

一种计算性能指标对路径概率 灵敏性的新方法¹⁾

汪自勤 宋文忠 冯纯伯

(东南大学自动化所, 南京 210018)

摘 要

本文提出了应用全状态摄动分析直接计算对路径概率的灵敏性, 推导了路径变化时摄动的产生规则, 给出了两个数值例子. 实验结果验证了这一方法的有效性和准确性.

关键词: 离散事件动态系统, 排队网络, 摄动分析, 灵敏性.

一、问题的提出

离散事件动态系统 (DEDS) 是一类最近才引起人们广泛注意的系统. 在进行性能分析和优化时, 排队网络是这类系统的一个十分有效的模型. 本文的目的是研究 DEDS 的性能指标对路径概率灵敏性的计算问题.

路径概率是排队网络的一组重要决策参数. 对于一个有 M 个服务台的系统, 路径概率组成一个 $M \times M$ 矩阵 $P = \{P_{ij}\}$, 其中元素 P_{ij} 表示一个顾客在第 i 个服务台服务完毕后离开 i 去第 j 个服务台的概率, 显然有

$$\sum_j P_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (1)$$

如果离开服务台 i 的路径概率发生变化, 则变化量显然应满足

$$\sum_j \Delta P_{ij} = 0, \quad (2)$$

和

$$0 \leq P_{ij} + \Delta P_{ij} \leq 1. \quad (3)$$

Y. C. Ho 在文献 [1] 中曾研究过对路径概率灵敏性的计算问题. 路径概率变化是一个典型的涉及队长摄动的例子. 由于原有的各种摄动分析法都没有明确考虑队长摄动^[2-6], 因此都无法直接求解此问题. 这是因为如果假定 P_{ij} 变化无穷小, 这将不发生任何路径变化, 也不引起任何事件时间摄动, 标称样本轨迹和摄动样本轨迹将完全一样. 因

本文于 1989 年 5 月 21 日收到.

1) 本文受 CIMS 项目资助和东南大学青年教师基金资助.

此系统性能不发生变化,灵敏性为零。这显然是错误的结果。而如果假定 P_{ij} 的变化为有限值,则这将首先引起各服务台的队长变化,而并不直接导致事件时间的变化。因此,即使采用事件时间的有限摄动分析仍无法处理此问题。有鉴于此,文献[1]提出了一种间接求解的方法,即将求解对路径概率灵敏性问题转化为求解对平均服务时间的灵敏性问题,而后者已较好地得到了解决。这一方法的理论根据是对于乘积解排队网络其服务台的利用率仅仅通过乘积 $V_i S_i$ 依赖于路径概率 P_{ij} 和平均服务时间 S_i ,其中 V_i 为访问率,由路径概率唯一确定。因此可将 P_{ij} 的变化(即 V_i 的变化)等效地转化为平均服务时间 S_i 的变化。严格地讲这一间接求解法只适用于具有上述性质的排队网络。但是除了乘积解排队网络外目前还不知道有没有其它网络满足这一性质,并且已经知道具有阻塞的排队网络不满足这一性质。不过文献[1]的实验结果表明对于某些不满足上述性质的网络,间接求解法仍能获得较好的结果。

由于这一问题并未得到彻底解决,本文将采用全状态摄动分析法^[7]直接计算对路径概率的灵敏性。

二、摄动的产生

路径概率发生变化后,将导致某些顾客的去向发生改变,从而引起有关服务台的队长摄动。路径概率变化并不直接引起事件时间的摄动。现在需要知道的是路径概率变化将怎样导致顾客去向的改变,即摄动的产生规则是什么。

顾客在第 i 台服务完毕后的去向其实是一个离散型随机变量,不妨用 D_i 表示,路径概率 P_{ij} , $j = 1, 2, \dots, M$ 是 D_i 的概率分布。任何概率分布的随机变量 X 都可以看成是个二元函数 $F^{-1}(U, \theta)$,其中 F 是 X 的分布函数,为 θ 分布参数, U 是 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机变量。由此就得到了产生随机变量 X 样本值的反函数法

$$x = F^{-1}(u, \theta), \quad (4)$$

其中 u 为 U 的一个样本值,它是 $(0, 1)$ 上的一个随机数,在随机模拟中常被称为随机种子。对于离散随机变量 D_i , (4) 式的具体形式为

$$d_i = k, \text{ 当 } \sum_{j=1}^{k-1} P_{ij} < u \leq \sum_{j=1}^k P_{ij} \text{ 时。} \quad (5)$$

