1) = E[\boldsymbol{\gamma}(k+1) \cdot \boldsymbol{\gamma}^T(k+1)]$ 。在上述引理基础上, 利用正交性原理可确定多重次优渐消因子  $\lambda_i(k+1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。并进一步确定  $K(k+1)$ 。

(10)式等价于

$$\text{tr}\{E[\boldsymbol{\gamma}(k+1+j) \cdot \boldsymbol{\gamma}^T(k+1)]\} = 0. \quad (14)$$

由(13), (14)式得知, 当实时选择适当的时变增益阵  $K(k+1)$ , 使

$$P(k+1|k) \cdot H^T(k+1, \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)) - K(k+1) \cdot V_0(k+1) \equiv 0 \quad (15)$$

时, 则可近似符合正交性原理。为此令

$$S(k+1) = P(k+1|k) \cdot H^T(k+1, \hat{\mathbf{x}}(k+1|k)) - K(k+1) \cdot V_0(k+1), \quad (16)$$

并定义

$$g(k+1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r S_{ij}^2(k+1). \quad (17)$$

其中

$$S(k+1) = (S_{ij}(k+1)).$$

则(15)式的符合程度可通过求解下面的性能指标来衡量:

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}(k+1)} g(k+1). \quad (18)$$

其中:  $\boldsymbol{\lambda}(k+1) = [\lambda_1(k+1), \lambda_2(k+1), \dots, \lambda_n(k+1)]^T$ 。

由性能指标(18)求解  $\boldsymbol{\lambda}(k+1)$  可采用任何无约束多元非线性规划方法。在此给出一种 DFP 变尺度法。

**算法 1** (求解  $\lambda(k+1)$  的变尺度法). 算法由下列递推公式给出:

$$\begin{aligned} \lambda^{(l+1)}(k+1) &= \lambda^{(l)}(k+1) + \varphi^{(l)} \cdot \boldsymbol{w}^{(l)}, \\ \varphi^{(l)} &: \min g(\lambda^{(l)}(k+1) + \varphi \cdot \boldsymbol{w}^{(l)}), \\ \boldsymbol{w}^{(l)} &= -[\bar{H}^{(l)}]^T \cdot \nabla g(\lambda^{(l)}(k+1)), \\ \bar{H}^{(l)} &= \bar{H}^{(l-1)} + \Delta \bar{H}^{(l-1)}, \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

初值:  $\lambda(1) = 1$ ;  $\lambda^0(k+1) = \lambda(k)$ ;  $\bar{H}^{(0)} = I$ ; 其中  $\Delta \bar{H}^{(l)}$ ,  $\nabla g(\lambda^{(l)}(k+1))$  的定义参见作者的博士学位论文.

当  $\|\nabla g(\lambda^{(N)}(k+1))\|^2 \leq \varepsilon_1$  时, 结束迭代, 并取

$$\lambda_i(k+1) = \begin{cases} \lambda_i^{(N)}(k+1), & \lambda_i^{(N)}(k+1) > 1 \text{ 时,} \\ 1, & \lambda_i^{(N)}(k+1) \leq 1 \text{ 时, } i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (20)$$

其中  $\varepsilon_1 > 0$  为选定的阈值.

算法 1 适用于离线状态估计, 并具有精度高的优点. 但由于寻优, 故不太适合于在线运算. 为此, 给出下述适合于在线运算的求解多重次优渐消因子的一步简化算法.

**算法 2** (求解  $\lambda(k+1)$  的一步近似算法). 当由系统的先验知识可大致确定

$\lambda_1(k+1): \lambda_2(k+1): \dots: \lambda_n(k+1) = \alpha_1: \alpha_2: \dots: \alpha_n$  时, 可得确定  $\lambda(k+1)$  的一个一步近似算法如下:

$$\lambda_i(k+1) = \begin{cases} \lambda_{0i}(k+1), & \lambda_{0i}(k+1) > 1 \text{ 时,} \\ 1, & \lambda_{0i}(k+1) \leq 1 \text{ 时, } i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (21)$$

