

# 加权多步预报控制<sup>1)</sup>

徐立鸿 冯纯伯

(东南大学自动化所, 南京)

## 摘 要

本文提出了一类加权多步预报控制 (WLPC) 算法。这种算法是由极小化一个很一般的加权二次型性能指标得到的。由于权因子可以根据闭环极点配置、前馈零点增补和动态性能要求任意选取, 所以可保证闭环系统的稳定性和对建模误差的鲁棒性。文中给出了这方面结果的理论证明和仿真实例。

**关键词:** 预测控制, 极点配置, 闭环稳定性, 鲁棒性。

## 一、引 言

近年来, 预测控制领域的研究取得了较大的进展, 动态矩阵控制 (DMC)<sup>[1]</sup>、模型算法控制 (MAC)<sup>[2]</sup>、广义预测控制 (GPC)<sup>[3]</sup> 等算法都比较成熟。然而, 这些算法在理论分析方面都不够深入。有些理论分析<sup>[4]</sup>表明, 预测控制(例如 GPC)并不像以往人们认为的那样对各类建模误差都有较好的鲁棒性。为了进一步提高预测控制的鲁棒性, 本文在原有的预测控制<sup>2)</sup> 框架内引进了一类可调权因子, 提出了一类新型的加权多步预报控制 (WLPC) 算法, 并且给出了它的闭环稳定性和鲁棒性的理论证明。

## 二、被控真系统及其模型、建模误差和性能函数

考虑如下被控真系统:

$$A_0(z^{-1}) \cdot y(t) = B_0(z^{-1}) \cdot u(t-1) + C(z^{-1})\xi(t), \quad (2.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_0(z^{-1}) &= 1 + a_1^{(0)}z^{-1} + \dots + a_{n_{a_0}}^{(0)}z^{-n_{a_0}}, \\ B_0(z^{-1}) &= b_0^{(0)} + b_1^{(0)}z^{-1} + \dots + b_{n_{b_0}}^{(0)}z^{-n_{b_0}}, \\ C(z^{-1}) &= 1 + c_1z^{-1} + \dots + c_{n_c}z^{-n_c}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$\{y(\cdot)\}, \{u(\cdot)\}, \{\xi(\cdot)\}$  分别是系统的输出、输入和随机噪声。

假定真系统(2.1)的模型为

本文于1990年9月25日收到。

1) 国家自然科学基金资助的课题。本文曾在1990年全国控制理论与应用年会(杭州)上宣读。

2) 徐立鸿, 预测控制的研究, 东南大学博士论文, 1991。

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + C(z^{-1})\xi(t), \quad (2.3)$$

其中噪声模型  $C(z^{-1})$  和真系统一致,  $A(z^{-1}), B(z^{-1})$  为

$$\left. \begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{na} z^{-na}, \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{nb} z^{-nb}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

因此,建模误差为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}(z^{-1}) &= A_0(z^{-1}) - A(z^{-1}), \\ \tilde{B}(z^{-1}) &= B_0(z^{-1}) - B(z^{-1}). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

分析(2.5)式可知,1) 当  $na_0 = na, nb_0 = nb$  时,建模误差是参数不确定型的;2) 当  $na_0 \neq na$  或  $nb_0 \neq nb$  时,建模误差是结构不确定型的(如降阶建模即属此类)。因此,本文考虑的建模误差是非常一般的。

在下面的讨论中,将对系统及模型作如下假定:

A1)  $A(z^{-1})$  与  $B(z^{-1})$  互质;

A2)  $C(z^{-1})$  稳定,即  $C(z^{-1}) = 0 \iff |z| < 1$ ;

A3)  $na, nb, nc$  的上界是已知的;

A4)  $E\{\xi(t+1)|\mathcal{F}_t\} = 0, E\{\xi^2(t+1)|\mathcal{F}_t\} = \mu^2, t \geq 1, \text{ a.s.}$

A5)  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \xi^2(t+j) < \infty. \text{ a.s.}$

其中,  $\mathcal{F}_t$  为  $\{I_0, \xi(1), \dots, \xi(t)\}$  生成的  $\sigma$ -代数,  $I_0$  为系统的初始条件。

性能函数为

$$\begin{aligned} J = E \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N (P_j(z^{-1})y(t+j) - Q_j(z^{-1})r(t+j))^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1}^M (R_j(z^{-1}) \cdot u(t+j-1))^2 \right] \middle| \mathcal{F}_t \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中  $r(\cdot)$  是参考输入,本文假定它已知且有界,  $N, M$  分别是输出预测水平和控制水平,  $N \geq M$ 。  $P_j(z^{-1}), Q_j(z^{-1})$  和  $R_j(z^{-1})$  分别为加权因子,为保证闭环性能,选取如下形式:

$$\left. \begin{aligned} P_j(z^{-1}) &\equiv P(z^{-1}), \quad Q_j(z^{-1}) \equiv Q(z^{-1}), \quad (j = 1, 2, \dots, N). \\ R_j(z^{-1}) &= \begin{cases} \lambda, & \text{当 } 2 \leq j \leq M; \\ K'_w(z^{-1})/K_L(z^{-1}), & \text{当 } j = 1. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

其中  $K_L(z^{-1})$  为  $z^{-1}$  的多项式,  $K_L(0) = 1, K'_w(z^{-1})$  具有如下形式:

$$K'_w(z^{-1}) = \lambda \cdot K_L(z^{-1}) + z^{-1}K_w(z^{-1}). \quad (2.8)$$

因此

$$R_1(z^{-1}) = \lambda + z^{-1} \cdot K_w(z^{-1})/K_L(z^{-1}). \quad (2.9)$$

这里,  $P(z^{-1}), Q(z^{-1}), K_w(z^{-1})$  和  $K_L(z^{-1})$  都是待选取的多项式,  $\lambda (\geq 0)$  是一个待选常数权。

### 三、具有极点配置功能的 WLPC 控制律

为简单起见, 以下记多项式  $X(z^{-1})$  为  $\mathbf{x}$ ,  $X(z^{-1})$  的阶次为  $nx$ , 以多项式  $X_i(z^{-1})$  为元素的向量记为  $\mathbf{x}$ .