由图 1 可以很容易理解(5)式产生的 d_i 确实服从概率分布 $\{P_{ij}\}$ 。

在摄动分析里一般都假定摄动系统和标称系统的区别仅在于某个参数的微小变化[8,9],其它条件完全相同,这包括各种随机因素也相同,即随机种子不变。因此分布参数 θ 变化后随机变量 X 的样本值为

$$x' = F^{-1}(u, \theta + \Delta\theta), \quad (6)$$

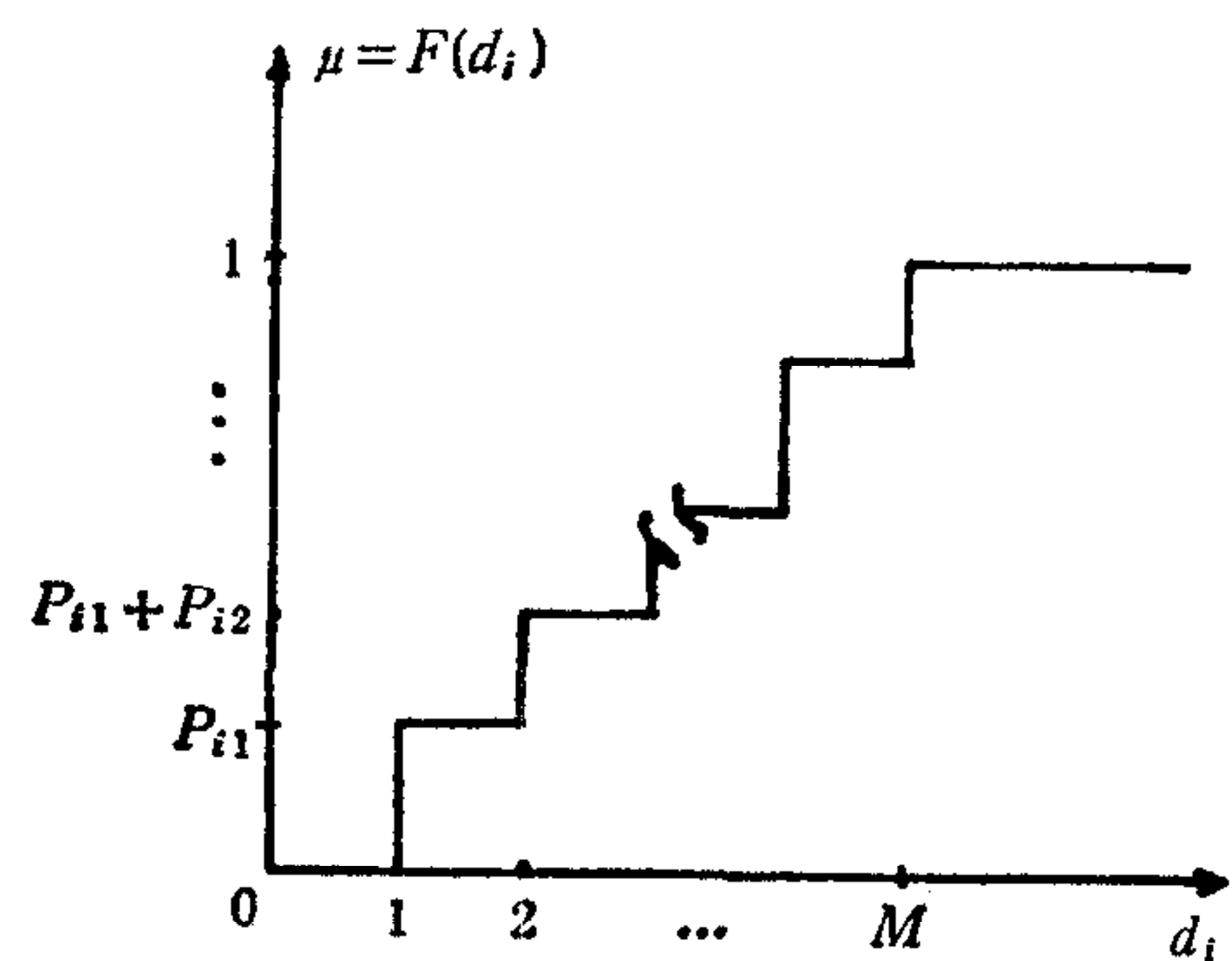


图 1 d_i 的概率分布曲线

式(6)几乎已成了摄动分析中摄动样本轨迹里随机变量的通用产生规则,如果摄动轨迹里顾客的去向也如此产生,即

$$d'_i = k, \sum_{j=1}^{k-1} (P_{ij} + \Delta P_{ij}) < u \leq \sum_{j=1}^k (P_{ij} + \Delta P_{ij}), \quad (7)$$