其中  $\lambda_{0i}(k+1) = \alpha_i \cdot c(k+1)$ ,

$$c(k+1) = \text{tr}[N(k+1)] / \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot M_{ii}(k+1),$$

$$\begin{aligned} N(k+1) &= V_0(k+1) - Q_2(k+1) - H(k+1, \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)) \\ &\quad \cdot \Gamma(k) \cdot Q_1(k) \cdot \Gamma^T(k) \cdot H^T(k+1, \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(k+1) &= F(k, \boldsymbol{u}(k), \hat{\boldsymbol{x}}(k|k)) \cdot P(k|k) \cdot F^T(k, \boldsymbol{u}(k), \hat{\boldsymbol{x}}(k|k)) \\ &\quad \cdot H^T(k+1, \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)) \cdot H(k+1, \hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)) \\ &= (M_{ij}(k+1)), \end{aligned}$$

式中  $V_0(k+1)$  是未知的, 可由下式估算出:

$$V_0(k+1) = \begin{cases} \boldsymbol{Y}(1) \cdot \boldsymbol{Y}^T(1), & k = 0 \text{ 时,} \\ \frac{\rho \cdot V_0(k) + \boldsymbol{Y}(k+1) \cdot \boldsymbol{Y}^T(k+1)}{1 + \rho}, & k \geq 1 \text{ 时.} \end{cases} \quad (22)$$

其中  $0 < \rho \leq 1$  为遗忘因子.

此算法是根据(15)式及(2)–(4), (6), (7), (12)式经过一系列推导得到的, 参见作者的博士学位论文.

**注释 2.** 当由先验知识得知  $\boldsymbol{x}(k+1)$  的某分量  $x_i(k+1)$  不会突变时, 可取  $\lambda_i(k+1) \equiv 1$ , 这将加速渐消因子的求取. 当无任何先验知识可利用时, 可取  $\alpha_i = 1, i = 1, \dots, n$ , 则本文基于算法 2 的 SMFEKF 退化为文[1]的相应的 SFEKF, 仍具有比较优良的性能

## 四、数值仿真例子

某一强耦合,非线性随机系统由下式给出:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.001 \cdot (d(k) \cdot z(k) - w(k) \cdot b(k))/c(k) + x_1(k) + v_1(k), \\ x_2(k+1) = 0.001 \cdot (-w(k) \cdot z(k) + a_3 \cdot b(k))/c(k) + x_2(k) + v_2(k), \\ x_3(k+1) = 0.001 \cdot x_1(k) + x_3(k) + v_3(k), \\ x_4(k+1) = 0.001 \cdot x_2(k) + x_4(k) + v_4(k), \\ y_1(k+1) = x_1(k+1) \cdot x_3(k+1) + e_1(k+1), \\ y_2(k+1) = x_2(k+1) + e_2(k+1), \\ y_3(k+1) = x_3(k+1) + 0.5 \cdot x_4(k+1) + e_3(k+1). \end{cases} \quad (23)$$

其中  $d(k) = a_1 + a_2 \cdot \cos(x_4(k))$ ,  $w(k) = a_3 + \frac{a_2}{2} \cdot \cos(x_4(k))$ ,

$$z(k) = a_2 \cdot \sin(x_4(k)) \cdot [x_1(k) \cdot x_2(k) + x_2^2(k)/2] - a_4 \cdot \cos(x_3(k)) - a_5 \cdot \cos(x_3(k) + x_4(k)) + u_1(k),$$