如同 GPC 一样, 假定

$$u(t+j-1) = u(t+M-1), \text{ 当 } M \leq j \leq N. \tag{3.1}$$

由丢番图 (Diophantine) 方程

$$PC = AF_j + z^{-j}G_j, (\text{deg}F_j = j - 1), \tag{3.2}$$

$$BF_j = CD_j - z^{-j}E_j, (\text{deg}D_j = j - 1), \tag{3.3}$$

解得  $F_j, G_j, D_j, E_j$ , 于是有

$$Py(t+j) = D_j u(t+j-1) + C^{-1}[G_j y(t) + E_j u(t-1)] + F_j \xi(t+j). \tag{3.4}$$

因此,  $y_p(t)$  ( $\triangleq Py(t)$ ) 的  $j$  步向前预测为

$$\hat{y}_p(t+j|t) = D_j u(t+j-1) + C^{-1}[G_j y(t) + E_j u(t-1)]. \tag{3.5}$$

故性能函数为

$$J = J_1 + \delta^2, \tag{3.6}$$

其中

$$J_1 = \sum_{j=1}^N [\hat{y}_p(t+j|t) - Qr(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^M [R_j u(t+j-1)]^2, \tag{3.7}$$

$$\delta^2 = \sum_{j=1}^N E\{[F_j \xi(t+j)]^2 | \mathcal{F}_t\}, \tag{3.8}$$

极小化  $J$  当且仅当极小化  $J_1$ . 引进以下向量记号:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_p &= [\hat{y}_p(t+1|t), \dots, \hat{y}_p(t+N|t)]^T, \\ \mathbf{r} &= [r(t+1), \dots, r(t+N)]^T, \\ \mathbf{u} &= [u(t), u(t+1), \dots, u(t+M-1)]^T, \\ \mathbf{u}_R &= [R_1 u(t), R_2 u(t+1), \dots, R_M u(t+M-1)]^T, \\ \mathbf{G} &= [G_1, \dots, G_N]^T, \\ \mathbf{E} &= [E_1, \dots, E_N]^T. \end{aligned} \right\} \tag{3.9}$$

则由式(3.5)有

$$\hat{\mathbf{y}}_p = \mathbf{D}\mathbf{u} + C^{-1}[\mathbf{G}y(t) + \mathbf{E}u(t-1)]. \tag{3.10}$$

其中

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_0 & \cdots & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ d_{M-1} & d_{M-2} & \cdots & d_1 & & d_0 \\ d_M & & \cdots & d_2 & & d_1 + d_0 \\ & \cdots & \cdots & & \cdots & \\ d_{N-1} & d_{N-2} & \cdots & d_{N-M+1} & \sum_{i=0}^{N-M} d_i & \end{bmatrix} \in R^{N \times M}, \tag{3.11}$$



这里  $d_i (i = 0, 1, \dots, N-1)$  是(3.3)式中多项式  $D_j$  的系数 ( $j = 1, 2, \dots, N$ ).

令

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{y}}_P - Q\mathbf{r}, \quad (3.12)$$

则

$$J_1 = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \mathbf{u}_R^T \mathbf{u}_R. \quad (3.13)$$

而

$$\mathbf{u}_R = \lambda \mathbf{u} + \left( \frac{K_W}{K_L} u(t-1) \right) \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = [1, 0, \dots, 0]^T, \quad (3.14)$$

于是由  $\frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{u}} = 0$  得到控制律为

$$C \cdot u(t) = \mathbf{h}^T [CQ\mathbf{r} - \mathbf{G}y(t) - \mathbf{E}u(t-1)] - \lambda a^* C \cdot \left( \frac{K_W}{K_L} \right) u(t-1). \quad (3.15)$$

其中

$$\mathbf{h}^T \triangleq [h_1, \dots, h_N] = \mathbf{a}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{D} + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{D}^T, \quad (3.16)$$

$$a^* = \mathbf{a}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{D} + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}. \quad (3.17)$$

控制律(3.15)可写成以下形式:

$$\mathcal{D}u(t) + \mathcal{G}y(t) = \mathcal{L}r(t+N), \quad (3.18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D} &= K_L C + z^{-1} [K_L (\mathbf{h}^T \mathbf{E}) + \lambda a^* C K_W], \\ \mathcal{G} &= K_L (\mathbf{h}^T \mathbf{G}), \\ \mathcal{L} &= K_L C Q H, \\ H &= h_N + h_{N-1} z^{-1} + \dots + h_1 z^{-N+1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

对真系统(2.1)施加控制律(3.18)得到

$$(\mathcal{D}A_0 + z^{-1} \mathcal{G}B_0)y(t) = B_0 \mathcal{L}r(t+N-1) + \mathcal{D}C\xi(t). \quad (3.20)$$

令

$$\begin{aligned} T_0 &= \mathcal{D}A_0 + z^{-1} \mathcal{G}B_0 \\ &= (\mathcal{D}A + z^{-1} \mathcal{G}B) + (\mathcal{D}\tilde{A} + z^{-1} \mathcal{G}\tilde{B}) \triangleq T + \tilde{T}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中

$$T = \mathcal{D}A + z^{-1} \mathcal{G}B = \mathcal{A}K_L + z^{-1} \mathcal{B}K_W, \quad (3.22)$$

$$\tilde{T} = \mathcal{D}\tilde{A} + z^{-1} \mathcal{G}\tilde{B}. \quad (3.23)$$

这里

$$\mathcal{A} = AC + z^{-1} [A(\mathbf{h}^T \mathbf{E}) + B(\mathbf{h}^T \mathbf{G})], \quad (3.24)$$

$$\mathcal{B} = \lambda a^* AC. \quad (3.25)$$

由(3.2),(3.3)和(3.24)式有

$$\mathcal{A} = AC + z^{-1} \sum_{j=1}^N h_j (AE_j + BG_j) = C[A + z^{-1}(\mathbf{h}^T \mathbf{L})]. \quad (3.26)$$

