第17卷 第6期 自动化学报 Vol. 17, No. 6
1991年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1991

LQG/H$^\infty$ 控制设计:动态反馈控制

刘 频 王正志 张良起
(上海交通大学自控系) (国防科技大学)

摘 要

本文讨论了综合 LQG 与 H$^\infty$ 优化的控制器设计问题. 这个反馈控制器是在满足某个给定传递函数矩阵的 H$^\infty$ 范数约束条件下,使得系统的给定的二次性能指标达到最小的控制器.

关键词: H$^\infty$ 控制, LQG 控制, 鲁棒性, 线性系统.

一、引 言

多年来,人们对控制系统的 LQG 设计问题做了广泛深入的研究. 近几年发展起来的 H$^\infty$ 控制方法主要是为了解决系统的鲁棒稳定性问题. 对于动态反馈控制问题的 H$^\infty$ 优化设计, 作者已经利用模型匹配标准形式给出了一个解[1]. 但是此解的控制器本身的稳定性不能得到充分的保证,同时,控制器的阶次很有可能偏高. 为了弥补这个缺陷, 使 H^∞ 优化问题的指标明朗化,以便更好地运用于工程实际,本文提出了新的 LQG/H$^\infty$ 动态反馈设计方法,所设计的反馈控制器是在满足频率响应最坏情况的约束条件下,即满足某个给定传递函数阵的 H$^\infty$ 范数约束条件下, 使得系统给定的二次性能指标达到最小的控制器. 此方法从不同于 Bernstein 等人[2]的两个低价 Riccati 方程入手, 得到了显式、分离,便于计算机辅助设计的解.

二、LQG 与 H$^\infty$综合指标下的控制器设计

给定线性定常随机系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_1\boldsymbol{x}(t) + B_1\boldsymbol{\omega}(t) + B_2\boldsymbol{u}(t), \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = C_1\boldsymbol{x}(t) + D_{11}\boldsymbol{\omega}(t) + D_{12}\boldsymbol{u}(t), \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C_2\boldsymbol{x}(t) + D_{21}\boldsymbol{\omega}(t). \tag{1c}$$

引入动态反馈控制器

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = A\boldsymbol{\xi}(t) + B\boldsymbol{y}(t), \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = C\boldsymbol{\xi}(t). \tag{2b}$$

则对整个闭环系统(1)与(2),干扰 $\boldsymbol{\omega}$ 对系统误差 $\boldsymbol{z}$ 的传递函数阵 $G_C(S)$ 具有实现

本文于1990年9月25日收到.

$$G_C(S) \sim \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_2C & B_1 \\ BC_2 & A & BD_{21} \\ \hline C_1 & D_{12}C & D_{11} \end{array}\right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_C & B_C \\ \hline C_C & D_C \end{array}\right]. \tag{3}$$

这里要求设计反馈控制器(2)使得下列指标满足:

(i) 闭环系统 A_C 稳定,　　(4)

(ii) 干扰 $\boldsymbol{\omega}$ 对误差 z 的传递函数阵 $G_C(S)$ 满足约束

$$\|G_C(S)\|_\infty < \mu, \tag{5}$$

其中 $\mu > 0$ 为给定常数.

(iii) 2 次性能指标

$$J = \lim_{t\to\infty} E[\boldsymbol{x}^T R_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R_2 \boldsymbol{u}]. \tag{6}$$

达到最小.

将系统(1)、(2)代入(6)可知,性能指标(6)可以表示为

$$J = \mathrm{tr}\, qR. \tag{7}$$

其中 $R = \mathrm{diag}\{R_1, C^T R_2 C\}$,$q$ 为稳态相关阵 $q = \lim\limits_{t\to\infty} E[\boldsymbol{x}_C \boldsymbol{x}_C^T]$, 而 $\boldsymbol{x}_C = [\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\xi}^T]^T$. 同时 q 满足

$$A_C q + q A_C^T + B_C B_C^T = 0. \tag{8}$$

为了解决这个问题,首先引入几个引理.

