第 17 卷 第 6 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 6
1991 年 11 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1991

广义分散控制系统的镇定

初学导　刘万泉
(曲阜师范大学自动化研究所，山东)

摘　　要

本文讨论了广义分散控制系统的镇定性问题，并利用固定模的概念，给出了可镇定的充要条件. 该文是正常分散控制系统可镇定的一个推广.

关键词: 分散控制，广义系统，大系统.

一、引　　言

在一些实际系统中，有些系统除具有广义性的特点外，由于信息分散的原因，在控制上也具有分散性的特点. 因此，广义分散控制系统的研究，不仅具有理论上的意义，而且也具有实际价值.

关于广义分散控制系统的研究，已经取得了一些很漂亮的结果[1-4]. 本文主要在文献[2]的基础上，讨论该系统可镇定的条件.

考虑下列系统:

$$\Sigma\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^{N} B_j\boldsymbol{u}_j, & (1.1a) \\ \boldsymbol{y}_j = C_j\boldsymbol{x}, \quad j = 1, 2, \cdots N. & (1.1b) \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{u}_j \in \boldsymbol{R}^{m_j}$, $\boldsymbol{y}_j \in \boldsymbol{R}^{r_j}$. $j = 1, 2, \cdots N$, 分别表示该系统的状态矢量，第 j 个控制站的控制矢量与量测输出矢量. $E \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, $B_j \in \boldsymbol{R}^{n\times m_j}$, $C_j \in \boldsymbol{R}^{r_j\times n}$.

我们要考虑的问题是: 在什么条件下，存在形如

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}}_i = S_i\boldsymbol{z}_i + R_i\boldsymbol{y}_i, & (1.2a) \\ \boldsymbol{u}_i = Q_i\boldsymbol{z}_i + K_i\boldsymbol{y}_i + \boldsymbol{v}_i, \quad i = 1, 2, \cdots N & (1.2b) \end{cases}$$

的动态补偿器，使得闭环系统是稳定的.

为此，引入下列符号:

$$B \triangleq [B_1, B_2, \cdots, B_N], \quad C \triangleq [\boldsymbol{C}_1^T, \boldsymbol{C}_2^T, \cdots, \boldsymbol{C}_N^T]^T,$$

$$\boldsymbol{z}(t) \triangleq [\boldsymbol{z}_1^T(t), \boldsymbol{z}_2^T(t), \cdots, \boldsymbol{z}_N^T(t)]^T, \quad \boldsymbol{y}(t) \triangleq [\boldsymbol{y}_1^T(t), \boldsymbol{y}_2^T(t), \cdots, \boldsymbol{y}_N^T(t)]^T,$$

$$\boldsymbol{u}(t) \triangleq [\boldsymbol{u}_1^T(t), \boldsymbol{u}_2^T(t), \cdots, \boldsymbol{u}_N^T(t)]^T, \quad \boldsymbol{v}(t) \triangleq [\boldsymbol{v}_1^T(t), \boldsymbol{v}_2^T(t), \cdots, \boldsymbol{v}_N^T(t)]^T,$$

本文于 1990 年 9 月 25 日收到.

1) 本文曾在 1989 年全国控制理论与应用学术交流会(西安)上宣读.

$$K \triangleq \text{blockdiag}[K_1, K_2, \cdots, K_N], \quad R \triangleq \text{blockdiag}[R_1, R_2, \cdots, R_N],$$
$$Q \triangleq \text{blockdiag}[Q_1, Q_2, \cdots, Q_N], \quad S \triangleq \text{blockdiag}[S_1, S_2, \cdots, S_N].$$

那么,(1.1)式与(1.2)式的闭环系统为

$$\begin{pmatrix} E\dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BKC & BQ \\ RC & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} v(t). \tag{1.3}$$

(1.3)式是稳定的,即

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A + BKC & BQ \\ RC & S \end{pmatrix}\right) \subset C^-. \tag{1.4}$$

其中 $a(P, H) \triangleq \{\lambda \mid |\lambda P - H| = 0\}$, C^- 表示左半复平面.

二、预 备 知 识

为了寻找满足(1.4)式的 K, R, Q 和 S,需做以下的准备工作.