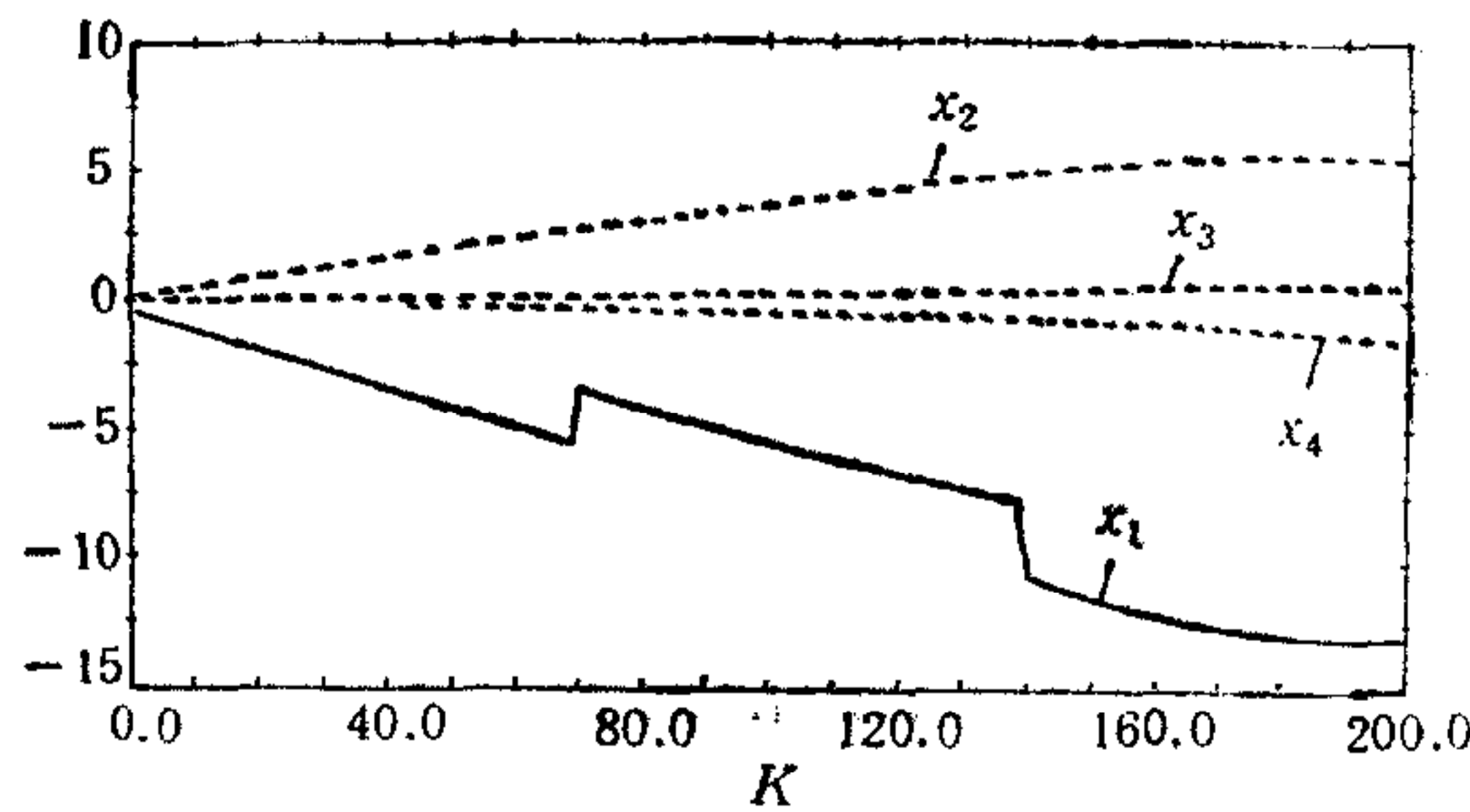
$$b(k) = -(a_2 \cdot \sin(x_4(k))) \cdot x_1^2(k)/2 - a_5 \cdot \cos(x_3(k) + x_4(k)) + u_2(k),$$

