第18卷 第1期 | 自 动 化 学 报 | Vol. 18, No. 1
1992 年 1 月 | ACTA AUTOMATICA SINICA | Jan., 1992

延时时变线性伺服机构设计的 Walsh 级数方法

胡健生　杨成梧
（华东工学院八系，南京 210014）

摘　要

本文利用 Walsh 级数提出了延时时变系统线性伺服机构的设计方法，给出了计算其最优状态向量和最优控制的具体方法. 该算法简单明了，便于实施.

关键词：沃尔什函数，伺服机构，延时.

一、引　言

在实际应用中广泛存在着的时滞系统控制问题，曾采用扩展状态法[3]和 Pade 一阶近似[5]等方法处理. 本文将利用 Walsh 级数，采用参数优化方法，对延时时变系统（具有多变量结构）进行研究，并就其线性伺服机构的设计提出了具体算法. 该算法的特点是：1）涉及的运算全部是代数运算；2）对延时时变等问题处理简单；3）算法精度可随展开项数增加而提高.

二、Walsh 级数的运算性质及延时分析

Walsh 函数是在 $L^2[0,1)$ 上的完全直交函数. 任意函数 $f(t)\in L^2[0,1)$ 均可用有限项 Walsh 级数近似表示[4]

$$f(t)=F^T\Phi_m(t)=\sum_{i=0}^{m-1} f_i\phi_i(t). \tag{1}$$

Walsh 级数的积分关系由下式给出：

$$\int_0^t \Phi_m(\tau)d\tau = P\Phi_m(t), \tag{2}$$

式中，P 称为 Walsh 积分矩阵，是非奇异方阵，其结构见文献[1].

Walsh 级数的乘法特性是

$$\Phi_{m\times m}(t)\triangleq\Phi_m(t)\cdot\Phi_m^T(t), \tag{3}$$

$$C_m^T\triangleq[c_0c_1\cdots c_{m-1}], \tag{4}$$

则

$$\Phi_{m\times m}(t)\cdot C_m = C_{m\times m}\cdot \Phi_m(t), \tag{5}$$

$C_{m\times m}$ 的结构见文献[1]。

为了进行矩阵和向量运算，定义增广 Walsh 函数矩阵

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{mn}(t) &= [\phi_0(t)I_n \vdots \phi_1(t)I_n \vdots \cdots \vdots \phi_{m-1}(t)I_n] \\ &= [\Phi_m(t)\otimes I_n],\end{aligned} \tag{6}$$

式中⊗表示 Kroneck 乘积符号，I_n 是 $n\times n$ 单位阵．则矩阵有如下乘法关系：

$$A^T\hat{\Phi}_{mn}(t)\cdot\hat{\Phi}^T_{mn}(t) = \hat{\Phi}^T_{mn}(t)\hat{A}, \tag{7}$$

式中，A^T 和 $\hat{A}$ 的结构见脚注 1)．

Walsh 级数的延时分析是用来处理延时系统的一种方法(见作者的硕士论文)：

$$\Phi_m(t-\tau) = D\Phi_m(t), \tag{8}$$

D 称 Walsh 延时矩阵．对增广 Walsh 函数，则有

$$\hat{\Phi}_{mn}(t-\tau) = \hat{D}_n\hat{\Phi}_{mn}(t), \tag{9}$$

$$\hat{D}_n = D\otimes I_n. \tag{10}$$

三、延时时变系统线性伺服机构的设计

考虑线性时变 MIMO 系统

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = A(t)\boldsymbol{y}(t) + B(t)y(t-\tau_1) + C(t)\boldsymbol{u}(t) + E(t)\boldsymbol{u}(t-\tau_2), \tag{11}$$

式中 $y(t)\in R^n$ 为输出向量；控制向量 $\boldsymbol{u}(t)\in R^r$，$A(t)$，$B(t)$，$C(t)$，$E(t)$ 是适当维数的时变系数矩阵；τ_1 和 τ_2 是时滞常数．初值条件为 $y(0)=y_0$，对(11)式所示系统设计线性伺服机构的任务是：寻找最优控制向量使目标性能泛函达到最小，即用最小的控制能量使输出紧紧跟踪系统参考输出的变化．设目标函数为

$$J = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{s}(1)-\boldsymbol{y}(1)\|_K + \frac{1}{2}\int_0^1 [\|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{y}(t)\|^2_{Q(t)} + \|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{R(t)}]dt, \tag{12}$$