其中  $\mathbf{L} = [L_1, \dots, L_N]^T$ ,  $L_j(z^{-1})$  满足

$$PB = AD_j + z^{-j} L_j. \quad (3.27)$$

令

$$\mathcal{A}_1 = A + z^{-1}(\mathbf{h}^T \mathbf{L}), \quad (3.28)$$

$$\mathcal{B}_1 = \lambda a^* A, \quad (3.29)$$

则

$$T = C(\mathcal{A}_1 K_L + z^{-1} \mathcal{B}_1 K_W). \quad (3.30)$$

于是闭环系统方程为

$$(T + \tilde{T})y(t) = B_0 \mathcal{L} r(t + N - 1) + \mathcal{D} C \xi(t). \quad (3.31)$$

因为  $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1$  只与模型有关, 它们是已知的, 且由假定  $A_1) - A_3)$  和(3.27) — (3.29) 式可知, 它们是互质的, 且阶次的上界已知, 故可选取唯一的一对多项式  $K_L, K_W$  使

$$\mathcal{A}_1 K_L + z^{-1} \mathcal{B}_1 K_W = T_1. \quad (3.32)$$

其中  $T_1(z^{-1})$  是一个具有期望零点的稳定多项式,  $T_1(0) = 1, \deg T_1 \leq na + \max(na, nb + np)$ . 因此式(3.31)成为

$$(CT_1 + \tilde{T})y(t) = B_0 \mathcal{L} r(t + N - 1) + \mathcal{D} C \xi(t). \quad (3.33)$$

1) 当模型与真系统无失配(即  $\tilde{T} = 0$ ) 时, 闭环系统方程为

$$T_1 y(t) = BK_L Q H r(t + N - 1) + \mathcal{D} \xi(t), \quad (3.34)$$

实现了闭环极点配置, 保证了闭环稳定性.

2) 当建模误差存在(即  $\tilde{T} \neq 0$ ) 时, 由于  $T_1$  由设计者选取, 可使控制器(3.18)具有较好的稳定裕度, 从而对建模误差有较好的鲁棒性.

## 四、WLPC 的理论分析

本节将证明以下两方面的结果:

### 1. 无建模误差时的闭环稳定性

**定理 1** (闭环稳定性). 在模型与系统无失配时, 如果 i) 假定 (A1) — (A5) 满足; ii) 权  $K_L, K_W$  按照式(3.32)选取; 则当 WLPC 控制(3.18)被应用时, 导出的闭环系统是以概率 1 输入输出有界的, 即

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K y^2(t) < \infty, \text{ a. s.} \quad (4.1)$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K u^2(t) < \infty, \text{ a. s.} \quad (4.2)$$

证明. 当模型与系统无失配(即  $\tilde{T} = 0$ ) 时, 闭环系统方程由式(3.34)给出, 类似可推得

$$T_1 u(t) = AK_L Q H r(t + N) - \mathcal{D} \xi(t). \quad (4.3)$$

由于  $T_1$  是稳定多项式且假定 (A5) 成立, 故由(3.34)和(4.3)式即得

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K y^2(t) \leq C'_y + \frac{C''_y}{K} \sum_{i=1}^K r^2(t + N - 1), \text{ a. s.},$$

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K u^2(t) \leq C'_u + \frac{C''_u}{K} \sum_{i=1}^K r^2(t + N), \text{ a. s.},$$

其中  $C'_y, C''_y, C'_u, C''_u$  是有界的.

由  $r(t)$  有界即得(4.1)和(4.2)式.

[证毕]

## 2. 存在建模误差时的鲁棒性

**定理 2** (鲁棒性). 存在建模误差时,若假定 A1)–A5)成立,且权  $K_L, K_W$  按(3.32)式选取,则当建模误差  $\tilde{A}, \tilde{B}$  满足如下不等式:

$$|\mathcal{D}(e^{-i\omega}) \cdot \tilde{A}(e^{-i\omega}) + e^{-i\omega} \mathcal{G}(e^{-i\omega}) \cdot \tilde{B}(e^{-i\omega})| < |T_1(e^{-i\omega}) \cdot C(e^{-i\omega})|, \quad (4.4)$$

闭环系统渐近稳定 (其中  $\mathcal{D}, \mathcal{G}$  由式(3.19)给出  $1i = \sqrt{-1}, \omega \geq 0$ ).

为证明本定理,首先引入一个已知的引理.

**引理** (Rouché 定理).

假定  $\Gamma$  是区域  $V$  中的一条简单闭曲线,且  $\Gamma$  的内部被  $V$  包含,若 i) 复函数  $f(z)$  和  $g(z)$  在  $V$  中解析; ii) 在  $\Gamma$  上满足  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|, z \in \Gamma$ , 则  $f(z)$  和  $g(z)$  在  $\Gamma$  的内部区域中的零点个数相同.

由此引理,可得定理 1 的证明如下:

对多项式  $X(z^{-1}) = x_0 + x_1 z^{-1} + \dots + x_{n_x} z^{-n_x}$ , 定义一个相同系数的  $z$  的多项式为

$$X^*(z) = x_0 z^{n_x} + x_1 z^{n_x-1} + \dots + x_{n_x}.$$

易证如下关系成立:

- <i>  $X(z^{-1}) = z^{-n_x} X^*(z)$ ;
- <ii>  $|X(e^{-i\omega})| = |X^*(e^{i\omega})|$ ;
- <iii>  $X(z^{-1})$  稳定  $\iff X^*(z)$  稳定.