引理 1. (Zhou & Khargonekar[3]) 下面的命题是等价的:

(i) A_C 是一稳定阵,且 $\|C_C(SI - A_C)^{-1}B_C + D_C\|_\infty < \mu$,

(ii) $\mu^2 I - D_C^T D_C > 0$, 且存在一正定阵 P_C, 使得

$$P_C A_C + A_C^T P_C + C_C^T C_2 + (P_C B_C + C_C^T D_C)(\mu^2 I - D_C^T D_C)^{-1} \times (B_C^T P_C + D_C^T C_C) < 0. \tag{9}$$

引理 2[1].给定 (A, B, C) 如(2)式,则(4)式与(5)式同时满足的充要条件为存在正定阵 $P > 0$, 使得

$$A_C P + P A_C^T + B_C^T B_C + (P C_C^T + B_C D_C^T)(\mu^2 I - D_C D_C^T)^{-1}(C_C P + D_C B_C^T) < 0, \tag{10}$$

更进一步地,在此条件下有

$$q \leqslant P. \tag{11}$$

且

$$\mathrm{tr} qR \leqslant \mathrm{tr} PR. \tag{12}$$

其中 q 满足(8)式.

下面这一步是关键性的. 由引理 2, 将整个反馈控制问题(1)—(6)进行修正,即给出一个辅助控制问题如下:

对于给定的线性定常随机系统(1),使得(4)式与(5)式同时满足,且使性能指标

$$J_1 = \mathrm{tr} P_C R \tag{13}$$

达到最小. 其中 P_C 满足 Riccati 不等式(10), $R = \mathrm{diag}\{R_1, C^T R_2 C\}$.

---

1) 此引理证明参见刘频博士论文,状态空间中的 H$^\infty$ 设计方法,1990.

首先给出这个辅助问题的解,然后进行详细证明. 在这里假设指标(13)中

$$R_2 = D_{12}^T(\mu^2 I - D_{11}D_{11}^T)^{-1}D_{12},$$

且给出条件

假设1. 矩阵 $D_{21}(I-\mu^{-2}D_{11}^TD_{11})^{-1}D_{21}^T$ 与 R_2 均为正定的.

定理1. 设假设1.成立. 若 (A,B,C) 为上述辅助问题的解,则存在矩阵 F、K,非负定阵 Q 及正定阵 P_1、$P_2>0$,使得

$$A = A_1 + BC_2 - B_2C + M(P_1-P_2)^{-1}, \tag{14}$$

$$B = K, \tag{15}$$

$$C = -FP_1(P_1-P_2)^{-1}. \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned} M = & -P_2C_2^TB^T - (B_1+KD_{21})D_{21}^TK^T - H - [P_2C_1 + (B_1 \\ & + BD_{21})D_{11}^T]D_t[D_{11}D_{21}^TB^T + (D_{21}C - C_1)(P_1-P_2)], \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} H = & -(A_1+KC_2)P_2 - P_2(A_1+KC_2)^T - (B_1+KD_{21})(B_1+KD_{21})^T \\ & - [P_2C_1^T + (B_1+KD_{21})D_{11}^T]D_t[C_1P_2 + D_{11}(B_1+KD_{21})^T], \end{aligned} \tag{18}$$

并且 P_1、P_2、F、K、Q 满足

$$\begin{aligned} & (A_1+B_2F)P_1 + P_1(A_1+B_2F)^T + B_1B_1^T + [B_1D_{11}^T + P_1(C_1+D_{12}F)^T] \\ & \quad \times D_t[D_{11}B_1^T + (C_1+D_{12}F)P_1] + \varepsilon Q_1 = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} & (A_1+KC_2)P_2 + P_2(A_1+KC_2)^T + (B_1+KD_{21})(B_1+KD_{21})^T \\ & \quad + [P_2C_1^T + (B_1+KD_{21})D_{11}^T]D_t[C_1P_2 + D_{11}(B_1+KD_{21})^T] + \varepsilon Q_2 \\ & = 0, \end{aligned} \tag{20}$$

