第17卷 第5期 自动化学报 Vol. 17, No. 5
1991年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1991

广义系统在一类输出反馈下的极点配置和系统解耦问题

贾新春 王朝珠
(山西大学数学系，太原) (中国科学院系统科学所，北京)

一、预备知识

设广义系统为

$$\Sigma_0: \begin{aligned} &E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), &(1.a)\\ &y(t) = Cx(t), &(1.b)\end{aligned}$$

这里 $X(t)\in R^n$ 为状态向量，$u(t)\in R^m$ 为控制向量，$y(t)\in R^p$ 为输出向量；E,A,B,C 为适当维数常阵，E 为奇异阵.

引理 1[1]. 广义系统 Σ_0 完全能控$\Leftrightarrow$

$$\mathrm{Rank}[sE-A,B]=n,\ \forall s\in\mathscr{C}, \tag{2}$$

$$\mathrm{Rank}[E,B]=n. \tag{3}$$

由对偶性原理，可得完全能观判据.

任意取定 $\alpha\in\mathscr{R}-\sigma(E,A)$，作系统

$$\Sigma_1: \begin{aligned} &\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}w(t), &(4.a)\\ &\bar{r}(t) = C\bar{x}(t), &(4.b)\end{aligned}$$

这里 $\bar{A}\triangleq(A-\alpha E)^{-1}E$，$\bar{B}\triangleq(A-\alpha E)^{-1}B$；$\bar{x}(t)\in R^n$ 为状态向量，$w(t)\in R^m$ 为控制向量，$\dot{r}(t)\in\mathscr{R}^p$ 为输出向量.

系统 Σ_0 与 Σ_1 有下述关系：

引理 2. 设 $H_0(s),H_1(s)$ 分别为系统 Σ_0,Σ_1 的传递函数阵，则

$$H_1(s)=-\frac{1}{s}H_0\left(\alpha+\frac{1}{s}\right),\ H_0(s)=-\frac{1}{(s-\alpha)}H_1\left(\frac{1}{(s-\alpha)}\right). \tag{5}$$

引理 3. 广义系统 Σ_0 与正常系统 Σ_1 的完全能控性、完全能观性是等价的.

二、广义系统 Σ_0 在一类输出反馈下的极点配置

文献[2]曾讨论了一类状态反馈的极点配置问题，本节将考虑同类的输出反馈极点配置问题.

任意取定 $\alpha\in R-\sigma(E,A)$，考虑反馈律

$$u(t)=K[\alpha y(t)-\dot{y}(t)],\ K\in\mathscr{R}^{m\times p}, \tag{6}$$

称式(6)为正则型比例加微分输出反馈律.

由引理1、引理3得

定理 1. 设广义系统 Σ_0 是完全能控、完全能观，则对复平面上任意给定的有限点集 $\boldsymbol{P}$, 有

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{P})^*_{(\boldsymbol{P})}=\{K:K\in\mathscr{R}^{m\times p},\sigma(E+BKC,A+\alpha BKC)\cap\boldsymbol{P}\neq\varnothing\},\tag{7}$$

或是空集或是 $\mathscr{R}^{m\times p}$ 中的超曲面.

推论 1. 设广义系统 Σ_0 是完全能控、完全能观的,则对几乎所有的 $K\in\mathscr{R}^{m\times p}$, 系统都可经反馈律(6)正常化(即 $E+BKC$ 为非奇异阵).

三、一类输出反馈下的系统解耦 ($m=p$)

广义系统 Σ_0 经正则型比例加微分输出反馈

$$\boldsymbol{u}(t)=K[\alpha\boldsymbol{y}(t)-\dot{\boldsymbol{y}}(t)]+G\boldsymbol{v}(t),\tag{8}$$

闭环系统为

$$\Sigma_0^i:\quad (E+BKC)\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A+\alpha BKC)\boldsymbol{x}(t)+BG\boldsymbol{v}(t),\tag{9.a}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t),\tag{9b}$$

问题是寻找 K,G 使系统(9)为输入-输出解耦的. 对此,有下述结论.