$$c(k) = d(k) \cdot a_3 - w^2(k),$$

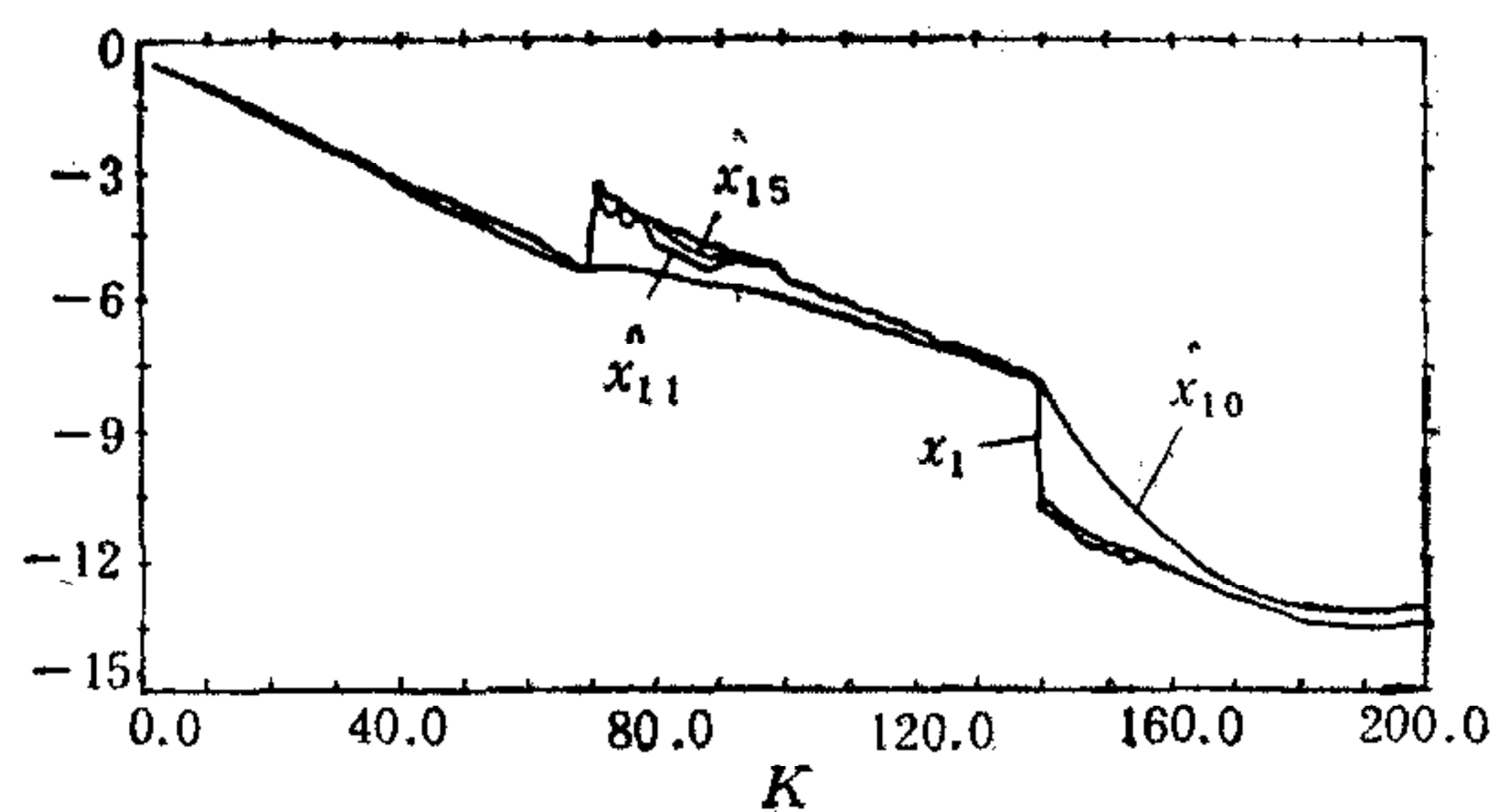
$$a_1 = 3.82, a_2 = 2.12, a_3 = 0.71, a_4 = 81.82, a_5 = 24.6,$$

$$Q_1(\cdot) = 0, Q_2(\cdot) = \text{diag}[0.01, 0.01, 0.01].$$

仿真中取  $P_0 = 0.1 \cdot I_4$ ,  $\hat{x}(0|0) = x(0) = 0$ , 并采用算法 2 求解多重次优渐消因子. 系统输入:  $u_1(k) = 125 - 5 \cdot (1 - \exp(-0.2 \cdot k))$ ,  $u_2(k) = 125 - 10 \cdot (1 - \exp(-0.2 \cdot k))$



(a)



(b)

