第17卷 第6期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 6
1991年11月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1991

延时双线性系统参数估计的方块脉冲函数分析法

胡健生　杨成梧
（华东工学院八系，南京）

摘　　要

本文采用方块脉冲函数的优良运算性质，推导出一种简便有效的分析延时双线性系统参数估计问题的新方法，与其它方法相比，具有运算特别简单的特点.

关键词： 方块脉冲函数，参数估计，双线性系统.

一、引　　言

方块脉冲函数是 Harmuth (1969)引进电子工程的，并由 Gopalsami 和 Deekshatulu (1976) 首次引入控制理论的分析和应用，并取得了许多卓有成效的结果. 由于方块脉冲函数在结构上简单且便于计算的特点，引起了广泛的重视，特别是在最优控制和参数估计方面的结果令人耳目一新. 并有许多课题和新的领域有待去研究和开发. 随着控制系统精确程度的提高，在实际的控制模型中延时的影响变得越来越不可忽视，但在处理方面又比较困难. 如经典的方法有状态空间扩展法等，其算法非常复杂，计算量大. 本文利用方块脉冲函数的各种运算特性，首次提出一种带延时的特殊非线性系统——延时双线性系统参数估计的分析方法，算法简便，便于递推计算，并得到了较为满意的结果，这将有助于方块脉冲函数在实际问题中的应用.

二、方块脉冲函数的有关运算性质

方块脉冲函数[1]是这样一组函数的集合，

$$\{\phi_i(t)\},\ \phi_i(t)=\begin{cases}1 & t\in\left[\dfrac{(i-1)T}{m},\dfrac{iT}{m}\right],\ i=1,2,\cdots m,\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\tag{1}$$

它构成一族定义在时间区间 $t\in[0,T)$ 上的二值正交函数，其正交特性表现为

$$\int_0^T\phi_i(t)\phi_j(t)dt=\begin{cases}T/m & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases}\tag{2}$$

本文于1989年4月25日收到.

利用这种正交特性不难证明，任何在区间 $[0, T)$ 上绝对可积的函数 $f(t)$ 都可按均方误差最小，展开成方块脉冲函数，其近似表达式为

$$f(t) \doteq F^T \Phi(t), \tag{3}$$

$$\begin{cases} F^T = [F_1, F_2, \cdots, F_m], \\ \Phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots, \phi_m(t)], \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{m}{T}\int_0^T f(t)\phi_i(t)\,dt \\ &= \frac{m}{T}\int_{(i-1)T/m}^{iT/m} f(t)\,dt. \end{aligned} \tag{5}$$

可见，F_i 实际上是 $f(t)$ 在第 i 个子区间$[(i-1)T/m, iT/m]$上的积分平均值，所以在用实际测试数据来确定 F_i 时，具有较好的抗干扰特性. 当 m 较大时，由积分中值定理得展开式系数的近似表达式为

$$F_i \doteq \frac{1}{2}\{f[(i-1)T/m] + f[iT/m]\}, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{6}$$

方块脉冲函数具有如下的积分特性[2]：

$$\int_0^t \Phi(t)\,dt \doteq P\Phi(t). \tag{7}$$

式中 P 为 $m \times m$ 方阵，称方块脉冲函数的积分矩阵，其结构为

$$P = \frac{T}{m}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 1 \\ & \frac{1}{2} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

方块脉冲函数的偏移特性是分析延时系统的关键，其关系式为

$$f(t-\tau) \doteq F^T D_k^{(\delta)} \Phi(t). \tag{9}$$

其中 $D_k^{(\delta)}$ 称方块脉冲函数的偏移矩阵. 设偏移量 $\tau = (k+\delta)\dfrac{m}{T}$，$k$ 是正整数，$\delta \in [0,1]$，则根据台劳级数展开分析得

$$D_k^{(\delta)} = D_k + \delta(D_{k+1} - D_k). \tag{10}$$

其中 D_k 称整步偏移算子.