式中 $\boldsymbol{s}(t)\in R^n$ 是系统的参考输出，$K,Q(t)$ 是半正定矩阵；$R(t)$ 是正定矩阵．由极大值原理直接求解上述设计问题是很复杂的，现用 Walsh 级数方法分析上述问题．将各矢量和矩阵展开如下：

$$\boldsymbol{y}(t) = \hat{\Phi}^T_{mn}(t)G, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{y}(t-\tau_1) = \hat{\Phi}^T_{mn}(t)\hat{D}^T_{n1}G,\ (\hat{D}_{n1} = D_1\otimes I_n), \tag{14}$$

$$\boldsymbol{y}(0) = \hat{\Phi}^T_{mn}(t)[y_0^T 0\cdots 0]\triangleq\hat{\Phi}^T_{mn}(t)G_0, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \hat{\Phi}^T_{mr}(t)H, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{u}(t-\tau_2) = \hat{\Phi}^T_{mr}(t)\hat{D}^T_{r2}H,\ (\hat{D}_{r2} = D_2\otimes I_r), \tag{17}$$

$$A(t) = A^T\hat{\Phi}_{mn}(t),\ A^T = [A_0A_1\cdots A_{m-1}], \tag{18}$$

$$B(t) = B^T\hat{\Phi}_{mn}(t),\ B^T = [B_0B_1\cdots B_{m-1}], \tag{19}$$

$$C(t) = C^T\hat{\Phi}_{mr}(t),\ C^T = [C_0C_1\cdots C_{m-1}], \tag{20}$$

---

1) 胡健生，一类正交函数在现代控制理论中的应用，华东工学院硕士论文，1989.

$$E(t)=E^T\hat{\Phi}_{mr}(t),\ E^T=[E_0E_1\cdots E_{m-1}]. \tag{21}$$

对(11)式两边积分，并将上述各展开式代入得

$$\hat{\Phi}^T_{mn}(t)G-\hat{\Phi}^T_{mn}(t)G_0=\hat{\Phi}^T_{mn}(t)\hat{P}^T_n\hat{A}G+\hat{\Phi}^T_{mn}(t)\hat{P}^T_n\hat{B}\hat{D}^T_{n1}G+\hat{\Phi}^T_{mn}(t)\hat{P}^T_n\hat{C}H+\hat{\Phi}^T_{mn}(t)\hat{P}^T_n\hat{E}\hat{D}^T_{r2}H. \tag{22}$$

式中 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{E}$ 的构造见作者的硕士论文. 由 Walsh 函数的直交特性(22)式可简化为代数式

$$[I_{mn}-\hat{P}^T_n\hat{A}-\hat{P}^T_n\hat{B}\hat{D}^T_{n1}]G=[\hat{P}^T_n\hat{C}+\hat{P}^T_n\hat{E}\hat{D}^T_{r2}]H+G_0. \tag{23}$$

令

$$M=[I_{mn}-\hat{P}^T_n\hat{A}-\hat{P}^T_n\hat{B}\hat{D}^T_{n1}]^{-1}\cdot[\hat{P}^T_n\hat{C}+\hat{P}^T_n\hat{E}\hat{D}^T_{r2}], \tag{24}$$

$$N=[I_{mn}-\hat{P}^T_n\hat{A}-\hat{P}^T_n\hat{B}\hat{D}^T_{n1}]^{-1}\cdot G_0, \tag{25}$$

于是(23)式可简写成

$$G=MH+N. \tag{26}$$

一但系统参数和展开项数确定，则M和N也是确定的. 再把 $\boldsymbol{s}(t)$ 和 $[\boldsymbol{s}(1)-\boldsymbol{y}(1)]$, $Q(t)$, $R(t)$ 用 Walsh 级数表示

$$s(t)=\hat{\Phi}^T_{mn}(t)S, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{s}(1)-\boldsymbol{y}(1)=\boldsymbol{s}(1)-\hat{\Phi}^T_{mn}(1)G\triangleq\boldsymbol{s}(1)-WG, \tag{28}$$