记.

$$\vec{K} \triangleq \{K \mid K = \text{blockdiag}\{K_1, K_2, \cdots K_N]\},$$
$$\vec{Q} \triangleq \{Q \mid Q = \text{blockdiag}[Q_1, Q_2, \cdots Q_N]\},$$
$$\vec{R} \triangleq \{R \mid R = \text{blockdiag}[R_1, R_2, \cdots R_N]\},$$
$$\vec{S} \triangleq \{S \mid S = \text{blockdiag}[S_1, S_2, \cdots S_N]\}.$$

定义 2.1. 系统(1.1)在动态反馈(1.2)式作用下,其不变多项式为

$$\phi_\Sigma = \underset{\substack{K\in\vec{K} \quad R\in\vec{R} \\ Q\in\vec{Q} \quad S\in\vec{S}}}{\text{g.c.d.det}} \begin{pmatrix} \lambda E - A - BKC & -BQ \\ -RC & \lambda I - S \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

其中, g.c.d. 表示其最大公因式.

定义 2.2. 系统(1.1)在动态反馈(1.2)式作用下,其固定多项式为

$$\varphi_\Sigma \triangleq \underset{K\in\vec{K}}{\text{g.c.d.det}}(\lambda E - A - BKC). \tag{2.2}$$

定理 2.1.

$$\phi_\Sigma(\lambda) = \varphi_\Sigma(\lambda). \tag{2.3}$$

证明. i) 当 $E = I$ 时,文[5]中已证.

ii) 当 E 不是单位阵,但 E 为满秩矩阵时,存在可逆矩阵 P^* 与 Q^*, 使得 $P^*EQ^* = I$. 因此

$$\begin{aligned}
\phi_\Sigma(\lambda) &= \underset{\substack{K\in\vec{K} \quad Q\in\vec{Q} \\ R\in\vec{R} \quad S\in\vec{S}}}{\text{g.c.d.det}} \begin{pmatrix} \lambda E - A - BKC & -BQ \\ -RC & \lambda I - S \end{pmatrix} \\
&= \underset{\substack{K\in\vec{K} \quad Q\in\vec{Q} \\ R\in\vec{R} \quad S\in\vec{S}}}{\text{g.c.ddet}} \begin{pmatrix} P^{*-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I - P^*AQ^* - P^*BKCQ^* & -P^*BQ \\ -RCQ^* & \lambda I - S \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} Q^{*-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
&= \underset{K\in\vec{K}}{\text{g.c.ddet}}(P^{*-1}(\lambda I - P^*AQ^* - P^*BKCQ^*)Q^{*-1})
\end{aligned}$$

$$= \underset{K\in\vec{K}}{\mathrm{g.c.d}}\det(\lambda E - A - BKC)$$
$$= \varphi_\Sigma(\lambda).$$

iii) 当 $\mathrm{rank}\, E = l < n$ 时，选择 $E^*(\varepsilon) = E + \varepsilon I$. 由多项式理论可知，除去有限个 $\varepsilon_j (j = 1, 2, \cdots p, p \leqslant n)$ 外，$E^*(\varepsilon)$ 都是可逆矩阵. 由 ii) 可知，只要 $\varepsilon \neq \varepsilon_j$，$j = 1, 2, \cdots p$，就有下式成立：

$$\psi_\Sigma^*(\lambda) = \underset{\substack{K\in\vec{K}\ \ S\in\vec{S} \\ Q\in\vec{Q}\ \ R\in\vec{R}}}{\mathrm{g.c.d.}\det}\begin{pmatrix} \lambda E^*(\varepsilon) - A - BKC, & -BQ \\ -RC & \lambda I - S \end{pmatrix}$$
$$= \underset{K\in\vec{K}}{\mathrm{g.c.d.}}\det(\lambda E^*(\varepsilon) - A - BKC) = \varphi_\Sigma^*(\lambda). \tag{2.4}$$

由于 $\varphi_\Sigma^*(\lambda)$ 与 $\psi_\Sigma^*(\lambda)$ 都是 ε 的多项式，即

$$\varphi_\Sigma^*(\lambda) = \sum_{j=0}^{n_0} \alpha_j(\lambda)\varepsilon^j,$$

$$\psi_\Sigma^*(\lambda) = \sum_{j=0}^{m_0} \beta_j(\lambda)\varepsilon^j.$$

由(2.4)式可知，$m_0 = n_0$，$\alpha_j(\lambda) = \beta_j(\lambda)$，$j = 0, 1, 2, \cdots, m_0$. (2.5)

又因为 $\varphi_\Sigma^*(\lambda)$ 与 $\psi_\Sigma^*(\lambda)$ 对 ε 是连续的函数，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\psi_\Sigma^*(\lambda) = \psi_\Sigma(\lambda) = \beta_0(\lambda),$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\Sigma^*(\lambda) = \varphi_\Sigma(\lambda) = \alpha_0(\lambda).$$

因此 $\psi_\Sigma(\lambda) = \varphi_\Sigma(\lambda)$.