当建模误差存在时,闭环系统方程为(见(3.33)式)

$$(CT_1 + \tilde{T})y(t) = B_0 \mathcal{L} r(t + N - 1) + \mathcal{D} C \xi(t). \quad (4.5)$$

记

$$\begin{aligned} \hat{n} &= \deg(CT_1 + \tilde{T}), \quad nct_1 = \deg(CT_1), \quad n\tilde{t} = \deg \tilde{T}, \\ nl &= \deg \mathcal{L}, \quad nd = \deg \mathcal{D}, \end{aligned}$$

则有

$$\hat{n} = \begin{cases} nct_1, & \text{当 } nct_1 \geq n\tilde{t}, \\ n\tilde{t}, & \text{当 } nct_1 < n\tilde{t}. \end{cases}$$

因此可分两种情况讨论:

1)  $nct_1 \geq n\tilde{t}$  (此时  $\hat{n} = nct_1$ ),

闭环系统方程(4.5)成为

$$\begin{aligned} [C^*(z)T_1^*(z) + z^{(\hat{n}-n\tilde{t})}\tilde{T}^*(z)]y(t) &= z^{(\hat{n}-nb_0-nl)}B_0^*(z)\mathcal{L}^*(z)r(t + N - 1) \\ &+ z^{(\hat{n}-nc-nd)}\mathcal{D}^*(z)C^*(z)\xi(t). \end{aligned}$$

因此,闭环系统渐近稳定  $\iff C^*(z)T_1^*(z) + z^{(\hat{n}-n\tilde{t})}\tilde{T}^*(z)$  的零点全在单位圆内.

令  $f(z) = C^*(z) \cdot T_1^*(z)$ ,  $g(z) = C^*(z)T_1^*(z) + z^{(\hat{n}-n\tilde{t})}\tilde{T}^*(z)$

显然,  $f(z), g(z)$  在  $z$ -平面上解析,在单位圆  $\Gamma$  上有

$$\begin{aligned} |\tilde{T}^*(e^{i\omega})| &= |\tilde{T}(e^{-i\omega})| = |\mathcal{D}(e^{-i\omega}) \cdot \tilde{A}(e^{-i\omega}) + e^{-i\omega} \mathcal{G}(e^{-i\omega}) \cdot \tilde{B}(e^{-i\omega})| \\ &< |T_1(e^{-i\omega}) \cdot C(e^{-i\omega})| = |T_1^*(e^{i\omega}) \cdot C^*(e^{i\omega})| = |f(e^{i\omega})|. \end{aligned} \quad (4.6)$$



因此

$$|f(e^{i\omega}) - g(e^{i\omega})| = |e^{i(\hat{n}-n\tilde{i})\omega} \cdot \tilde{T}^*(e^{i\omega})| < |f(e^{i\omega})|.$$

由引理知,  $f(z)$  和  $g(z)$  在单位圆内的零点个数相同,  $\deg f(z) = \deg g(z) = \hat{n} (= nct_1)$ , 且  $f(z)$  是稳定多项式, 故  $g(z)$  的零点全在单位圆内.

2)  $nct_1 < n\tilde{i}$  (此时  $\hat{n} = n\tilde{i}$ ),

闭环系统方程(4.5)为

$$[z^{(\hat{n}-nct_1)}C^*(z) \cdot T_1^*(z) + \tilde{T}^*(z)]y(t) = z^{(\hat{n}-nb_0-nl)}B_0^*(z)\mathcal{L}^*(z) \\ \cdot r(t+N-1) + z^{(\hat{n}-nc-nd)}\mathcal{D}^*(z) \cdot C^*(z)\xi(t).$$

因此, 闭环系统渐近稳定  $\Leftrightarrow z^{(\hat{n}-nct_1)}C^*(z) \cdot T_1^*(z) + \tilde{T}^*(z)$  的零点全在单位圆内.

令  $f(z) = z^{(\hat{n}-nct_1)}C^*(z)T_1^*(z)$ ,  $g(z) = z^{(\hat{n}-nct_1)}C^*(z)T_1^*(z) + \tilde{T}^*(z)$ , 由  $\deg f(z) = \deg g(z) = \hat{n}$ ,  $f(z)$  与  $g(z)$  的零点个数相同, 而  $f(z)$  的零点全在单位圆内, 且在单位圆上有

$$|f(e^{i\omega}) - g(e^{i\omega})| = |\tilde{T}^*(e^{i\omega})| < |f(e^{i\omega})| \quad (\text{见(4.6)式}),$$

故由引理,  $g(z)$  的零点全在单位圆内.

[证毕]

由此鲁棒性定理知, WLPC 算法对满足不等式(4.4)的建模误差是鲁棒的. 不等式(4.4)给出了 WLPC 所允许的建模误差的界, 而这个界与设计者自选的  $T_1(z^{-1})$  有关, 这是一个极好的特性. 当  $|T_1(e^{-i\omega})|$  越大时, WLPC 的鲁棒性能越好.

## 五、权因子的作用及选取方法

### 1. 权因子的作用

1) 增强鲁棒性. 通过选取  $T_1(z^{-1})$ , 从而确定控制项的权  $K_w/K_L$ , 保证鲁棒性.

2) 提高跟踪精度, 削弱随机噪声的影响.

系统的跟踪精度主要由跟踪误差的方差  $\delta^2$  (见(3.8)式) 大小来决定, 而随机噪声  $C(z^{-1})\xi(t)$  是影响  $\delta^2$  的主要因素. 尤其是噪声强度  $|\mu_c|$  (这里定义  $\mu_c = C(0)$ , 因而, 噪声模型可描述为  $\mu_c C(z^{-1}) \cdot \xi(t)$ , 其中  $C(0) = 1$ ),  $\delta^2$  与  $|\mu_c|$  成平方级递增关系, 这点说明如下:

由式(3.2)有

$$P(\mu_c C) = A(\mu_c F_i) + z^{-i}(\mu_c G_i), \quad (5.1)$$

从而

$$\delta_{\mu_c}^2 = |\mu_c|^2 \cdot \sum_{j=1}^N E\{[F_j \xi(t+j)]^2 | \mathcal{F}_t\} = |\mu_c|^2 \cdot \delta^2. \quad (5.2)$$

因此当噪声强度  $|\mu_c| > 1$  时, 噪声对跟踪精度的影响是很大的. 此时, 权  $P(z^{-1})$  可取为  $\frac{1}{\mu_p} P(z^{-1})$ ,  $P(0) = 1$ , 且  $\left| \frac{\mu_c}{\mu_p} \right| < 1$ , 从而跟踪误差缩小了  $\left| \frac{\mu_c}{\mu_p} \right|^2$  倍, 提高了跟踪精度.