$$Q(t)=Q^T\hat{\Phi}_{mn}(t),\ Q^T=[Q_0Q_1\cdots Q_{m-1}], \tag{29}$$

$$R(t)=R^T\hat{\Phi}_{mr}(t),\ R^T=[R_0R_1\cdots R_{m-1}], \tag{30}$$

$$W\triangleq\hat{\Phi}^T_{mn}(1). \tag{31}$$

把上述各式代入性能泛函(12)式，有

$$\begin{aligned}J&=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{s}(1)-WG\|^2_K+\frac{1}{2}\int_0^1[(S-G)^T\hat{\Phi}_{mn}(t)\\&\quad\cdot Q^T\hat{\Phi}_{mn}(t)\cdot\hat{\Phi}^T_{mn}(t)(S-G)+H^T\hat{\Phi}_{mr}(t)R^T\hat{\Phi}_{mr}(t)\hat{\Phi}^T_{mr}(t)H]dt\\&=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{s}(1)-WG\|^2_K+\frac{1}{2}[(S-G)^T\hat{Q}(S-G)+H^T\hat{R}H],\end{aligned} \tag{32}$$

式中 $\hat{Q}$ 和 $\hat{R}$ 的构造见作者的硕士论文.

这样延时时变线性伺服机构的设计问题被转化成了由(26)式和(32)式构成的代数极值问题，使问题求解大为简化. 把(26)式代入(32)式，并根据代数求极值的原则，令

$$\frac{\partial J}{\partial H}=0, \tag{33}$$

则

$$-(WM)^TK[\boldsymbol{s}(1)-W(MH+N)]+(-M^T)\hat{Q}(S-MH-N)+\hat{R}H=0. \tag{34}$$

当

$$\det[M^TW^TKWM+M^T\hat{Q}M+\hat{R}]\neq0, \tag{35}$$

可得最优解

$$H^*=[M^TW^TKWM+M^T\hat{Q}M+\hat{R}]^{-1}\cdot[M^TW^TK(\boldsymbol{s}(1)-WN)+M^T\hat{Q}(S-N)]. \tag{36}$$

此时最优控制的 Walsh 级数解为

$$u^*(t) = \hat{\Phi}^T_{mr}(t) \cdot H^*. \tag{37}$$

以上分析了延时时变系统线性伺服机构设计的 Walsh 级数方法，显然该法对定常系统情况也是完全适用的。

四、举 例

设某个 SISO 线性延时系统数学模型为

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t-1) + u(t), \ t \in [0,2) \\ y(0) = 0, \ t \leqslant 0, \end{cases} \tag{38}$$

上述系统在输出变量中存在 $\tau = 1$ 的延时，现要求在[0,2)内对该系统进行跟踪。即要求最优控制向量 $u^*(t)$，使系统输出 $y(t)$ 紧紧跟踪系统参考输出 $s(t)$ 的变化。设目标函数为

$$J = \frac{1}{2}\left\{K[s(2) - y(2)]^2 + \int_0^2 [Q(s(t) - y(t))^2 + Ru^2(t)]dt\right\},$$

其中 $K = 10^5$，$Q = 10$，$R = 1$，$s(t)$ 分别为 $s(t) = 1, t$，取 $m = 8$，用本文的 Walsh 级数法求解，结果如图 1 所示。