则将产生一个问题,即使 $\Delta P_{ij} = 0$, 从第 i 台去第 j 台的顾客也可能不再相同. 为了克服这一问题,只需对摄动轨迹里顾客去向的产生方法作如下修改. 如果 $\Delta P_{ik} \geq 0$, 则在标称轨迹里去第 k 台的顾客在摄动轨迹里仍去第 k 台,即

$$d'_i = k, \sum_{j=1}^{k-1} P_{ij} < u \leq \sum_{j=1}^k P_{ij}. \quad (8)$$

如果 $\Delta P_{ik} < 0$, 则摄动轨迹里顾客的方向为

$$d'_i = \begin{cases} k, & \sum_{j=1}^{k-1} P_{ij} < u \leq \Delta P_{ik} + \sum_{j=1}^k P_{ij}, \\ k', & A + \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta P_{ij} > 0}}^{k'-1} \Delta P_{ij} \frac{|\Delta P_{ik}|}{\Delta P_i} < u \leq A + \sum_{\substack{j=1 \\ \Delta P_{ij} > 0}}^{k'} \Delta P_{ij} \frac{|\Delta P_{ik}|}{\Delta P_i} \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$A = \Delta P_{ik} + \sum_{j=1}^k P_{ij}, \quad (10)$$

$$\Delta P_i = \frac{1}{2} \sum_j |\Delta P_{ij}| = \sum_{\substack{j \\ \Delta P_{ij} > 0}} \Delta P_{ij}, \quad (11)$$

ΔP_i 表示顾客离开服务台 i 时路径概率的总变化量. 容易证明根据(8)式和(9)式产生的摄动轨迹顾客去向服从概率分布 $\{P_{ij} + \Delta P_{ij}\}$.

(5)式给出了标称轨迹里顾客的去向, 而(8)和(9)式给出了摄动轨迹里顾客的去向, 由(5),(8),(9)三式不难得出路径概率变化时的摄动产生规则. 假设在标称轨迹里一个顾客在第 i 台服务完毕后去第 k 台, 由上面的分析知, 仅当 $\Delta P_{ik} < 0$ 且随机种子 u 不属于区间 $\left[\sum_{j=1}^{k-1} P_{ij}, \Delta P_{ik} + \sum_{j=1}^k P_{ij} \right]$ 时, 顾客的去向才会改变, 故也只有此时才会引起队长摄动. 设摄动轨迹里顾客不去第 k 台而改为去第 k' 台, k' 由(9)式唯一确定. 于是服务台 k 少去了一个顾客, 而服务台 k' 则多去了一个顾客, 因此它们分别获得了一1和+1的队长摄动, 即有

$$\begin{cases} \Delta C_{\text{new}}(k) = \Delta C(k) - 1, \\ \Delta C_{\text{new}}(k') = \Delta C(k') + 1. \end{cases} \quad (12)$$

$\Delta P_{ik} < 0$ 时为确定摄动轨迹里顾客的去向, 还必须知道随机种子 u 的值. 在进行仿真研究时 u 的值是知道的, 但是如果是分析从实际运行系统观测得到的样本轨迹则知道的仅仅是顾客的去向即去第 k 台, 并不知道 u 的值. 对于连续随机变量 X , 其分布函数 $F(x, \theta)$ 是 x 的严格单调递增函数, 因此可由样本值 x 按下式唯一确定出随机种子的值 u

$$u = F(x, \theta). \quad (13)$$

对于离散随机变量 D_i , 其分布 F 不再是严格单调递增函数, 由其样本值 d_i 只能确定出 u 所在的区间范围 (a, b) , 仍无法确定出其真实值, 为了解决这一难题, 使上述算法也能够在线应用于实际运行系统, 可以采用随机数发生器来产生这一随机种子 u , 具体的方法是先产生一个 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机数 u_1 , 然后再将其转化为 (a, b) 上均匀分布的随机数, 即认为

$$u = a + (b - a) \cdot u_1, \quad (14)$$

当已知 $d_i = k$ 时, a, b 就分别等于 $\sum_{j=1}^{k-1} P_{ij}$ 和 $\sum_{j=1}^k P_{ij}$.

三、灵敏性的计算

扰动产生以后, 应用全状态扰动传播规则^[7] 就可以构造出扰动样本轨迹. 在全状态扰动传播规则时有下列几点需要注意:

1) 虽然路径概率的变化并不直接产生事件时间的扰动, 但队长扰动在传播过程中还是会引引起事件时间的扰动, 并且是有限事件时间扰动, 因此队长扰动和事件时间扰动是同时存在的.