3) 按系统动态性能要求增补零点.

由闭环系统方程(3.33)知, WLPC 不改变原系统的零点,但增加了新的零点. 新增的零点有两类: 一类是控制器和闭环极点配置带来的新零点(即  $H(z^{-1}), K_L(z^{-1})$  的零点); 一类是设计者按动态性能要求选取权因子  $Q(z^{-1})$  而增补的零点.

4) 消除稳态误差.

不考虑建模误差, 此时的闭环系统方程为

$$T_1 y(t) = BK_L QH \cdot r(t + N - 1) + \mathcal{D} \xi(t). \quad (5.3)$$

$$\text{为使 } \lim_{z \rightarrow 1} \frac{B(z^{-1})K_L(z^{-1})Q(z^{-1})H(z^{-1})}{T_1(z^{-1})} = 1,$$

只要取

$$Q(1) = T_1(1)/h^* \cdot B(1) \cdot K_L(1). \quad (5.4)$$

其中

$$h^* \triangleq H(1) = \sum_{i=1}^N h_i. \quad (5.5)$$

此时系统无静差.

## 2. 权因子的选取方法

1) 权因子  $P(z^{-1})$  对输出  $y(t)$  起滤波作用, 因而可削弱随机噪声的影响, 提高跟踪精度. 选取原则是使跟踪误差  $\delta^2$  尽可能地小. 当噪声强度不大时, 可简单地取  $P(z^{-1}) = 1$ .

2) 权因子  $Q(z^{-1})$  可按系统动态特性要求选取. 因为  $Q(z^{-1})$  的引进相当于在控制系统中增加了前馈, 增补了系统零点, 对改善系统动态性能、消除稳态误差有重要作用.  $Q(z^{-1})$  的最简单取法为式(5.4)中的常数.

3) 控制项的权  $R_j(z^{-1}) (j = 1, \dots, N)$ , 尤其是  $R_1(z^{-1})$ , 对闭环稳定性和鲁棒性是重要的. 本文巧妙地设置了  $R_j(z^{-1})$  的形式, 达到了闭环极点配置, 从而保证稳定性、改善鲁棒性的目的. 常数权  $\lambda$  的选取应使  $\mathcal{D}(z^{-1})$  稳定.

以上给出了权因子的选取原则. 特别地, 取权  $P_j(z^{-1}), Q_j(z^{-1})$  和  $R_j(z^{-1})$  为

$$\left. \begin{aligned} P_j(z^{-1}) &= 1 - \alpha^j z^{-j}, \quad (0 < \alpha < 1); \\ Q_j(z^{-1}) &= (1 - \alpha^j), \\ R_j(z^{-1}) &= \sqrt{\lambda}, \quad (\lambda \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

此时, 本文的 WLPC 即为 GPC ( $\alpha$  为 GPC 中的柔化因子), 因此, GPC 是 WLPC 的一个特例.

## 六、仿真研究

通过两种系统的仿真研究(跟踪一个幅值为  $\pm 10$  的方波), 对 WLPC 与 GPC 方法作一比较.