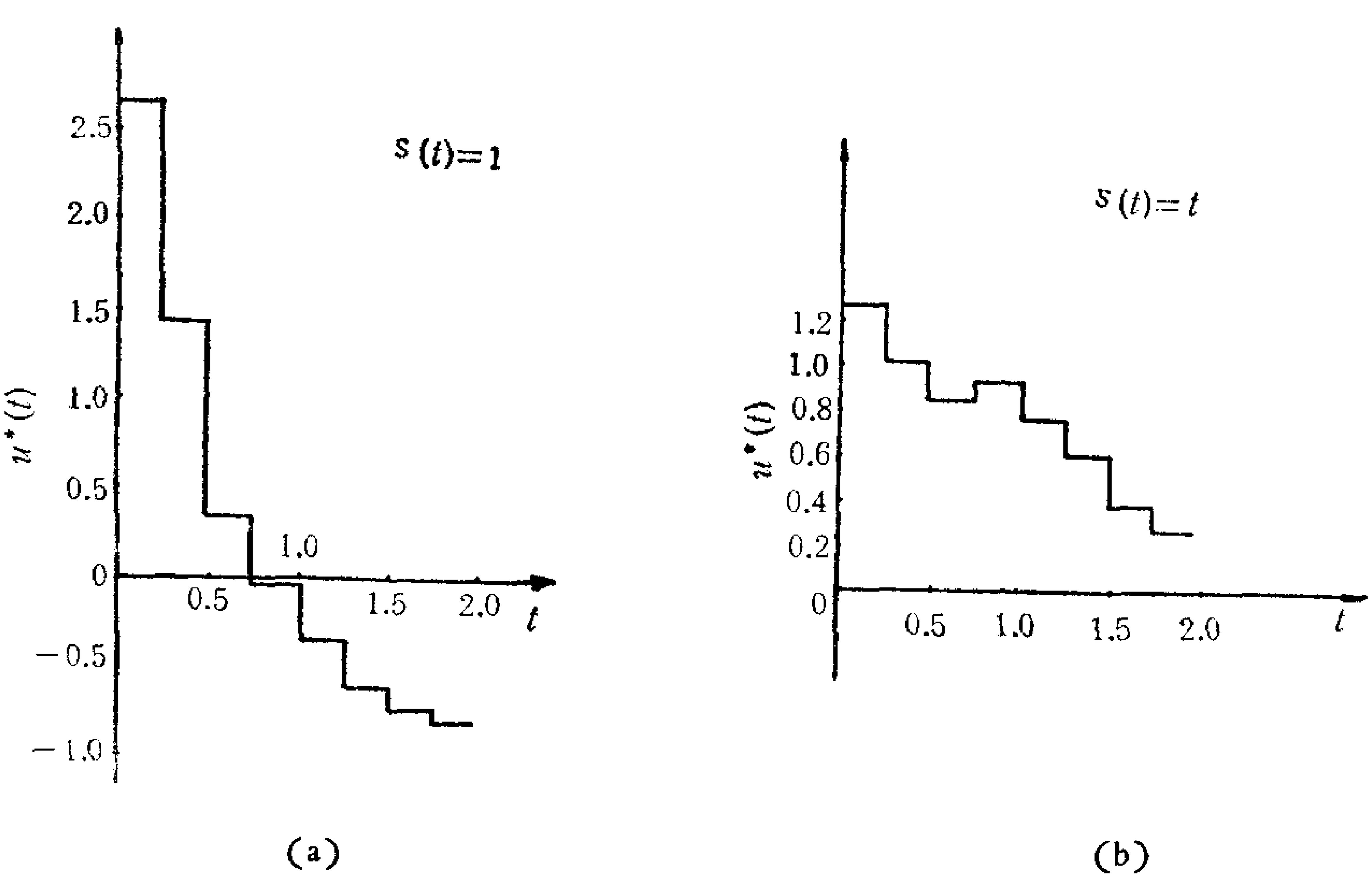

图 1 $m = 8$ 时，$s(t) = 1$，t 的最优控制 Walsh 级数解

五、结 束 语

本文用 Walsh 级数提出的延时时变系统线性伺服机构设计新方法，只需用求解代数极值问题便能得到最优控制 $u^*(t)$，从而使设计过程简化，为伺服机构的设计提供了又一种新方法。

参 考 文 献

[1] Chen, C. F. and Hsiao, C. H., Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh-function, *IEEE. Trans. Automat. Control*, **AC**-20(1975), 593.

[2] 绎学书，最优控制理论与应用，清华大学出版社，1986.

[3] 郑维行，苏维宜，任福贤，沃尔什函数理论与应用，上海科技出版社，1983.

THE DESIGN OF LINEAR SERVOMECHANISM FOR TIME-DELAY SYSTEMS VIA WALSH SERIES

Hu Jiansheng Yang Chengwu

(*Dept. of No.* 8 *East China Institute of Engineering, Nanjing* 210014)

Abstract

In this paper, an effective approach to design the linear servomechanism of multivariable time-variant systems with time-delay in state and control is presented. By using Walsh series, the algorithm for optimal control is proposed. This algorithm is simple and convenient for industrial processes.

Key words: Walsh series; servomechanism; time-delay.