$$D_k = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{m-k} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in R^{m\times m}. \tag{11}$$

式中 I_{m-k} 是 $m-k$ 阶单位矩阵. 分析双线性系统的双线性项，乘法特性是不可缺少的. 方块脉冲函数的乘法特性可由如下式子给出.

$$\Phi(t)\Phi^T(t)F = \hat{F}\Phi(t). \tag{12}$$

式中 $F^T = [F_1 F_2 \cdots F_m]$，$\hat{F} = \mathrm{diag}[F_1 F_2 \cdots F_m]$，这一重要特性揭示了方块脉冲函数矢量和系数矢量相乘且交换位置的重要关系.

三、延时双线性系统的参数估计

在一个动态网络或控制系统中，常含有延时元件和延时环节，现在我们来考虑由以下方程描述的延时双线性系统：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + L\boldsymbol{x}(t-\tau) + B\boldsymbol{u}(t) + C\boldsymbol{u}(t-\tau) + \sum\limits_{i=1}^{r} N_i \boldsymbol{x}(t) u_i(t) \\ \qquad + \sum\limits_{i=1}^{r} M_i \boldsymbol{x}(t-\tau) u_i(t-\tau), \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \\ \boldsymbol{x}(t) = 0, \ t < 0. \end{cases} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$ 状态向量，$\boldsymbol{u}(t) \in R^r$ 输入列向量，$u_i(t)$ 是 $\boldsymbol{u}(t)$ 的第 i 个分量，常量矩阵 A、L、N_i、$M_i \in R^{n \times n}$，B、$C \in R^{n \times r}$ 是系统的系数矩阵，常数 $\tau(0 < \tau < T)$ 是延时常数。

假定系统模型确定，系统状态可测量，这样就可根据输入输出信息来确定参数 A、L、N_i、M_i、B、C 的值。现把各矢量展开成 m 项方块脉冲函数。

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t) \doteq [g_1\ g_2, \cdots, g_m]\Phi(t) = G^T\Phi(t), \\ \boldsymbol{u}(t) \doteq [h_1\ h_2, \cdots, h_m]\Phi(t) = H^T\Phi(t), \\ \boldsymbol{x}(0) \doteq [x_0, x_0, \cdots x_0]\Phi(t) = G_0^T\Phi(t), \\ \boldsymbol{x}(t-\tau) \doteq G^T D_k^{(\delta)}\Phi(t), \\ \boldsymbol{u}(t-\tau) \doteq H^T D_k^{(\delta)}\Phi(t), \\ u_i(t) = [h_{i1}, h_{i2}, \cdots, h_{im}]\Phi(t) = H_i^T\Phi(t) = \Phi^T(t)H_i, \\ u_i(t-\tau) = H_i^T D_k^{(\delta)}\Phi(t) = \Phi^T(t)[D_k^{(\delta)}]^T H_i \triangleq \Phi^T(t)\widetilde{H}_i \triangleq \Phi^T(t)[\tilde{h}_{i1}, \tilde{h}_{i2}, \cdots, \tilde{h}_{im}]. \end{cases} \tag{14}$$

将上述各式代入(13)式并两边从 0 到 t 积分，得

$$G^T\Phi(t) - G_0^T\Phi(t) = \int_0^t \Big[AG^T\Phi(t) + LGD_k^{(\delta)}\Phi(t) + BH^T\Phi(t) + CH^TD_k^{(\delta)}\Phi(t) + \sum_{i=1}^{r} N_iG^T\Phi(t)\Phi^T(t)H_i + \sum_{i=1}^{r} M_iG^TD_k^{(\delta)}\Phi(t)\widetilde{H}_i\Big]dt. \tag{15}$$

简化得

$$G^T - G_0^T = AG^TP + LGD_k^{(\delta)}P + BH^TP + CH^TD_k^{(\delta)}P + \sum_{i=1}^{r} N_iG^T\hat{H}_iP + \sum_{i=1}^{r} M_iG^TD_k^{(\delta)}\overline{H}_iP. \tag{16}$$