1) 噪声强度较大的系统

仿真系统为

$$y(t) - 1.5y(t-1) + 0.7y(t-2) = u(t-2) + 1.5u(t-3)$$



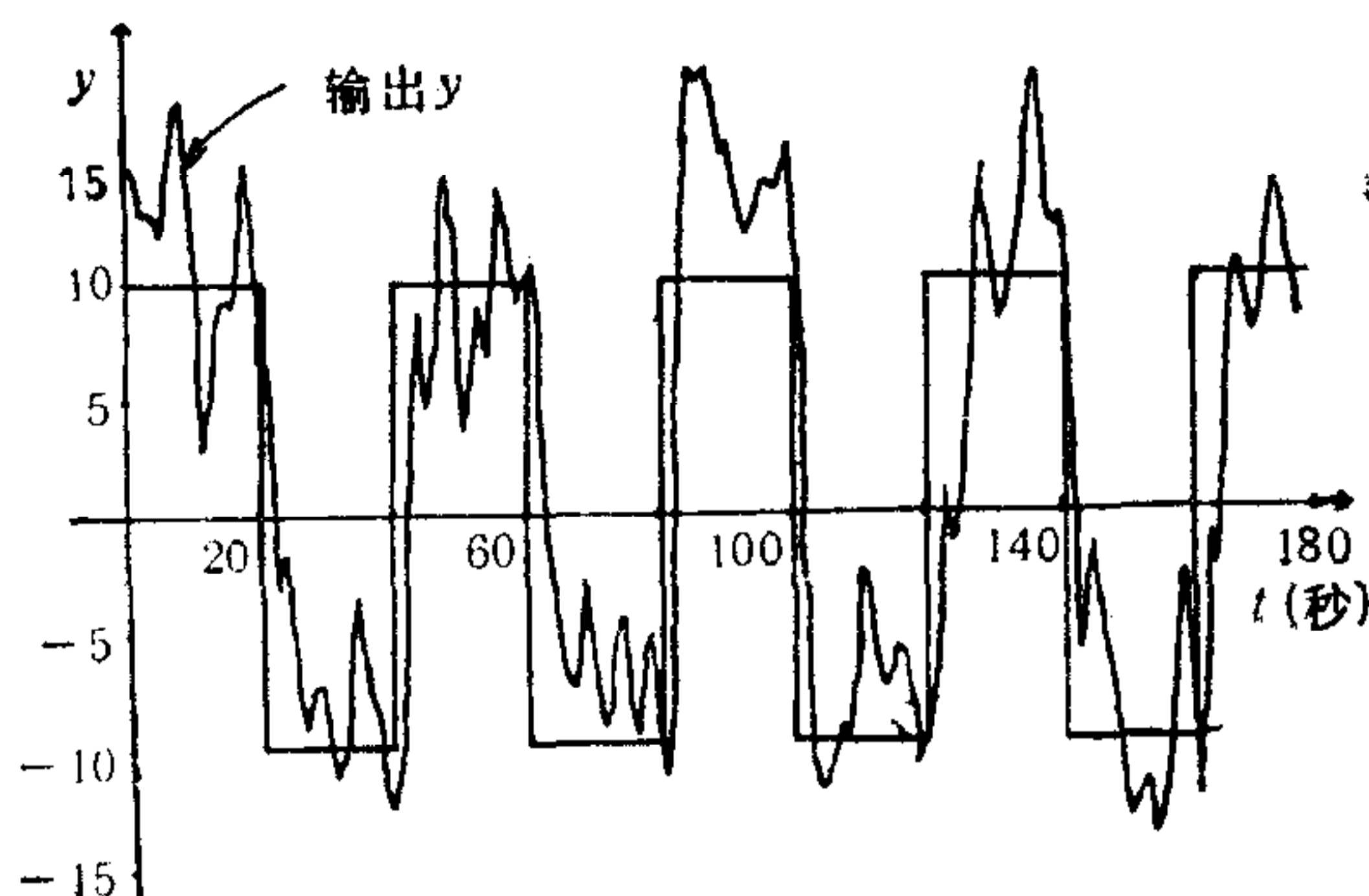


图 1 GPC 对强噪声系统的输出跟踪情况

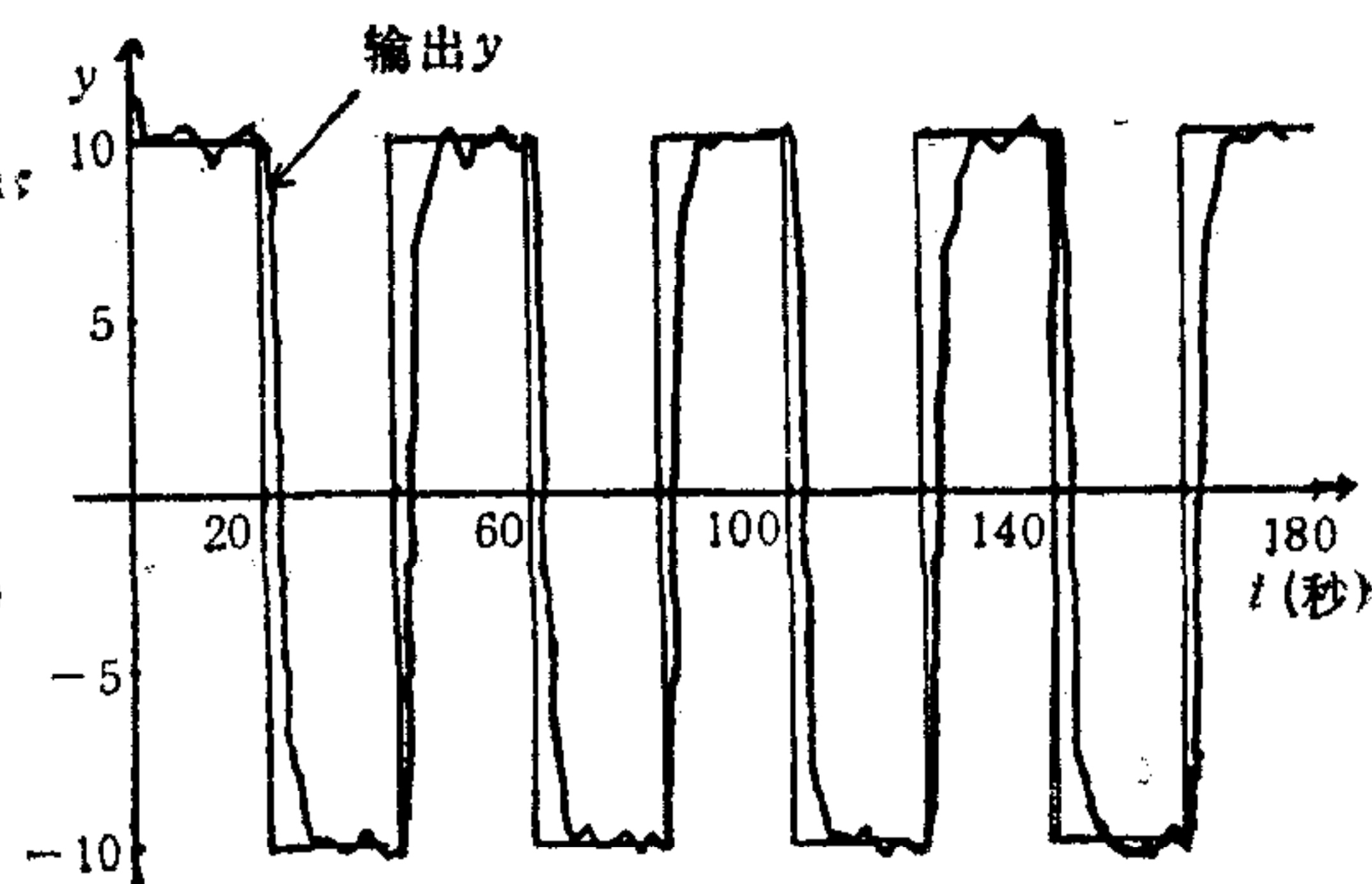


图 2 WLPC 对强噪声系统的输出跟踪情况

$$+ 1.5 \cdot (\xi(t) + 0.2\xi(t-1)). \quad (6.1)$$

采用自校正建模,模型阶次与真系统一致,噪声模型不辨识,假定它与真系统相同.用带遗忘因子的最小二乘法估计参数.用 GPC 算法时,取  $N=4, M=2, \lambda=1, \alpha=0.6$ , 输出跟踪情况如图 1 所示.用本文的 WLPC 算法,取  $N=4, M=1, P(z^{-1})=\frac{1}{2}$ , 闭环极点配置在 0.4. 输出跟踪情况如图 2 所示.