$$K = -B_1(I-\mu^{-2}D_{11}^TD_{11})^{-1}D_{21}^TS_1 - P_2[C_2 + D_{21}D_{11}^TD_tC_1]^TS_1, \tag{21}$$

$$F = -R_2^{-1}[B_2^T + D_{12}^TD_t(D_1B_1^T + C_1P_1)]Q[(P_1-P_2)^{-1}+Q]^{-1}P_1^{-1}, \tag{22}$$

$$QA_2 + A_2^TQ + U = 0. \tag{23}$$

这里,

$$S_1 = [D_{21}(I-\mu^{-2}D_{11}^TD_{11})^{-1}D_{21}^T]^{-1}, \tag{24}$$

$$A_2 = A_1 + B_2F + [B_1D_{11}^T + P_1(C_1+D_{12}F)^T]D_t(C_1+D_{12}F), \tag{25}$$

$$U = R_1 + F^TR_2FP_1(P_1-P_2)^{-1} - (P_1-P_2)^{-1}P_1F^TR_2FP_2(P_1-P_2)^{-1}. \tag{26}$$

而 Q_1、Q_2 为给定正定对称阵, $\varepsilon>0$,且

$$D_t = (\mu^2 I - D_{11}D_{11}^T)^{-1}, \tag{27}$$

更进一步地,辅助指标(13)给定为

$$J_1 = \operatorname{tr}\{P_1R_1 + P_1F^TR_2FP_1(P_1-P_2)^{-1}\}. \tag{28}$$

反之,若存在 P_1、P_2、F、K、Q 满足(19)式—(26)式,且 P_1、$P_2>0$,则由(14)式—(18)式定义的反馈系统 (A,B,C) 为辅助问题的解,且具有优化指标(28).

在给出此定理的证明之前,首先证明下面的引理.

引理3. 存在反馈控制器 (A,B,C) 使闭环系统 A_C 稳定且满足约束(5)的充要条件为

1) $D_t = \mu^2 I - D_{11}D_{11}^T > 0$,

2) 存在正定阵 P_1、P_2 满足

(a) 存在矩阵 F 使得

$$(A_1 + B_2F)P_1 + P_1(A_1 + B_2F)^T + B_1B_1^T + [B_1D_{11}^T + P_1(C_1 + D_{12}F)^T]D_t[D_{11}B_1^T + (C_1 + D_{12}F)P_1] < 0, \tag{29}$$

(b) 存在矩阵 K 使得

$$(A_1 + KC_2)P_2 + P_2(A_1 + KC_2)^T + (B_1 + KD_{21})(B_1 + KD_{21})^T + [P_2C_1^T + (B_1 + KD_{21})D_{11}^T]D_t[C_1P_2 + D_{11}(B_1 + KD_{21})^T] < 0, \tag{30}$$

(c) $P_1 > P_2$.

证明. 必要性.

由引理 1 及引理 2 知,闭环系统 A_C 稳定且(5)式成立的充要条件为: 1) 满足且存在 P_C 使得

$$A_CP_C + D_CA_C^T + B_CB_C^T + (P_CC_C^T + B_CD_C^T)D_t(C_CP_C + D_CB_C^T) < 0. \tag{31}$$

将 P_C 分块为

$$P_C = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^T & \delta \end{bmatrix},$$

令 $E_1 = -\beta^T\alpha^{-1}$, 定义相似变换阵 T_1

$$T_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ E_1 & I \end{bmatrix},$$

记 $P_0 = \delta - \beta^T\alpha^{-1}\beta$, 将(31)式左乘 T_1 右乘 T_1^T, 然后展开 (1,1) 块, 同时令 $F = -CE_1$, 则得

$$(A_1 + B_2F)\alpha + \alpha(A_1 + B_2F)^T + B_1B_1^T + [B_1D_{11}^T + \alpha(C_1 + D_{12}F)^T]D_t[D_{11}B_1^T + (C_1 + D_{12}F)\alpha] < 0,$$