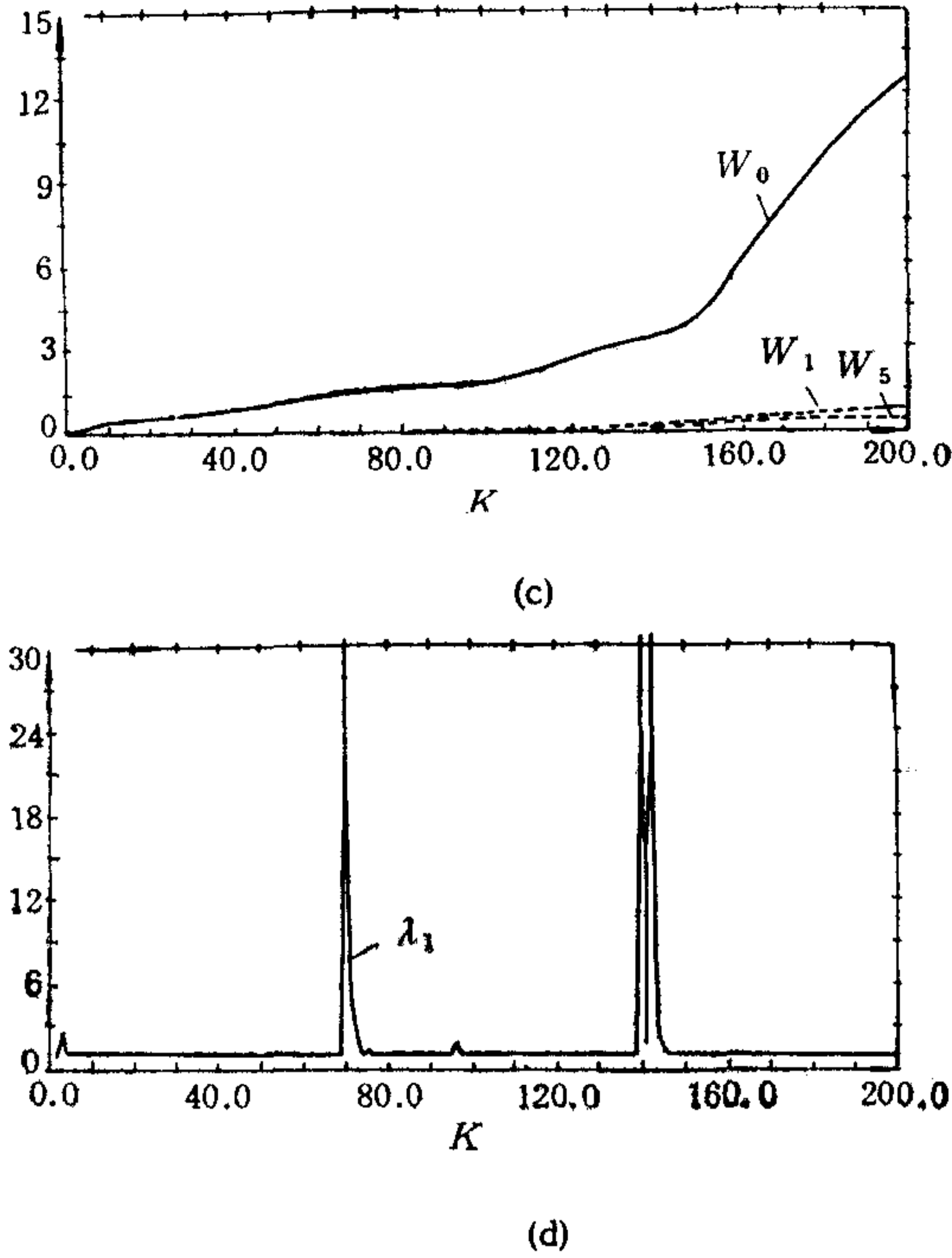


图 1 滤波器响应曲线

( $-0.2 \cdot k$ )). 在  $k = 70$  及  $k = 140$ , 由于外部强干扰,  $x_1(\cdot)$  分别有  $+2$  及  $-3$  的突变.