## 2) 降阶建模情形

仿真系统为

$$y(t) - 1.5y(t-1) + 0.7y(t-2) = u(t-2) + 1.5u(t-3) + 0.2 \cdot (\xi(t) + 0.2\xi(t-1)). \quad (6.2)$$

在自校正建模时,采用降阶模型,即  $na=1, nb=2$ , 噪声模型仍与前面一样不辨识:用 GPC 算法时,所取参数与前面相同,输出跟踪情况见图 3.用本文的 WLPC 算法时,仍取  $N=4, M=1, P(z^{-1})=\frac{1}{2}$ , 但闭环极点配置在 0.1, 输出跟踪情况见图 4.

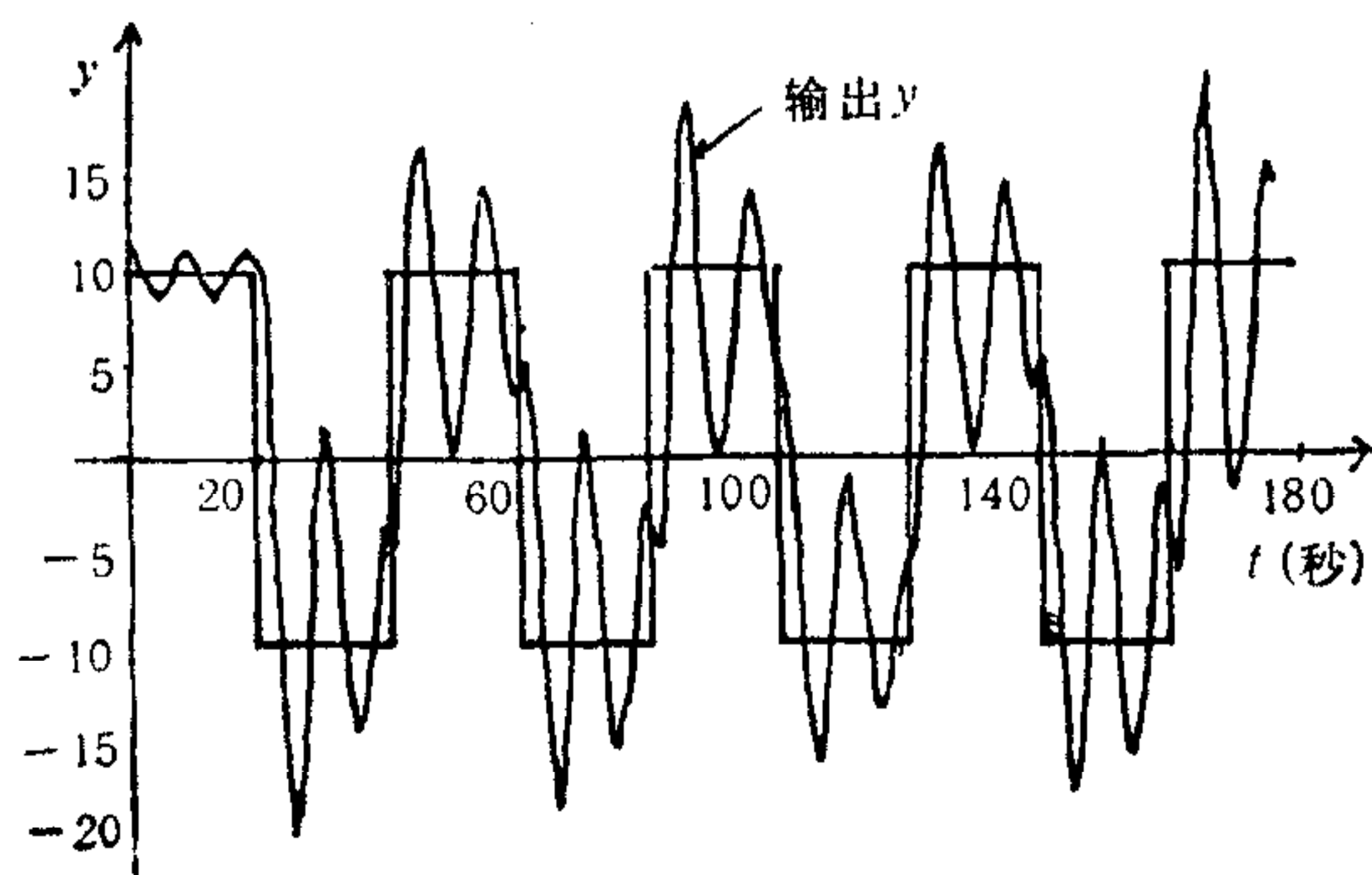


图 3 GPC 在降阶建模时的输出跟踪情况

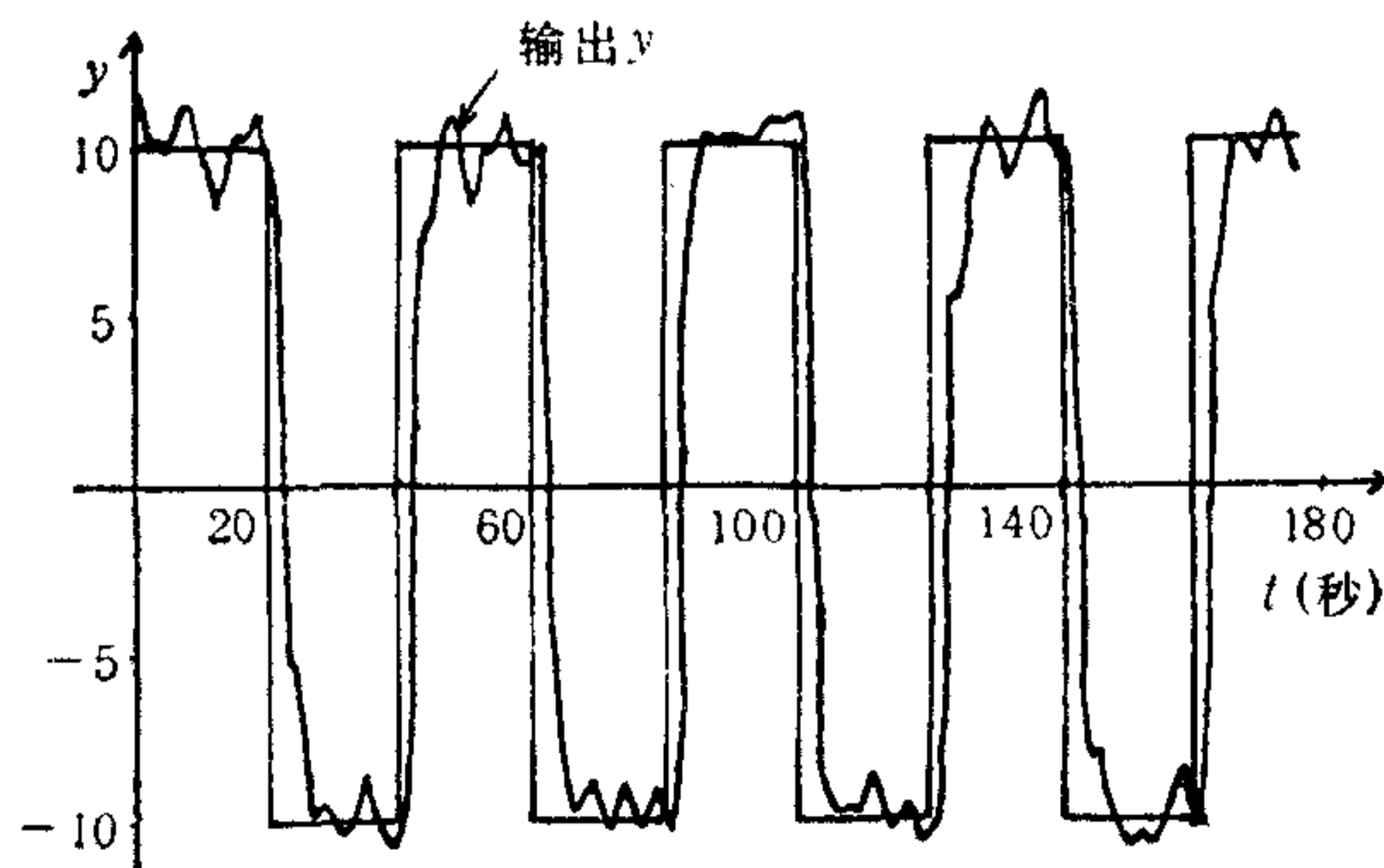


图 4 WLPC 在降阶建模时的输出跟踪情况

以上仿真结果表明, GPC 对随机噪声和结构建模误差的鲁棒性是较差的,而使用 WLPC 算法,只要适当选取权因子,配置好闭环极点,对以上两种情况都有较好的鲁棒性.

## 七、结 论

由于 WLPC 算法引进可调权因子,所以具有以下不同于其它算法的特点:

- 1) WLPC (包括作为 WLPC 的特例的), 具有预测控制的多步预测、滚动优化机理。
- 2) 通过选取权因子, WLPC 可任意配置闭环极点, 从而保证闭环稳定性和鲁棒性。
- 3) WLPC 不改变原系统的零点, 但可按系统动态性能要求、通过选取权因子而增补新的零点。
- 4) 通过选取权因子, WLPC 可消除稳态误差;
- 5) WLPC 算法还可通过选取权因子, 削弱随机噪声的影响, 保证系统的跟踪精度。
- 6) 由于权因子的引进, 使得输出预测水平  $N$  和控制水平  $M$  的选取不像在 GPC 中那样至关重要。在 WLPC 中, 这两个参数的选取是容易的, 只要  $N$  大于系统的时滞(最好达到系统的上升时间, 这样能保证输出预报精度), 一般  $M=1$  即可。这使计算量减小。
- 7) WLPC 除具有预测控制机理外, 还具有许多过去已知的能改进稳定性和鲁棒性的机理, 如前馈、动态反馈、附加零点和配置极点等等。
- 8) WLPC 的鲁棒性和抗干扰性优于 GPC。

作者在完成此文的过程中, 曾得到袁震东教授和席裕庚教授的帮助, 特此致谢。

## 参 考 文 献

- [1] Cutler, C. R., Ramaker, B. L., Dynamic Matrix Control—A Computer Control Algorithm. Proc. JACC, San Francisco, WP5-B, 1980.
