第 17 卷 第 6 期
1991 年 11 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 17, No. 6
Nov., 1991

方块脉冲函数用于求解线性延时系统二次型的最优控制

王晓东　邢继祥　王兴涛
（哈尔滨工业大学数学系）

摘　　要

本文将线性延时系统转化为线性互联非时滞大系统，采用方块脉冲函数不仅得到了最优控制的分段恒定解答的显式递阶递推公式，而且给出了在线控制的方法．该算法对小延时和大延时系统均有效，特别易于大延时系统求解．

关键词：方块脉冲函数，延时系统，在线控制．

一、前　　言

文献[4]解决了非线性系统最优反馈控制问题，但不能直接运用于延时系统的最优控制，文献[3]解决的也只是开环的最优控制，而且大系统的控制算法要求计算机容量大，且不易获得反馈控制．本文将线性延时系统最优控制问题转化为线性互联非时滞大系统最优控制，采用方块脉冲函数方法，得到了最优控制规律的分段恒定解答的显式递阶递推公式，并且给出了一种在线控制的方法．算例表明算法简便且精度较高．

二、应用方块脉冲函数推导算法

设含有延时环节的线性定常系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t)+C\boldsymbol{x}(t-\tau)+D\boldsymbol{u}(t-\tau),\\ \boldsymbol{x}(t)=\hat{\boldsymbol{x}}(t),\ -\tau\leqslant t\leqslant 0,\\ \boldsymbol{u}(t)=\hat{\boldsymbol{u}}(t),\ -\tau\leqslant t\leqslant 0.\end{cases}\tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}(t)$ 为 r 维控制向量，$\tau\geqslant 0$ 为状态和控制的延时量，二次型性能指标为

$$J=\int_0^T\frac{1}{2}[\|\boldsymbol{x}(t)\|_Q^2+\|\boldsymbol{u}(t)\|_R^2]dt.$$

其中 R 和 Q 分别为正定和半正定矩阵．设 $\tau=l\cdot t_f$，$t_f=\dfrac{T}{N}$，l 和 N 为正整数，把 [0,

本文于 1990 年 3 月 30 日收到．

T）分为N个区段．进而可把原问题化为如下线性互联非时滞大系统的最优控制问题：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_i = A\boldsymbol{x}_i + B\boldsymbol{u}_i + C\boldsymbol{z}_i + D\boldsymbol{y}_i, \ i = 1, 2, \cdots, N, \\ \boldsymbol{z}_i = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_i, & i = 1, 2, \cdots, l, \\ \boldsymbol{x}_{i-l}, & i = l+1, \cdots, N, \end{cases} & 0 \leqslant t \leqslant t_f, \\ \boldsymbol{y}_i = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{u}}_i, & i = 1, 2, \cdots, l, \\ \boldsymbol{u}_{i-l}, & i = l+1, \cdots, N, \end{cases} & 0 \leqslant t \leqslant t_f. \end{cases} \tag{2}$$

二次型性能指标为

$$J = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{t_f} \frac{1}{2} [\|\boldsymbol{x}_i\|_Q^2 + \|\boldsymbol{u}_i\|_R^2] dt.$$

整个系统的哈密尔顿函数为

$$\begin{aligned} H(\cdot) = & \sum_{i=1}^{l} \int_0^{t_f} \Big[\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}_i\|_Q^2 + \|\boldsymbol{u}_i\|_R^2) + \boldsymbol{\lambda}_i^\tau(\boldsymbol{z}_i - \hat{\boldsymbol{x}}_i) + \boldsymbol{\alpha}_i^\tau(\boldsymbol{y}_i - \hat{\boldsymbol{u}}_i) \\ & + \boldsymbol{p}_i^\tau(-\dot{\boldsymbol{x}}_i + A\boldsymbol{x}_i + B\boldsymbol{u}_i + C\boldsymbol{z}_i + D\boldsymbol{y}_i)\Big] dt + \\ & \sum_{i=l+1}^{N} \int_0^{t_f} \Big[\frac{1}{2} \cdot (\|\boldsymbol{x}_i\|_Q^2 + \|\boldsymbol{u}_i\|_R^2) + \boldsymbol{\lambda}_i^\tau(\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{x}_{i-l}) + \boldsymbol{\alpha}_i^\tau(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{u}_{i-l}) \\ & + \boldsymbol{p}_i^\tau(-\dot{\boldsymbol{x}}_i + A\boldsymbol{x}_i + B\boldsymbol{u}_i + C\boldsymbol{z}_i + D\boldsymbol{y}_i)\Big] dt. \end{aligned} \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{p}_i$ 是 n 维伴随向量，$\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\lambda}_i$ 是 n 维拉格朗日乘子向量．当给定 $\boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{\lambda}_i^*$, $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{z}_i^*$, $\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_i^*$, $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i^*$ 的情况下，式(3)所表示的H是加性可分的．即