图 1 给出了各滤波器的输出曲线. 其中, 图 1(a) 为系统(23)各变量的真实曲线. 图 1(b) 中,  $\hat{x}_{10}$  表示 EKF,  $\hat{x}_{11}$  表示 SFEKF 的响应,  $\hat{x}_{15}$  表示 SMFEKF 的响应 ( $\rho = 0.75, \lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4 = 5:1:1:1$ ). 图 1(c) 中,  $W_0, W_1, W_5$  分别表示上述三种滤波器的状态滤波误差绝对值之和的累积值. 图 1(d) 给出了上述 SMFEKF 中  $\lambda_1(\cdot)$  的变化曲线, 揭示了本文次优渐消因子的自动调节机理.

表 1 给出了几种特殊条件下上述三种滤波器的性能比较, 表中数据是  $k = 200$  时, 对各状态滤波误差绝对值之和的累积值.

表 1 滤波器性能比较

滤波器 遗忘因子	EKF	SFEKF	SMFEKF			
			$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4 = 3:1:1:1$	$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4 = 5:1:1:1$	$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4 = 10:1:1:1$	$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4 = 50:1:1:1$
$\rho = 0.75$	12.5940	0.8558	0.5408	0.4787	0.4029	0.2984
$\rho = 0.95$	12.5940	0.8458	0.5499	0.4871	0.4009	0.2927

仿真结果表明

1) SMFEKF 与 SFEKF 相比具有更强的对突变状态的跟踪能力, 而 EKF 则不具有这种能力.

- 2) SMFEKF 对高维,强耦合,非线性随机系统依然有效.
- 3) SMFEKF 及 SFEKF 对遗忘因子并不敏感.
- 4) 先验知识越多(在这里  $\lambda_1$  相对越大)将更有助于对状态的高精度跟踪.

## 四、结 束 语

实际过程中,模型的不确定性是普遍存在的,这是由于:

- 1) 人们往往采用模型简化的方法,用低维的系统近似描述高维系统;
- 2) 对噪声及初值的统计特性建模不可能很准确;
- 3) 由于运行环境的变化,系统元器件的老化及随机的强外部干扰,造成了原来较准确的模型变得不准确.

由于模型不确定性的存在,会导致通常的各种滤波器性能大大下降甚至发散,已有的复杂的非线性滤波器<sup>[3]</sup>也不例外.然而,基于本文正交性原理的强跟踪滤波器,尽管是线性修正的滤波器,却可有效地克服这些模型的不确定性,因此具有较大的应用价值.

当无较大的模型失配时,本文的多重次优渐消因子可自动取 1,与 SFEKF 一样,不影响对系统状态的稳态跟踪精度.当采用算法 2 在线求解次优渐消因子时,本文的 SMFEKF 又具有很好的实时性,可用于此类非线性系统的在线状态估计.此外,本文 SMFEKF 也可用于非线性系统状态及参数的联合估计(参阅作者的博士学位的论文).

## 参 考 文 献

- [1] 周东华、席裕庚、张钟俊,非线性系统的带次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波,控制与决策,5(1990),1—6.
- [2] Jazwinski, A. H., Stochastic Process and Filter Theory, Academic Press, 1970.
- [3] Misawa, E. A., Hedrick, J. K., Nonlinear Observers—A State-of-the-Art Survey, *Trans. of the ASME, JDSMC*, 9(1989), 344—352.

# A SUBOPTIMAL MULTIPLE FADING EXTENDED KALMAN FILTER

ZHOU DONGHUA    XI YUGENG    ZHANG ZHONGJUN

(Dept. of Automatic Control, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 200030)

### ABSTRACT

A new concept of "strong tracking filters" is proposed, a general structure of a class of strong tracking filters is presented, and an orthogonality principle is also proposed for designing such strong tracking filters. Based on the orthogonality principle, a strong tracking filter—a suboptimal multiple fading extended Kalman filter (SMFEKF) is proposed, which improves the suboptimal fading extended Kalman filter (SFEKF) proposed in [1]. Finally, the effectiveness of the SMFEKF is illustrated by computer simulation.

**Key words:** Nonlinear system; stochastic system; strong tracking filter; state estimation; extended Kalman filter.