式中

$$\begin{cases} \hat{H}_i = \mathrm{diag}[h_{i1}, h_{i2}, \cdots, h_{im}], \\ \overline{H}_i = \mathrm{diag}[\tilde{h}_{i1}, \tilde{h}_{i2}, \cdots, \tilde{h}_{im}]. \end{cases} \tag{17}$$

现引入同构线性变换 Λ，把矩阵向量变成列向量。

$$\Lambda(G^T - G_0^T) = [I_n \otimes (G^TP)^T]\Lambda(A) + [I_n \otimes (G^TD_k^{(\delta)}P)^T]\Lambda(L)$$

$$+ [I_n\otimes(H^TP)^T]\Lambda(B) + [I_n\otimes(H^TD_k^{(\delta)}P)^T]\Lambda(C)$$
$$+ \sum_{i=1}^{r}[I_n\otimes(G^T\hat{H}_iP)^T]\Lambda(N_i) + \sum_{i=1}^{r}[I_n\otimes(G^TD_k^{(\delta)}\bar{H}_iP)^T]\Lambda(M_i). \tag{18}$$

式中⊗表示 Kronecker 乘积符号，I_n 是 $n\times n$ 维单位矩阵。令

$$\begin{cases}\theta^T = [\Lambda^T(A)\Lambda^T(L)\Lambda^T(B)\Lambda^T(C)\Lambda^T(N_1)\cdots\Lambda^T(N_r)\Lambda^T(M_1)\cdots\Lambda^T(M_r)],\\ R = \Lambda(G^T - G_0^T),\\ S = [I_n\otimes(G^TP)^T,\ I_n\otimes(G^TD_k^{(\delta)}P)^T,\ I_n\otimes(H^TP)^T,\ I_n\otimes(H^TD_k^{(\delta)}P)^T,\\ \quad I_n\otimes(G^T\hat{H}_1P)^T,\cdots,I_n\otimes(G^T\hat{H}_1P)^T,I_n\otimes(G^TD_k^{(\delta)}\bar{H}_1P)^T\cdots\\ \quad I_n\otimes(G^TD_k^{(\delta)}\bar{H}_rP)^T].\end{cases} \tag{19}$$

则(18)式可简写成

$$S\Theta = R. \tag{20}$$

因此只要展开项数足够大，且输入信号至少有 $(n + nr + r)$ 个，参数矩阵的最小二乘估计值为

$$\hat{\Theta} = (\bar{\boldsymbol{S}}^T\bar{\boldsymbol{S}})^{-1}\bar{\boldsymbol{S}}^T\bar{\boldsymbol{R}}. \tag{21}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} S_1\\ S_2\\ \vdots\\ S_{n+nr+r}\\ \vdots\end{bmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_{n+nr+r}\\ \vdots\end{bmatrix}. \tag{22}$$

这里 $\{S_i,R_i\}$ 是由第 i 组输入信号产生的。为了便于实用，现进一步给出上式的递推算法。令　利用 $d(d\geqslant n + nr + r)$ 次观测数据所得的参数最小二乘估计值为

$$\hat{\Theta}_d = (\bar{\boldsymbol{S}}_d^T\bar{\boldsymbol{S}}_d)^{-1}\bar{\boldsymbol{S}}_d^T\bar{\boldsymbol{R}}_d. \tag{23}$$

式中各符号的下标 d 表示该符号代表 d 次观测所构成或得到的向量或矩阵。当在 d 次观测的基础上，又进行了一次新的观测，令

$$\bar{\boldsymbol{S}}_{d+1} = \left[\begin{array}{c}\bar{\boldsymbol{S}}_d\\ \hdashline S_{d+1}\end{array}\right],\qquad \bar{\boldsymbol{R}}_{d+1} = \left[\begin{array}{c}\bar{\boldsymbol{R}}_d\\ \hdashline R_{d+1}\end{array}\right]. \tag{24}$$

$$\boldsymbol{E}_d = (\bar{\boldsymbol{S}}_d^T\bar{\boldsymbol{S}}_d)^{-1}, \tag{25}$$