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \sum_{i=1}^{N} H_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{z}_i^*, \boldsymbol{y}_i^*, \boldsymbol{\alpha}_i^*, \boldsymbol{\lambda}_i^*).$$

式中

$$\begin{aligned} H_i(\cdot) = & \int_0^{t_f} \Big[\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}_i\|_Q^2 + \|\boldsymbol{u}_i\|_R^2) + \boldsymbol{\lambda}_i^{*\tau}(\boldsymbol{z}_i^* - \hat{\boldsymbol{x}}_i) - \lambda_{l+1}^{*\tau}(\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\alpha}_i^{*\tau}(\boldsymbol{y}_i^* - \hat{\boldsymbol{u}}_i) \\ & - \boldsymbol{\alpha}_{l+i}^{*\tau}\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{p}_i^\tau(-\dot{\boldsymbol{x}}_i + A\boldsymbol{x}_i + B\boldsymbol{u}_i + C\boldsymbol{z}_i + D\boldsymbol{y}_i)\Big] dt, \quad i = 1, 2, \cdots l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_i(\cdot) = & \int_0^{t_f} \Big[\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}_i\|_Q^2 + \|\boldsymbol{u}_i\|_R^2) + \boldsymbol{\lambda}_i^{*\tau}\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{\lambda}_{l+i}^{*}\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\alpha}_i^{*\tau}\boldsymbol{y}_i^* - \boldsymbol{\alpha}_{l+i}^{*\tau}\boldsymbol{u}_i \\ & + \boldsymbol{p}_i^\tau(-\dot{\boldsymbol{x}}_i + A\boldsymbol{x}_i + B\boldsymbol{u}_i + C\boldsymbol{z}_i + D\boldsymbol{y}_i)\Big] dt, \quad i = l+1, \cdots N. \end{aligned}$$

其中当 $l + i > N$时，$\boldsymbol{\lambda}_{l+i}^* = 0$，$\boldsymbol{\alpha}_{l+i}^* = 0$.

这意味着，系统互联的最优化问题可以通过N个独立的最小化求得．由必要条件可得

$$\boldsymbol{\lambda}_i^* = -C^\tau \boldsymbol{p}_i, \ \boldsymbol{\alpha}_i^* = -D^\tau \boldsymbol{p}_i, \ i = 1, 2, \cdots, N. \tag{4}$$

$$\boldsymbol{z}_i^* = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_i, & i = 1, 2, \cdots, l, \\ \boldsymbol{x}_{i-l}, & i = l+1, \cdots, N, \end{cases} \quad \boldsymbol{y}_i^* = \begin{cases} \hat{\boldsymbol{u}}_i, & i = 1, 2, \cdots, l, \\ \boldsymbol{u}_{i-l}, & i = l+1, \cdots, N. \end{cases} \tag{5}$$

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i + Cz_i^* + Dy_i^*,\ x_1(0) = \hat{x}(0),\ x_i(0) = x_{i-1}(t_f). \tag{6}$$

$$\dot{p}_i = -Qx_i - A^\tau p_i + \lambda_{l+i}^*,\ p_i(t_f) = p_{i+1}(0),\ p_{N+1}(0) = 0. \tag{7}$$

$$u_i = -R^{-1}B^\tau p_i + R^{-1}\alpha_{l+i}^*. \tag{8}$$

设 $p_i = K_i x_i + s_i$，两边求导并由(6)，(7)式可得

$$\dot{K}_i + K_iA - K_iBR^{-1}B^\tau K_i + Q + A^\tau K_i = 0,\ K_i(t_f) = 0. \tag{9}$$

$$s_i = A|_i s_i + b|_i,\ s_i(t_f) = s_{i+1}(0),\ s_{N+1} = 0. \tag{10}$$

其中 $A|_i = K_iBR^{-1}B^\tau - A^\tau$，$b|_i = \lambda_{l+i}^* - K_iBR^{-1}\alpha_{l+i}^* - K_iCz_i^* - K_iDy_i^*$.

为了解 Riccati 方程(9)[4]，令 $K_iW_i = -V_i$，W_i 可逆，(9)式化为

$$\begin{bmatrix}\dot{W}_i\\ \dot{V}_i\end{bmatrix} = F\begin{bmatrix}W_i\\ V_i\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}W_i(t_f)\\ V_i(t_f)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I_n\\ 0\end{bmatrix}. \tag{11}$$