令 $P_1 = (1 + \varepsilon)\alpha$, 其中 $\varepsilon \geqslant 0$ 为任意正数,则存在充分小的 ε 有

$$(A_1 + B_2F)P_1 + P_1(A_1 + B_2F)^T + B_1B_1^T + [B_1D_{11}^T + P_1(C_1 + D_{12}F)^T]D_t[D_{11}B^T + (C_1 + D_{12}F)P_1] < 0.$$

定义相似变换阵 T_2

$$T_2 = \begin{bmatrix} I & E_2 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

其中 $E_2 = -\beta\delta^{-1}$, 则记 $P_2 = \alpha - \beta\delta^{-1}\beta^T$, 将(31)式左乘 T_2 右乘 T_2^T, 并展开 (1,1) 块,令 $K = E_2B$, 即得(30)式. 最后由上面的定义知

$$P_1 - P_2 > \alpha - P_2 = \alpha - (\alpha - \beta\delta^{-1}\beta^T) = \beta\delta^{-1}\beta^T \geqslant 0,$$

故 (c) 成立.

充分性.

令

$$S = A_CP_C + P_CA_C^T + B_CB_C^T + (P_CC_C^T + B_CD_C^T)D_t(C_CP_C + D_CB_C^T), \tag{32}$$

显然只需证明存在 (A, B, C) 及 P_C, 使 $S < 0$ 即可.

定义

$$P_C = \begin{bmatrix} P_1 & -(P_1 - P_2) \\ -(P_1 - P_2) & P_2 \end{bmatrix}, \tag{33}$$

其中 P_1 与 P_2 由(29)式、(30)式所定义. 给出相似变换阵

$$U_1=\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I\end{bmatrix},\quad U_2=\begin{bmatrix} I & 0 \\ (P_1-P_2)P_1^{-1} & I\end{bmatrix},$$

令 $S_1=U_1SU_1^T, S_2=U_2SU_2^T$, 将 S_1、S_2 分块为

$$S_1=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22}\end{bmatrix},\quad S_2=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22}\end{bmatrix},$$

再令 (A,B,C) 满足(14)式—(16)式,将等式(32)两边同时右乘 U_1^T 左乘 U_1, 并展开得

$$S_{11}=-H<0,\quad S_{12}=-H=S_{11}$$

将(32)左乘 U_2 右乘 U_2^T, 展开(1,1)块,且将(16)代入得

$$X_{11}=(A_1+B_2F)P_1+P_1(A_1+B_2F)^T+B_1B_1^T+[B_1D_{11}^T+P_1(C_1+D_{12}F)^T]D_t[D_{11}B_1^T+(C_1+D_{12}F)P_1],$$

由(29)式知 $X_{11}<0$. 又由 $S_2=U_2SU_2^T=U_2U_1^{-1}S_1U_1^{-T}U_2^T$,展开(1,1)块得

$$X_{11}=S_{11}-S_{12}^T-S_{12}+S_{22},$$

故

$$S_{22}=X_{11}-S_{11}+S_{12}^T+S_{12}=X_{11}-H<0,$$

$$S_1=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -H & -H \\ -H & X_{11}-H\end{bmatrix}<0,$$

因此 $S<0$. 证毕.

定理 1 的证明.

由引理 3 可知,辅助问题等价于寻找反馈控制器 (A,B,C) 满足(10)式, 且使(13)达到最小. 令 P_C 由(33)式所定义,则由(13)式得

$$J_1=\mathrm{tr}PR=\mathrm{tr}\{P_1R_1+P_1F^TR_2FP_1(P_1-P_2)^{-1}\}, \tag{34}$$

因此,辅助问题又等价于选择 F、K, 使得在约束(19)与(20)成立的条件下,使(34)式中的指标 J_1 达到最小. 为此, 记 F_F 为(19)式等式左,记 F_K 为 (20) 式等式左, 引入 Lagrange 算子

$$\mathscr{L}(F,K,P_1,P_2,Q,N)=\mathrm{tr}\{P_1R_1+P_1F^TR_2FP_1(P_1-P_2)^{-1}+F_FQ+F_KN\}, \tag{35}$$