则

$$\boldsymbol{E}_{d+1} = (\bar{\boldsymbol{S}}_{d+1}^T\bar{\boldsymbol{S}}_{d+1})^{-1} = (E_d^{-1} + S_{d+1}S_{d+1}^T)^{-1}, \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_{d+1} &= \boldsymbol{E}_{d+1}\bar{\boldsymbol{S}}_{d+1}^T\bar{\boldsymbol{R}}_{d+1} = \boldsymbol{E}_{d+1}[\bar{\boldsymbol{S}}_d^T\bar{\boldsymbol{R}}_d + \boldsymbol{S}_{d+1}^T\boldsymbol{R}_{d+1}]\\ &= \boldsymbol{E}_{d+1}[\boldsymbol{E}_d^{-1}\hat{\Theta}_d + S_{d+1}^TR_{d+1}]\\ &= \boldsymbol{E}_{d+1}[(\boldsymbol{E}_{d+1}^{-1} - S_{d+1}^TS_{d+1})\hat{\Theta}_d + S_{d+1}^TR_{d+1}\\ &= \hat{\Theta}_d + \boldsymbol{E}_{d+1}S_{d+1}^T(R_{d+1} - S_{d+1}\hat{\Theta}_d).\end{aligned} \tag{27}$$

利用(27)式，我们就可方便地对延时双线性系统进递推参数估计。

四、举　例

考虑以下方程所描述的延时双线性系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Lx\left(t - \frac{1}{3}\right)u(t), \\ x(t) = 0,\ t \leqslant 0. \end{cases}$$

取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $m = 4$, 用 20 组测试数据，利用(21)式和(27)进行参数估计得

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}^T &= (\hat{a}_{11}\ \hat{a}_{12}\ \hat{a}_{21}\ \hat{a}_{22}\ \hat{l}_{11}\ \hat{l}_{12}\ \hat{l}_{21}\ \hat{l}_{22}] \\ &= [0.9831,\ -0.0013,\ 0.9851,\ 1.9783,\ 0.0021,\ 0.9771,\ 1.9836,\ 0.9797]. \end{aligned}$$

用 $m = 8$, 取 20 组测试数据进行估计得

$$\hat{\Theta}^T = [0.9991,\ -0.0011,\ 0.9891,\ 1.9777,\ 0.0019,\ 0.9974,\ 1.9898,\ 0.9934].$$

五、结　论

本文借助于方块脉冲函数的独特运算特性，成功地分析了延时双线性系统的参数估计，由于方块脉冲函数的运算矩阵与 Walsh 维数，Fourier 级数相比特别简单，导致了在计算方面省时简便的特殊优点，该方法特别适用于一般工程的模型估算。本文提出的延时双线性系统参数估计方法，是一类延时非线性系统参数估计的简便有效的近似方法。

参 考 文 献

[1] Sannuti, P., Analysis and Synthesis of Dynamic Systems Via Block-Pulse Functions, *Proc. IEE*, **124** (1977), **No.6**, 569.

[2] 曾广达，方波脉冲函数及其应用——一类新型的简易近似计算法，华中工学院出版社(1986 年 2 月).

PARAMETER ESTIMATION OF TIME-DELAY BILINEAR SYSTEMS VIA BLOCK-PULSE FUNCTIONS

Hu Jiansheng　　Yang Chengwu

(East China Institute of Technology)

Abstract

A new method for rapidly and effectively solving parameter estimation of time-delay bilinear systems is developed by using the elegant operational properties of the block-pulse functions. Compared with other functions' approaches, this method is much simpler.

Key words: Block-pulse functions; parameter estimation; bilinear systems.