其中

$$F = \begin{bmatrix}A, & BR^{-1}B^\tau\\ Q, & -A^\tau\end{bmatrix}.$$

对(11)式从 t_f 到 t 积分，并展成方块脉冲函数得

$$\begin{bmatrix}\bar{W}_k^i\\ \bar{V}_k^i\end{bmatrix} = \begin{cases}\left[I_{2n} + \dfrac{h}{2}F\right]^{-1}\begin{bmatrix}I_n\\ 0\end{bmatrix}, & k = m,\\ \left[I_{2n} + \dfrac{h}{2}F\right]^{-1}\left\{\begin{bmatrix}I_n\\ 0\end{bmatrix} - hF\sum\limits_{j=k+1}^{m}\begin{bmatrix}\bar{W}_j^i\\ \bar{V}_j^i\end{bmatrix}\right\}, & k = m-1,\cdots,1\end{cases} \tag{12}$$

由(12)式解得 $\bar{W}_k^i$，$\bar{V}_k^i$，从而得 $\bar{K}_k^i = -\bar{V}_k^i(\bar{W}_k^i)^{-1}$. 对(10)式从 t_f 到 t 积分，并展成方块脉冲函数得

$$\bar{s}_k^i = \begin{cases}\left[I_n + \dfrac{h}{2}\bar{A}|_m^i\right]^{-1}\left\{s_i(t_f) - \dfrac{h}{2}\bar{b}|_m^i,\right\} & k = m,\\ \left[I_n + \dfrac{h}{2}\bar{A}|_k^i\right]^{-1}\left\{s_i(t_f) - h\sum\limits_{j=k+1}^{m}\bar{A}|_j^i - \dfrac{h}{2}\bar{b}|_k^i\right.\\ \qquad\left. - h\sum\limits_{j=k+1}^{m}\bar{b}|_j^i\right\}, & k = m-1,\cdots,1.\end{cases} \tag{13}$$

把 $p_i = K_ix_i + s_i$ 和(8)式代入(6)式得

$$\dot{x}_i = A2_ix_i + b2_i. \tag{14}$$

其中 $A2_i = A - BR^{-1}B^\tau K_i$，$b2_i = -BR^{-1}B^\tau s_i + BR^{-1}\alpha_{l+i}^* + Cz_i^* + Dy_i^*$. 把(14)式从 0 到 t 积分，并展成方块脉冲函数得

$$\bar{x}_k^i = \begin{cases}\left[I_n - \dfrac{h}{2}\bar{A}2_1^i\right]^{-1}\left\{x_i(0) + \dfrac{h}{2}\bar{b}2_1^i\right\}, & k = 1, \quad (15)\\ \left[I_n - \dfrac{h}{2}\bar{A}2_k^i\right]^{-1}\left\{x_i(0) + h\sum\limits_{j=1}^{k-1}\bar{A}2_j^i\bar{x}_j^i + \dfrac{h}{2}\bar{b}2_k^i + h\sum\limits_{j=1}^{k-1}\bar{b}2_j^i\right\}, & k = 2,\cdots,m.\end{cases}$$

由 $p_i = K_ix_i + s_i$ 和(8)式得

$$\bar{p}_k^i = \bar{K}_k^i\bar{x}_k^i + \bar{S}_k^i,\ \bar{u}_k^i = -R^{-1}B^\tau\bar{p}_k^i + R^{-1}\bar{\alpha}_k^{*l+i}. \tag{16}$$

由(4)和(5)式得

$$\bar{\lambda}_k^{*i} = -C^\tau \bar{p}_k^i,\ \bar{a}_k^{*i} = -D^\tau \bar{p}_k^i, \tag{17}$$

$$\bar{z}_k^{*i} = \begin{cases} \hat{\bar{x}}_k^i, & i = 1, 2, \cdots l, \\ \bar{x}_k^{i-l}, & i = l+1, \cdots, N, \end{cases} \quad \bar{y}_k^{*i} = \begin{cases} \hat{\bar{u}}_k^i, & i = 1, 2, \cdots, l, \\ \bar{u}_k^{i-l}, & i = l+1, \cdots, N. \end{cases} \tag{18}$$

归纳其算法为

第一步．由(12)式求出 Riccatti 方程(9)的解 $\bar{K}_k^i(i = N, \cdots, 1, k = m, \cdots, 1)$，并贮存起来．给定 $\boldsymbol{\lambda}_i^*, \boldsymbol{z}_i^*, \boldsymbol{a}_i^*, \boldsymbol{y}_i^*$ 的初值．

第二步．由(13)，(15)，(16)式求出 $\bar{s}_k^i(i = N, \cdots, 1, k = m, \cdots, 1)\bar{x}_k^i, \bar{p}_k^i, \bar{u}_k^i(i = 1, \cdots, N, k = 1, \cdots, m)$，并贮存起来．

第三步．用上一步的结果和(17)，(18)式求出修正的初值：$\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{y}^*$．