2) 在全状态扰动的传播过程中, 事件时间扰动的传播使用的是一阶事件时间扰动的传播规律, 队长扰动的传播也只精确地考虑了队长扰动为 1 和 -1 的情况, 对于队长扰动大于 1 的情况只是作了近似处理, 因此实际上建立的是一阶全状态扰动传播规则.

3) 由于使用的是一阶规则, 路径概率的变化量 ΔP_{ij} 应选择一个适当的值. 太小则收敛太慢, 太大则影响结果的精度. 不过大量的实验结果表明一阶扰动分析对一阶扰动的假设具有足够的鲁棒性. 由扰动样本轨迹和标称样本轨迹就可以求出路径概率变化 ΔP_{ij} 后的生产率变化量

$$\Delta TP(i) = (NC(i) + \Delta NC(i)) / (T + \Delta T) - NC(i) / T, \quad (15)$$

其中 T 为实验时间, $NC(i)$ 为第 i 台服务的顾客数, ΔT 和 $\Delta NC(i)$ 分别为它们的扰动量. 由于队长扰动的存在, 各服务台服务的顾客数也会发生变化, 这一点不同于仅有事件时间扰动的情形.

四、实验验证

例 1^[1]. 考虑的是一个 Jackson 网络, 由 3 个服务台和 9 个顾客组成, 服务时间服从负指数分布, 均值为 10, 8, 6, 缓冲器容量足够大. 路径概率矩阵及其变化为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta P = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.01 & -0.01 \\ 0.01 & 0.0 & -0.01 \\ 0.01 & -0.01 & 0.0 \end{bmatrix}.$$

在一次仿真运行 3 个服务台共服务了 500,000 顾客后, 应用全状态扰动分析求得了由 ΔP 引起的各服务台生产率的变化量 $\Delta TP(i)$, 见表 1. 为了证明这些结果, 笔者还给出了应用 Jackson 公式求得的准确值 ΔTP_f , 表中还列出了 Y.C.Ho 应用间接法求得的结果 ΔTP_h .

表 1

Server i	1	2	3
ΔTP	0.519×10^{-3}	-0.740×10^{-3}	-2.12×10^{-3}
ΔTP_f	0.513×10^{-3}	-0.771×10^{-3}	-2.14×10^{-3}
ΔTP_h	0.522×10^{-3}	-0.766×10^{-3}	-2.15×10^{-3}

表 2

Server i	1	2	3
ΔTP	1.07×10^{-2}	-0.258×10^{-2}	-1.56×10^{-2}
ΔTP_b	1.07×10^{-2}	-0.254×10^{-2}	-1.67×10^{-2}
ΔTP_h	1.13×10^{-2}	-0.21×10^{-2}	-1.5×10^{-2}
ΔTP_{hb}	1.09×10^{-2}	-0.21×10^{-2}	-1.5×10^{-2}

例 2^[1]. 考虑的是一个非乘积解排队网络, 它与例 1 系统的区别仅有两点. 一是各服务台的服务时间均服从均匀分布, 其上下限分别为 $[0, 16]$, $[0, 20]$ 和 $[0, 12]$. 二是各服务台的缓冲器容量均为 5, 因此将有阻塞发生. 表 2 给出了本例的结果. 由于这里考虑的是非乘积解网络, 为了验证全状态摄动分析的结果只能求助于仿真法. 表 2 中的 ΔTP_b 就是由仿真法求得的结果, 即用 $P + \Delta P$ 和 P 分别进行两次仿真求得的生产率的差. 每次仿真运行 3 个服务台共服务了 300,000 顾客, 表中给出的是十组独立仿真试验的平均结果. 同时还给出了 Y.C.Ho 用间接法和仿真法求得的结果 ΔTP_h 和 ΔTP_{hb} .

五、结 束 语

本文实现了用全状态摄动分析直接计算生产率对路径概率的灵敏性, 实验结果验证了这一方法的合理性和结果的准确性. 与间接法相比, 它不仅适用于任意一般的排队网络(这里指任意概率分布, 可以有阻塞), 而且还省去了两次转换, 即将路径概率的变化转化成等效的平均服务时间变化(这需要解一个齐次线性方程组)和将求得的生产率对平均服务时间的灵敏性再转化成生产率对路径概率的灵敏性. 更重要的是这一方法将同样适用于路径与系统状态有关的系统. 因此在研究诸如动态路径控制等问题中将能发挥重要作用.

