第17卷 第6期　　自动化学报　　Vol. 17, No. 6
1991年11月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1991

关于区间矩阵的稳定性

孙继涛
（华东冶金学院数学教研室，安徽马鞍山）

关键词： 区间矩阵，稳定性，强不稳定性.

文献[1]试图给出由端点矩阵的稳定性来保证区间矩阵的稳定性，文[2,3]指出文[1]的主要结果是错的．本文给出了端点矩阵的稳定性在一定条件下可以保证区间矩阵的稳定性，其结果比文[4]更精确，适用范围更大，且对具有分解的区间矩阵给出了其稳定及不稳定的充分条件.

记号 $N(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ 及 $N(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in S$, $N(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in US$ 的意义如文[2]所述．定义 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数 $\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$, $n\times m$ 阶实矩阵 A 的范数 $\|\mathrm{A}\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^2}$, $\|\mathrm{A}\|_\infty=\min\left[\max_i\sum_j|a_{ij}|,\ \max_j\sum_i|a_{ij}|\right]$.

定义 称区间矩阵 $N(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ 是强不稳定的，若 $\forall \mathrm{A}\in N(\mathrm{P},\mathrm{Q})$，A 的特征值均具有正实部，记为 $N(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in SUS$.

先介绍两个代数结果.

引理1. 实方矩阵 A 的任一特征根的实部在矩阵 $\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{A}^T)$ 的最小与最大特征根之间.

引理2. n 阶实方阵 A 的任一特征值 λ 均满足 $|\lambda|\leqslant\|\mathrm{A}\|_\infty$.

记 $\mathring{\mathrm{A}}=u\mathrm{P}+(1-u)\mathrm{Q}$, $0\leqslant u\leqslant 1$, $\mathrm{A}_G=\mathrm{A}-\mathring{\mathrm{A}}$, $\mathrm{M}=\mathrm{Q}-\mathrm{P}=(m_{ij})_{n\times n}$, $\alpha=\|\mathrm{M}+\mathrm{M}^T\|_\infty$，可得

定理1. 对任意给定的 $\mathring{\mathrm{A}}$，若

1) $\lambda_{\max}(\mathring{\mathrm{A}}+\mathring{\mathrm{A}}^T)+\max(1-u,u)\alpha<0$，则 $N(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in S$;

2) $\lambda_{\min}(\mathring{\mathrm{A}}+\mathring{\mathrm{A}}^T)-\max(1-u,u)\alpha>0$，则 $N(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in SUS$.

证明．由设可知，对任意 $A\in N(\mathrm{P},\mathrm{Q})$，有 $\mathrm{A}=\mathring{\mathrm{A}}+\mathrm{A}_G$，从而

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\lambda_i(\mathrm{A})&\leqslant\lambda_{\max}\left[\frac{1}{2}(\mathring{\mathrm{A}}+\mathring{\mathrm{A}}^T+\mathrm{A}_G+\mathrm{A}_G^T)\right]\\&\leqslant\frac{1}{2}\lambda_{\max}(\mathring{\mathrm{A}}+\mathring{\mathrm{A}}^T)+\frac{1}{2}(\|\mathrm{A}_G+\mathrm{A}_G^T\|_\infty).\end{aligned}$$

又 $-(1-u)\mathrm{M}\leqslant\mathrm{A}_G\leqslant u\mathrm{M}$，故 $\|\mathrm{A}_G+\mathrm{A}_G^T\|_\infty\leqslant\max(1-u,u)\|\mathrm{M}+\mathrm{M}^T\|_\infty$．从而

本文于1989年6月26日收到.

$$\mathrm{Re}\lambda_i(\mathrm{A}) \leqslant \frac{1}{2}[\lambda_{\max}(\mathring{\mathrm{A}}+\mathring{\mathrm{A}}^T)+\max(1-u,\ u)\alpha].$$

因此 1)成立,类似可证 2)成立。定理 1 证毕。

B. R. Barmish 在文[2]及 C. K. William 等在文[3]中举出实例,推翻了 S. Bialas 在文[1]得到的结果。事实上,由本文定理 1 知,文[2,3]举出的实例不足以保证区间矩阵的稳定性。

在定理 1 中取 $u=\frac{1}{2}$ 可得比文[4]更精确的结果。例如,令

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}-0.6 & 0.08\\ -0.01 & -0.7\end{bmatrix},\quad \mathrm{Q}=\begin{bmatrix}-0.4 & 0.18\\ -0.39 & -0.3\end{bmatrix},$$