上述定理说明，对于广义分散控制系统(1.1)，用动态补偿器作反馈得到的不变多项式与用静态输出作反馈得到的固定多项式是一致的.

定义 2.3. 系统(1.1)的有限固定模是指下列集合：

$$\Omega \triangleq \{\lambda \mid \varphi_\Sigma(\lambda) = 0\}. \tag{2.6}$$

为了保证在对系统(1.1)进行反馈时，不增加闭环系统的有限极点，无妨假设

$$q \triangleq \deg|\lambda E - A| = \max_{K\in\vec{K}}\deg\det(\lambda E - A - BKC). \tag{2.7}$$

因为在(2.7)式不满足时，可以选择 $K^* \in \vec{K}$，使得 $\deg|\lambda E - A - BK^*C| = \max_{K\in\vec{K}}\deg\det\cdot(\lambda E - A - BKC)$，然后令 $A^* = A + BK^*C$，就可以满足(2.7)式了.

定义 2.4.

$$\vec{K}^\alpha = \Big\{K \mid K = \mathrm{blockdiag}[K_1, K_2, \cdots, K_N], \exists 1 \leqslant j_0 \leqslant N,$$
$$\deg\Big(\lambda E - A - \sum_{j=j_0}^{N} B_j K_j C_j\Big) < q\Big\}.$$

定义 2.5.

$$\vec{K}_\alpha = \vec{K} \backslash \vec{K}^\alpha. \tag{2.8}$$

由 (2.8) 式与定义 2.4 可知，$\vec{K}_\alpha$ 中的元素保持下列多项式的次数不变，这对以后动态反

馈增益阵K的选择十分有利. $\operatorname{degdet}\left(\lambda E-A-\sum_{j=\pi}^{N} B_j K_j C_j\right)$, $\pi=1,2,\cdots N$.

定义 2.6.

$$\varphi_{\Sigma \vec{K}_\alpha}(\lambda) \triangleq \underset{K\in\vec{K}_\alpha}{\text{g.c.d.}} \det(\lambda E-A-BKC), \tag{2.9}$$

$$\Omega_{\vec{K}_\alpha} \triangleq \{\lambda \mid \varphi_{\Sigma \vec{K}_\alpha}(\lambda)=0\}. \tag{2.10}$$

引理 2.1. $\vec{K}^\alpha$ 在 $\mathbf{R}^{\sum_{j=1}^{N} m_j \times \sum_{j=1}^{N} r_j}$ 维空间中或为空集或为一超曲面.

引理 2.2. $\vec{K}_\alpha$ 在 $\vec{K}$ 中稠密.

引理 2.3. 在首系数为 1 的条件下

$$\varphi_\Sigma(\lambda)=\varphi_{\Sigma \vec{K}_\alpha}(\lambda). \tag{2.11}$$

引理 2.4. $\Omega_{\vec{K}_\alpha}=\Omega$.

上面的引理说明，在K的取值范围相差一个超曲面的情形下，系统(1.1)的固定多项式与固定模都是一样的. 因此，在以后的问题讨论中，总是将K的取值范围限制在 $\vec{K}_\alpha$ 上,这样就可以保证在系统的反馈过程中,既不增加新的有限极点,也不会减少有限极点,这在广义系统的讨论中是至关重要的.

三、主要结论

对于广义系统

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{3.1}$$

而言,有下面的引理:

引理 3.1[7]. 系统(3.1)可用正常动态补偿器

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}}=S\boldsymbol{z}+R\boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{u}=Q\boldsymbol{z}+K\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}. \end{cases} \tag{3.2}$$

近似极点配置的充要条件是系统(3.1)为 R-可控和 R-可观的.