其中 Q、N 为非负对称阵. 令

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F}=2R_2FP_1(P_1-P_2)^{-1}P_1+2B_2^TQP_1+2D_{12}^TD_t(D_{11}B_1^T+C_1P_1)QP_1 + 2D_{12}^TD_tD_{12}FP_1QP_1\triangleq 0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial K}=2N\{P_2C_2^T+(B_1+KD_{21})D_{21}^T+(P_2C_2^T+B_1D_{11}^T)D_tD_{11}D_{21}^T + KD_{21}D_{11}^TD_tD_{11}D_{21}^T\}\triangleq 0, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial P_1}=&R_1+(P_1-P_2)^{-1}P_1F^TR_2F+F^TR_2FP_1(P_1-P_2)^{-1}\\ &-(P_1-P_2)^{-1}P_1F^TR_2FP_1(P_1-P_2)^{-1}+(A_1+B_2F)^TQ\\ &+Q(A_1+B_2F)+QB_1D_{11}^TD_t(C_1+D_{12}F)\\ &+(C_1+D_{12}F)^TD_tD_{11}B_1^TQ+QP_1(C_1+D_{12}F)^TD_t(C_1+D_{12}F)\\ &+(C_1+D_{12}F)^TD_t(C_1+D_{12}F)P_1Q\triangleq 0,\end{aligned} \tag{38}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial P_2}=(P_1-P_2)^{-1}P_1F^TR_2FP_1(P_1-P_2)^{-1}+(A_1+KC_2)^TN$$
$$+N(A_1+KC_2)+NP_2C_1^TD_tC_1+C_1^TD_tC_1P_2N+N(B_1$$
$$+KD_{21})D_{11}^TD_tC_1+C_1^TD_tD_{11}(B_1+KD_{21})^TN\triangleq 0. \tag{39}$$

由(36)式及假设 $R_2=D_{12}^TD_tD_{12}$ 直接可推得(22)式. 易知$N\equiv 0$不为方程组(36)—(39)的解. 事实上由(39)式知,若 $N\equiv 0$, 由 (P_1-P_2) 与 P_1 的正定性可得 $F\equiv 0$. 此时(34)式变为 $J_1=\mathrm{tr}\{P_1R_1\}$. 而由 $F_F=0$ 知有

$$(A_1+B_1D_{11}^TD_tC_1)P_1+P_1(A_1+B_1D_{11}^TD_tC_1)^T+P_1C_1^TD_tC_1P_1$$
$$+B_1(I+D_{11}^TD_tD_{11})B_1^T=0,$$

可见，P_1 由原系统 (A_1,B_1,C_1,D_1) 完全确定，即优化指标是不可变的. 这就与辅助优化问题本身产生了矛盾. 因此,由(37)式可知下面的条件是充分的:

$$P_2C_2^T+(B_1+KD_{21})D_{21}^T+(P_2C_1^T+B_1D_{11}^T)D_tD_{11}D_{21}^T+KD_{21}D_{11}^TD_tD_{11}D_{21}^T=0,$$

注意到 $I+D_{11}^TD_tD_{11}=(I-\mu^{-2}D_{11}^TD_{11})^{-1}$, 且令 S_1 如 (24) 式代入上式可得K如(21)式. 最后由(41)式整理可得(23)式、(25)式、(26)式.

反之,若 (A,B,C) 满足(14)—(26)式,则 F、K、Q 满足(25)—(27)式. 由引理 3 的证明知,此时 (A,B,C) 满足(4)式与(5)式,即 (A,B,C) 为辅助问题的解,且性能指标为(34). 证毕.

定理 1 表明,(14)—(26)式是辅助问题的一个显式解,下面将证明其中的F与K的求解是完全可分离的,并且K可以通过下面的方法直接求得.