第四步．检查迭代误差是否足够小，否则返回到第二步．

三、反 馈 控 制

由 $\boldsymbol{p}_i = K_i \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{s}_i$ 和(8)式得

$$\boldsymbol{u}_i = -R^{-1}B^\tau K_i \boldsymbol{x}_i - R^{-1}B^\tau \boldsymbol{s}_i + R^{-1}\boldsymbol{a}_{l+i}^*. \tag{19}$$

当 J 达到最优值时，$\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{y}^*$ 的值被用来从(19)式求出最优反馈控制 $\boldsymbol{u}$．但这是从系统的稳恒条件出发的，如果系统显得太敏感，则需要在线校正．下面给出在线校正的公式．

当 $2l \leqslant N$ 时，由(4)，(10)式得

$$\dot{\boldsymbol{s}}_i = \begin{cases} A|_i \boldsymbol{s}_i + F|_i \boldsymbol{x}_{l+i} + D_i \boldsymbol{s}_{l+i} - K_i C \boldsymbol{x}_{i-l} - K_i D \boldsymbol{u}_{i-l}, & i = l+1, \cdots, N, \\ A|_i \boldsymbol{s}_i + F|_i \boldsymbol{x}_{l+i} + D_i \boldsymbol{s}_{l+i} - K_i C \hat{\boldsymbol{x}}_i - K_i D \hat{\boldsymbol{u}}_i, & i = 1, 2, \cdots, l. \end{cases} \tag{20}$$

其中 $F|_i = 0,\ D_i = 0(i = N - l + 1, \cdots, N)$．

$$\begin{cases} F|_i = -C^\tau K_{l+i} + K_i B R^{-1} D^\tau K_{l+i}, \\ D_i = -C^\tau + K_i B R^{-1} D^\tau, \end{cases} \quad i = 1, \cdots, N-l.$$

当 $2l > N$ 时，方程(10)同样可化为上述形式．进一步(20)式化为

$$\dot{\boldsymbol{s}} = H\boldsymbol{s} + \boldsymbol{q}. \tag{21}$$

初值 $\boldsymbol{s}(t_f)$ 可取上面获得最优值时得到的 $\boldsymbol{s}$ 值．其中(21)式中的H和 $\boldsymbol{q}$ 为

$$H = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} A1_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A1_l \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} A3_{l+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A3_N \end{matrix} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{N-l} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \begin{matrix} B3_{l+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B3_{N-l} \end{matrix} & 0 \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} F2_1 \\ \vdots \\ F2_l \\ F3 \\ \vdots \\ F3_N \end{bmatrix}.$$

其中 $A3_i = A|_i + K_iDR^{-1}D$, $B3_i = K_iDR^{-1}B^\tau$,

$$F_i = F|_i x_{l+i} + (K_iDR^{-1}B^\tau K_i - K_iC)x_{i-l},\quad F2_i = F|_i x_{l+i} - K_iC\hat{x}_i - K_iD\hat{u}_i.$$

对(21)式从 t_f 到 t 积分，并展成方块脉冲函数得

$$\bar{s}_k = \left[I - \frac{h}{2}\bar{H}_k\right]^{-1}\left\{s(t_f) - h\sum_{j=k+1}^{m}\bar{H}_j\bar{s}_j + \frac{h}{2}\bar{q}_k + h\sum_{j=k+1}^{m}\bar{q}_j\right\}. \tag{22}$$

方法的总结：求(19)式最优反馈控制 u 化为求(21)式的 s. 而方程(21)式中的H与 x 的初值无关，所以可离线计算. 公式(22)的在线和离线计算均比较简单.

四、算　例

用本文的方法求解文献[3]中的例子，求得的最优轨线和最优控制、性能指标 $J = 1.651502$，和文献[3]的结果相差很小.

参　考　文　献

[1] Jamshidi, M., Large-scale Systems Modeling and Control, North-Holland, 1983.

[2] Singh, M, G. and Titli, A., Systems: Decomposition, Optimisation and Control, Peramon Press, 1978.

[3] 陈明武，童调生，一种采用方块脉冲函数求解延时最优控制问题的算法，自动化学报，**14**(1988)，458—462.

[4] 邢继祥、王兴涛，方块脉冲函数用于非线性时变系统的分析以及最优控制的综合，自动化学报，**11**(1985)，175—183.

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF LINEAR QUADRATIC TIME-DELAY SYSTEMS VIA BLOCK-PULSE FUNCTIONS

Wang Xiaodong,　Xing Jixiang,　Wang Xingtao

(Dept. of Mathematics Harbin Institute of Technology, Harbin)

Abstract

In this paper, linear time delay systems are transformed into large-scale linear interconnected systems without delay. Using the block-pulse function we not only derive the explicit hierarchical and recursive algorithm with piecewise constant solutions of optimal oontrol law but also aquire the on-line control. The algorithm is effective to both small and large delay systems and especialy appropriate for large delay systems.

Key words: Block-pulse functions; time delay systems; on-line control.