- [2] Rouhani, R., Mehra, R. K., Model Algorithmic Control (MAC): Basic Theoretical Properties, *Automatica*, **18** (1982), 401—414.
- [3] Clarke, D. W., Mohtadi, C. and Tuffs, P. S., Generalized Predictive Control —I. The Basic Algorithm, II. Extensions and interpretations, *Automatica*, **23** (1987), 137—160.
- [4] Rogozinski, M. W., Gibbard, M. J., Long-range Predictive Control-Closed-loop System Analysis, *Systems and Control Letters*, **11** (1988), 401—404
- [5] 席裕庚、许晓鸣、张仲俊, 预测控制的研究现状和多层智能预测控制, 控制理论与应用, 1989年第2期。
- [6] 徐立鸿、袁震东, ARMAX 模型的递推广义预测控制算法, 控制理论与应用, 1990年第3期。

# WEIGHTED LONG-RANGE PREDICTIVE CONTROL

XU LIHONG FENG CHUNBO

*(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing)*

## ABSTRACT

A new type of generalized algorithm for weighted long-range predictive control (WLPC) is proposed in this paper. The algorithm is formed by minimizing a cost function which contains some weighting factors. As these weighting factors can be chosen flexibly, the closed-loop poles can be set arbitrarily. The closed-loop stability and robustness against structured and unstructured uncertainties can be assured.

**Key words:** Predictive control; pole placement; closed-loop stability; robustness.