将K的表达式(21)代入(20)式得 Riccati 方程

$$A_{11}P_2+P_2A_{11}^T+B_1(I-L_1D_{21})D_{t1}(I-L_1D_{21})^TB_1^T$$
$$+P_2[(C_1-D_{11}D_{21}^TL_2^T)^TD_{t1}(C_1-D_{11}D_{21}^TL_1^T)+L_2D_{21}D_{21}^TL_2^T-L_2C_2$$
$$-C_2^TL_2^T]P_2+\varepsilon Q_2=0. \tag{40}$$

其中

$$A_{11}=A_1-B_1L_1C_2-B_1(I-L_1D_{21})[L_2D_{21}-(C_1^T-L_2D_{21}D_{11}^T)D_tD_{11}]^T, \tag{41}$$
$$L_1=D_{t1}D_{21}^TS_1, \tag{42}$$
$$L_2=[C_2+D_{21}D_{11}^TD_tC_1]^TS_1, \tag{43}$$
$$D_{t1}=(I-\mu^{-2}D_{11}^TD_{11})^{-1}. \tag{44}$$

因此有下面的推论:

推论 1　若假设 1 成立,且 (A,B,C) 为上述辅助问题的解,则存在矩阵 F、K, 非负定阵Q及正定阵 P_1、$P_2>0$, 控制器 (A,B,C) 满足(14)式—(16)式,其中的 M、H、K与F满足(17),(18),(21),(22)式,并且Q满足(23)式,而 P_1、P_2 满足

$$A_{11}P_2+P_2A_{11}^T+B_1(I-L_1D_{21})D_{t1}(I-L_1D_{21})^TB_1^T$$
$$+P_2[(C_1^T-L_2D_{21}D_{11}^T)D_{t1}(C_1-D_{11}D_{21}^TL_2^T)+L_2D_{21}D_{21}^TL_2^T$$
$$-L_2C_2-C_2^TL_2^T]P_2+\varepsilon Q_2=0, \tag{45}$$
$$(A_1+B_2F)P_1+P_1(A_1+B_2F)^T+B_1B_1^T+[B_1D_{11}^T$$
$$+P_1(C_1+D_{12}F)^T]D_t[D_{11}B_1^T+(C_1+D_{12}F)P_1]+\varepsilon Q_1=0, \tag{46}$$

其中，A_{11}、L_1、L_2、D_{t1} 分别满足(41)式—(44)式，S_1、A_2、U 和 D_t 分别满足(24)式—

(26)式,而 Q_1、Q_2 为给定的正定对称阵，$\varepsilon > 0$，辅助指标(13)给定为

$$J_1 = \mathrm{tr}\{P_1R_1 + P_1F^TR_2FP_1(P_1 - P_2)^{-1}\}, \tag{47}$$

反之，若存在 K、F、P_1、P_2、Q 满足(21)—(23)、(45)—(46)式，且 P_1、$P_2 > 0$，则由(14)—(18)式定义的反馈系统（A,B,C）为辅助问题的解,且具有优化指标(47).

至此,得到了 LQG/H$^\infty$ 状态反馈控制问题的显式解,此解由于K与F的可分离性使整个计算过程简单化了.

参 考 文 献

[1] 刘频,王正志,张良起,状态空间形式下的 H$^\infty$ 控制问题,国防科技大学学报,**12**(1990),2.

[2] Haddad, W. M., Bernstein, D.S., *IEEE Trans. Automa. Control*, **34**(1989), 293－301.

[3] Zhou, K., and Khargonekar, P. P., *Systems and Control Letters*, **11**(1988), 65—91.

LQG/H$^\infty$ DYNAMIC FEEDBACK CONTROL

Liu Pin

(*Shanghai Jiao Tong University*)

Wang Zhengzhi Zhang Liangqi

(*National University of Defence Technology*)

Abstract

A controller design using combined LQG/H$^\infty$ method is discussed. The problem is, in fact, an LQG control design involving a constraint on H$^\infty$ disturbance attenuation. In this paper, the H$^\infty$ constrained gains are given by two separate systems respectively.

Key words: H$^\infty$-optimization; LQG control; robustness; linear system.