首先,记

$$\begin{gathered}\bar{A}\triangleq(A-\alpha E)^{-1}E,\ \bar{B}\triangleq(A-\alpha E)^{-1}B,\\ C^\tau\triangleq(C_1,C_2,\cdots,C_m),\ C_i^\tau \text{ 为 } C \text{ 的第 } i \text{ 个行向量}\end{gathered}\tag{10.a}$$

$$B^*=\begin{pmatrix}C_1^\tau\bar{A}^{\sigma_1-1}\bar{B}\\ C_2^\tau\bar{A}^{\sigma_2-1}\bar{B}\\ \vdots\\ C_m^\tau\bar{A}^{\sigma_m-1}\bar{B}\end{pmatrix},\quad A_j^*=\begin{pmatrix}C_1^\tau\bar{A}^{\sigma_1+j-1}\\ C_2^\tau\bar{A}^{\sigma_2+j-1}\\ \vdots\\ C_m^\tau\bar{A}^{\sigma_m+j-1}\end{pmatrix},\tag{10.b}$$

$$\sigma_i=\begin{cases}\min\{j:C_i^\tau\bar{A}^{j-1}\bar{B}\neq 0^\tau,j=1,2,\cdots,n\},\\ n,\ C_i^\tau\bar{A}^j\bar{B}=0^\tau,\forall j.\end{cases}\tag{10.c}$$

由文献[3]及引理3得

定理 2. 广义系统 Σ_0 经反馈律(10)可解耦的充要条件为

1) B^* 为非奇异阵;

2) $C(\bar{A}+\bar{B}KC)^j\bar{B}B^{*-1},j=0,1,\cdots,(n-1)$ 为对角阵.

取

$$K=-B^{*-1}[A_{\sigma_1}^*\bar{B}B_1^{*-1}\vdots A_{\sigma_2}^*\bar{B}B_2^{*-1}\vdots\cdots\vdots A_{\sigma_m}^*\bar{B}B_m^{*-1}],\tag{11.a}$$

$$G=B^{*-1},\tag{11.b}$$

这里 B_i^{*-1} 为 B^{*-1} 的第 i 列.

对于广义系统 Σ_0, 既使有 $\alpha_0\in\mathscr{R}-\sigma(E,A)$, 使得 $B^*(\alpha_0)$ 奇异, 也不能排除有 $\alpha_1\neq\alpha_0$, $\alpha_1\in R-\sigma(E,A)$, 使得 $B^*(\alpha_1)$ 为非奇异. 因此,这类系统解耦问题不仅和系统参数 E,A,B,C 有关外,还和 α 的选取有关.

由式(10)知 σ_i,B^* 是 α 的函数,记作 $\sigma_i(\alpha),B^*(\alpha)$. $\sigma_i(\alpha)$ 一般不为常值,因此不能

给出 $B^*(\alpha)$ 的具体式子.

总之,问题集中到找 α,使 $B^*(\alpha)$ 为非奇异. 下面，就 $\sigma_i(\alpha)$ 的取值分两种情况讨论.

1) $\sigma_i(\alpha)\equiv\sigma_i, i=1,2,\cdots,m, \alpha\in\mathscr{R}-\sigma(E,A)$.

此时,$B^*(\alpha)$ 是 $\mathscr{R}-\sigma(E,A)$ 上的实有理函数阵，通过化 $B^*(\alpha)$ 为 Simith-McMillan 标准形,确定使 $B^*(\alpha)$ 非奇异的 α 取值范围.

2) $\sigma_i(\alpha)\not\equiv$ 常值，$\alpha\in\mathscr{R}-\sigma(E,A)$.