则由本文定理 1 中取 $u=\frac{1}{2}$ 的结论可得 $N(\mathrm{P},\mathrm{Q})\in S$。但文[4]中的定理却无法判断 $N(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ 的稳定性。

由于本文将 u 作为参数,故适用范围更广。

$\forall \mathrm{A}\in N(\mathrm{P},\mathrm{Q})$,设 A 与 P, Q 有相应的分解,$\boldsymbol{x}_s=(x_s^{(1)},x_s^{(2)},\cdots,x_s^{(n_s)})^T$, $s=1,2,\cdots,r$, $\sum\limits_{s=1}^{r}n_s=n$, $\mathring{\mathrm{A}}_{ss}=u\mathrm{P}_{ss}+(1-u)\mathrm{Q}_{ss}$, $\forall u\in[0,1]$, $\mathrm{A}_{G_{ss}}\triangleq \mathrm{A}_{ss}-\mathring{\mathrm{A}}_{ss}$,故 $-(1-u)\mathrm{M}_{ss}\leqslant \mathrm{A}_{G_{ss}}\leqslant u\mathrm{M}_{ss}$。

若 $\mathring{\mathrm{A}}_{ss}+\mathring{\mathrm{A}}_{ss}^T$ 的特征值 $\lambda_s^{(k)}<-\delta_s<0$, $k=1,2,\cdots,n_s$, $s=1,2,\cdots,r$。对系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_s=\mathring{\mathrm{A}}_{ss}\boldsymbol{x}_s+\mathrm{A}_{G_{ss}}\boldsymbol{x}_s \tag{1}$$

作 Liapunov 函数 $V_s=\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{x}_s$,则

$$\begin{aligned}\dot V_s|_{(1)} &\underset{(\text{引理}1,2)}{\leqslant} -\delta_s\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{x}_s+\|\mathrm{A}_{G_{ss}}+\mathrm{A}_{G_{ss}}^T\|_\infty\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{x}_s\\ &\leqslant -\delta_s\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{x}_s+\max(1-u,u)\|\mathrm{M}_{ss}+\mathrm{M}_{ss}^T\|_\infty\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{x}_s.\end{aligned}$$

设 $\bar\delta_s=\delta_s-\max(1-u,\ u)\|\mathrm{M}_{ss}+\mathrm{M}_S^{T}s\|_\infty>0$, $\delta=\min\limits_{1\leqslant s\leqslant r}\bar\delta_s$,对系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_s=\mathring{\mathrm{A}}_{ss}\boldsymbol{x}_s+\mathring{\mathrm{A}}_{G_{ss}}\boldsymbol{x}_s+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{r}\mathrm{A}_{sj}\boldsymbol{x}_j,\quad s=1,2,\cdots,r, \tag{2}$$

取 $V=\sum\limits_{s=1}^{r}V_s=\sum\limits_{s=1}^{r}\boldsymbol{x}_s^T\boldsymbol{x}_s$ 作为 Liapunov 函数,则有

$$\dot V|_{(2)}\leqslant -\delta\sum_{s=1}^{r}\|\boldsymbol{x}_s\|_2^2+2\sum_{s=1}^{r}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{r}\|\boldsymbol{x}_s\|_2\|\mathrm{A}_{sj}\|_F\|\boldsymbol{x}_j\|_2.$$

现设与 $\mathrm{A}_{sj}(s\neq j)$ 对应的 P_{sj} 和 Q_{sj} 中元素的绝对值的最大值为 ε, $\bar n=\max\limits_{1\leqslant s\leqslant r}n_s$,则

$$\dot V|_{(2)}\underset{(\text{Cauchy 不等式})}{\leqslant}-\delta\sum_{s=1}^{r}\|\boldsymbol{x}_s\|_2^2+2\bar n\varepsilon\sum_{s=1}^{r}\|\boldsymbol{x}_s\|_2\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{r}\|\boldsymbol{x}_j\|_2\right]$$

$$\leqslant -(\delta + 2\bar{n}\varepsilon - 2\bar{n}r\varepsilon)\sum_{s=1}^{r}\|x_s\|_2^2.$$