参 考 文 献

- [1] Ho, Y. C. and Cao, X. R., Performance Sensitivity to Routing Changes in Queueing Networks and Flexible Manufacturing Systems Using Perturbation Analysis, *IEEE J. Robotics and Automation*, 1(1985), 4, 165—172.
- [2] Ho, Y. C. and Cassandras, C. G., A New Approach to the Analysis of Discrete Event Dynamic Systems, *Au-*

- Automatica*, 19(1983), 2, 149—167.
- [3] Ho, Y. C. and Cao, X. R., Perturbation Analysis and Optimization of Queueing Networks, *J. Optimization Theory and Application*, 40(1983), 4, 559—582.
- [4] Ho, Y. C., Cao, X. R. and Cassandras, C. G., Infinitesimal and Finite Perturbation Analysis for Queueing Networks, *Automatica*, 19(1983), 4, 439—445.
- [5] Gong, W. B. and Ho, Y. C., Smoothed (Conditional) Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems, *IEEE Trans Auto-Contr.* AC-32(1987), 10, 858—866.
- [6] Ho, Y. C. and Li, S., Extensions of Infinitesimal Perturbation Analysis, *IEEE Trans Auto-Contr.* AC-33(1988), 5, 427—438.
- [7] Wang Ziqin, Song Wenzhong and Feng Chunbo, Full-State Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems, Will Be Publish by Int. J. on DEDS.
- [8] Suri, R., Implementation of Sensitivity Calculations on a Monte Carlo Experiment, *J. Optimization theory and Applications*, 40(1983), 4, 625—630.
- [9] Eyley, M. A., Sensitivity of Sample Values to Parameter Changes, *J. Optimization Theory and Applications*, 45(1985), 1, 159—163.

A NEW CALCULATION METHOD OF THE PERFORMANCE SENSITIVITY TO ROUTING CHANGE

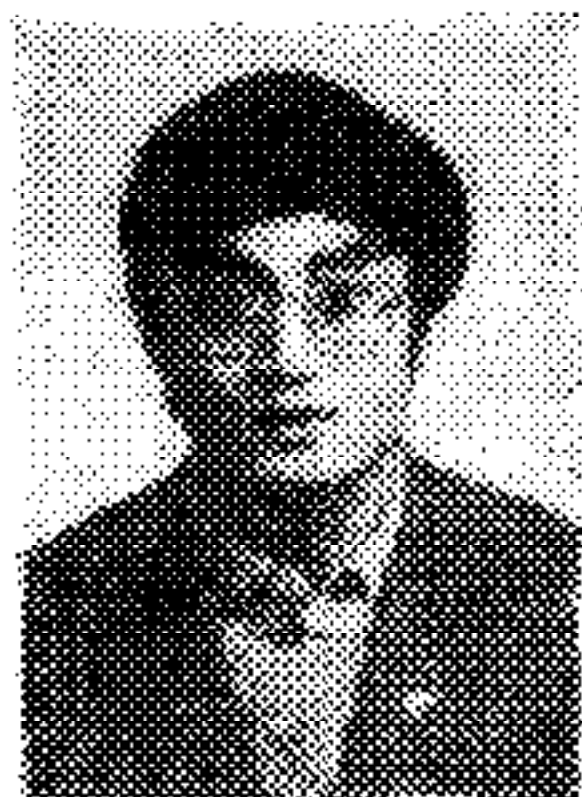
WANG ZIQIN SONG WENZHONG FENG CHUNBO

(Research Institute of Automation, Southeast University 210018)

ABSTRACT

A rapid calculation method of the performance sensitivity to routing change for stochastic queueing networks is discussed. The perturbation rule caused by the change of the routing probability is developed. Two simulation examples are given to show the effectiveness and precision of this method.

Key words: Discrete event dynamic system; queueing network; perturbation analysis; performance sensitivity.



汪自勤 1963 年生于安徽。1983 年 7 月在武汉水利电力学院动力系获学士学位, 1986 年 3 月在南京东南大学自动化所获硕士学位。毕业后曾留校工作一年。1990 年 3 月在东南大学自动化所获博士学位。现为挪威工学院博士后研究人员。主要研究领域为离散事件动态系统理论及其在 CIMS 中的应用, 鲁棒控制理论及其在过程控制中的应用。



宋文忠 1936 年生于上海。1960 年毕业于南京工学院动力工程系, 现任东南大学自动化研究所教授、博士生导师。研究领域为生产过程综合自动化, 系统辨识, DEDS 理论及其应用。

冯纯伯 简介及照片见 1991 年第 3 期。