由于 $\sigma_i(\alpha)$ 的取值范围为 $1\leqslant\sigma_i(\alpha)\leqslant n$，所以只能从 $\sigma_i(\alpha)$ 入手，寻找 α，使得 $B^*(\alpha)$ 非奇异. 为此,作集合

$$\Omega=\{\boldsymbol{k}=(k_1\cdots k_m):k_i=0,\cdots,n,i=1,\cdots,m\},\tag{12}$$

$$\Omega_1=\{\boldsymbol{k}=(k_1\cdots k_m):\boldsymbol{k}\in\Omega,k_i\geqslant 1\}.\tag{13}$$

在 Ω 中定义关系“$\leqslant$”和“$<$”如下:

对 $\boldsymbol{l},\boldsymbol{k}\in\Omega$，如果 $l_i\leqslant k_i, i=1,2,\cdots,m$. 则称二元有关系“$\leqslant$”,记作 $\boldsymbol{l}\leqslant\boldsymbol{k}$; 如果 $l_i<k_i, i=1,2,\cdots,m$,则称二元有关系“$<$”,记作 $\boldsymbol{l}<\boldsymbol{k}$.

对于 $\boldsymbol{k}\in\Omega$，若 $\boldsymbol{k}\in\Omega_1$，则定义

$$B^{(\alpha)}_{(k_1\cdots k_m)}\triangleq\begin{pmatrix}C_1^\tau\bar{A}^{k_1-1}\bar{B}\\ C_2^\tau\bar{A}^{k_2-1}\bar{B}\\ \vdots\\ C_m^\tau\bar{A}^{k_m-1}\bar{B}\end{pmatrix}\tag{14}$$

若 $k_j=0$，则规定 $B^{(\alpha)}_{(k_1\cdots k_m)}$ 中第 j 行为 O^τ.

对于 $\boldsymbol{k}\in\Omega_1$，定义

$$R_{(k_1\cdots k_m)}=\{\alpha:\alpha\in\mathscr{R}-\sigma(E,A),B^{(\alpha)}_{(l_1\cdots l_m)}=0,\boldsymbol{l}<\boldsymbol{k}\}.\tag{15}$$

根据上述准备,按照 Ω_1 中字典顺序[4],逐一考察 $B^{(\alpha)}_{(k_1\cdots k_m)}$ 在 $R_{(k_1\cdots k_m)}$ 上的非奇性. 按此顺序验证下去,有两种情形.一是有 $(\bar{k}_1\cdots\bar{k}_m)\in\Omega_1$，使得 $R_{(\bar{k}_1\cdots\bar{k}_m)}\neq\phi$，且有 $\alpha_0\in R_{(\bar{k}_1\cdots\bar{k}_m)}$，使 $B^{(\alpha_0)}_{(\bar{k}_1\cdots\bar{k}_m)}$ 非奇异; $\alpha_0, B^*{}_{(\bar{k}_1\cdots\bar{k}_m)}$ 恰为所求,此时 $\sigma_i(\alpha)=\bar{k}_i$. 另一个便是系统解耦问题无解.

注 1. 若 $R_{(k_1\cdots k_m)}=\phi$,则对 $\forall\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{k}\leqslant\boldsymbol{l}$，有 $R_{(l_1\cdots l_m)}=\phi$. 这是非常重要的性质，可减少计算量.

注 2. 上述给出的寻找适当 α(使得 $B^*(\alpha)$ 非奇异)的有效算法具有循环性，容易在微机上实现,并在一定程度上完善了文献[5].

参　考　文　献

[1] Yip, E.L. and Sincovec, F., Solvability, Controllability and Observability of Continuous Descriptor Systems, *IEEE. Trans.*, **AC-26**(1981),702—706.

[2] Mukundan, R. Feedback Control of a Singular Systems——proportional and Derivative of the State, *Int.J.Syst. Sci.*, **14**(1983), 615—632.

[3] Houze, J. W., Necessary and Sufficient Conditions for Decoupling Using Output Feedback, *IEEE Trans.*, **AC-18**(1973), 44—46.

[4] 夏道行等,实变函数与泛函分析,人民教育出版社,(1979),32—34.

[5] Christodoulou, M.A., Decoupling in the Design and Synthesis of Singular Systems, *Automatica*, **22**(1986), 245—249.

POLE ASSIGNMENT AND SYSTEM DECOUPL IN PROBLEMS OF THE SINGULAR SYSTEMS USING A CLASS OF OUTPUT FEEDBACK

JIA XINCHUN
(Shanxi University, Taiyuan)

WANG CHAOZHU
(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

Key words: Singular system; output feedback; pole assignment; decoupling.