综上可得

定理 2. 对 $k=1,2,\cdots,n_s$, $s=1,2,\cdots,r$, 若 $\mathring{A}_{ss}+\mathring{A}_{ss}^T$ 的特征值 $\lambda_s^{(k)}<-\delta_s<0$, $\bar{\delta}_s=\delta_s-\max(1-u,u)\|M_{ss}+M_{ss}^T\|_\infty>0$, 且 $\varepsilon\leqslant\delta/2\bar{n}(r-1)$, 则 $N(\mathbf{P},\mathbf{Q})\in S$. 这里 $\delta=\min\limits_{1\leqslant s\leqslant r}\bar{\delta}_s$, $\bar{n}=\max\limits_{1\leqslant s\leqslant r}n_s$.

类似地可以证明

定理 3. 对 $k=1,2,\cdots,n_s$, $s=1,2,\cdots,r$,若 $\mathring{A}_{ss}+A_{ss}^T$ 的特征值 $\lambda_s^{(k)}>\delta_s>0$, $\bar{\delta}_s>0$ 且 $\varepsilon\leqslant\delta/2\bar{n}(r-1)$,则 $N(\mathbf{P},\mathbf{Q})\in US$. 这里，$\bar{\delta}_s$, δ, $\bar{n}$ 意义同定理 2.

注意到对 $a>0,b>0,z\in R^1$ 有 $-az^2+bz\leqslant\dfrac{b^2}{4a}$,

由

$$\dot{V}_s|_{(2)}\leqslant-\bar{\delta}_s\|x_s\|_2^2+2\sum_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{r}\|x_s\|_2\|A_{sj}\|_F\|x_j\|_2,$$

可得

$$\dot{V}_s|_{(2)}\leqslant-\left(\bar{\delta}_s-\frac{\bar{n}\varepsilon r}{2}\right)V_s+\frac{\bar{n}\varepsilon r}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{r}V_j.$$

作辅助方程组

$$\dot{V}_s=-\left(\bar{\delta}_s-\frac{\bar{n}\varepsilon r}{2}\right)V_s+\frac{\bar{n}\varepsilon r}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{r}V_j,\quad s=1,2,\cdots,r. \tag{3}$$

系统(3)拓扑等价于

$$\dot{V}_s=-\left(\frac{2\bar{\delta}_s}{\bar{n}\varepsilon r}-1\right)V_s+\sum_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{r}V_j,\quad s=1,2,\cdots,r. \tag{4}$$

由向量 Liapunov 函数可得

定理 4. 对 $k=1,2,\cdots,n_s$, $s=1,2,\cdots,r$, 若 $\mathring{A}_{ss}+\mathring{A}_{ss}^T$ 的特征值 $\lambda_s^{(k)}<-\delta_s<0$, $\bar{\delta}_s>\dfrac{1}{2}\bar{n}\varepsilon r$,又系统(4)的零解稳定,则 $N(\mathbf{P},\mathbf{Q})\in S$. 这里，$\bar{\delta}_s$, $\bar{n}$ 的意义同定理 2.

致谢　南京大学何崇佑先生阅读了原稿,并提出了许多有益的意见,作者在此表示衷心的感谢!

参 考 文 献

[1] Bialas, B., A Necessary and Sufficient Condition for the Stability of Interval Matrices, *Int. J. C.*, **37**(1983), 717—722.

[2] Barmish, B. R. and Hollot, C. V., Counter-example to a Recent Result on the Stability of Interval Matrices by S. Bialas, *Int. J. C.*, **39**(1984), 1103—1104.

[3] William, C. K., John, P. G. and George, C. V., Comments on 'a Necessary and Sufficient Condition for the Stability of Interval Matrices', *Int. J. C.*, **39**(1984), 849—851.

[4] Zhou, C. S. and Deng, J. L., The Stability of th Grey Linear System, *Int. J. C.*, 43(1986), 313—320.
[5] 廖晓昕，稳定性的数学理论及其应用，华中师范大学出版社，1988 年 7 月.

ON THE STABILITY OF INTERVAL MATRIX

SUN JITAO
(Division of Math., East China Institute of Metallurgy, Maanshan, Anhui)

Key words: Interval matrix; stability; strong nonstability.