这里的近似配置是指：若要把系统的极点配置到 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$,则 $\forall\varepsilon>0$，总可以存在形如(3.2)式的动态补偿器,把系统的极点配置到 $\{\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_p\}$,其中 $|\alpha_j-\tilde{\alpha}_j|<\varepsilon$, $j=1,2,\cdots,p$.

引理 3.2[1)]. 系统(3.1)用动态补偿器(3.2)可稳定的充要条件为：系统(3.1)是可稳的与可检测的.

对于系统(3.1),考虑 $K\in\vec{K}_\alpha$ 时，$\det(\lambda E-A-BKC)$ 的分解式

$$\det(\lambda E-A-BKC)=\varphi_{\Sigma\vec{K}_\alpha}(\lambda)\cdot\phi_2(K,\lambda).$$

设 $\phi_2(0,\lambda)=\rho\cdot(\lambda-\lambda_1)^{\mu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\mu_2}\cdots(\lambda-\lambda_l)^{\mu_l}$, λ_j 为 $\phi_2(0,\lambda)$ 的不同零点,其重数为 μ_j, $j=1,2,\cdots l$. 且设 $\operatorname{Re}\lambda_j\geqslant 0, j\in\{\alpha,\beta,\cdots,\delta\}$，那么类似于文[5]的证明,有下列引理:

引理 3.3. i) 存在 $\varepsilon>0$，使得

1) 戴立意,广义系统的正常动态补偿器,中国科学院系统科学所硕士学位论文,1985.

$$B(\lambda_j, \varepsilon) \triangleq \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_j| < \varepsilon, \lambda \in C\} \subset C^-, \quad j \in \{1, 2, \cdots l\} \backslash \{\alpha, \beta, \cdots \delta\}.$$

ii) 对所有的 $\varepsilon > 0$,存在 $\gamma > 0$,使得所有 $K \in \vec{K}_\alpha$, $\|K\| < \gamma$, $\phi_2(K, \lambda)$ 在 $B(\lambda_j, \varepsilon)$ 内恰好有 μ_j 个零点，$j = 1, 2, \cdots l$.

iii) 对任意的 $\gamma > 0$,都存在 $K \in \vec{K}_\alpha$, $\|K\| < \gamma$ 使得

$$\phi_2(K, \lambda_j) \neq 0, \quad j \in \{1, 2, \cdots l\}.$$

定理 3.1. 系统(1.1)用形如(1.2)式的动态补偿器可以镇定的充要条件为

$$\Omega \subset C^-.$$

证明. 证明的思维方法同文献[5]. 这里与文献[5]的主要不同在于参数取值范围的受限与动态补偿器的近似极点配置. 而这两点由预备知识与引理 3.1 都已得到解决. 因此该定理易证.

作者感谢王恩平、王朝珠两位先生的指导.

参 考 文 献

[1] 王朝珠,王恩平,广义分散控制系统的无穷远固定模,系统科学与数学,8(1988),142—150.
[2] 王恩平、刘万泉,广义分散控制系统的有穷固定模,自动化学报,3(1990),358—362.
[3] 刘万泉,广义分散控制系统可以正则化的条件,控制与决策,1(1989),47—48.
[4] 籍法俊,刘万泉,广义分散控制系统的 R-可控性,曲阜师范大学学报,3(1990),9-9.
[5] Wang, S. H. and Davison, E.J., On the Stabilization of Decentralized Control Systems, *IEEE, Trans, Automatic Control*, 18(1973), 5, 473—478.
[6] Fogarty, J., Invariant Theory, NewYork, Benjamin, 1969.
[7] Shayman, M. A., Pole placement by Dynamic Componsation for Descripfor systems, *Automatica*· **24**(1988), 2, 279—282.
[8] 戴立意,广义系统的正常动态补偿器. 中国科学院系统所硕士论文，1985.

ON THE STABILIZATION OF SINGULAR DECENTRALIZED CONTROL SYSTEMS

Chu Xuedao, Liu Wanquan

(Institute of Automation, Qufu Normal Univ., Shandong.)

Abstract

In this paper, the stabilization of the decentralized control systems is discussed. By using the concept of finite fixed modes defined in [2], a necessary and sufficient condition for the problem is obtained, The result of this paper is a generalization of paper [5].

Key words: decentralized control; singular control systems large scale systems.