一类不确定离散时间系统的鲁棒控制

顾兴源　俞向罡
（东北工学院自动控制系，沈阳 110060）

摘　要

本文针对一类离散时间不确定多输入系统，采用李雅普诺夫第二方法设计了一种鲁棒的线性状态反馈控制器．分析了控制系统的稳定性，并得出系统稳定的充分条件．最后给出仿真例子．

关键词：不确定系统，鲁棒控制，李雅普诺夫函数．

一、引言及问题的描述

目前，人们对离散时间不确定系统镇定问题的研究已取得了一些进展[1,2,3]．但所得的结果尚有一定局限性，所讨论的对象或是输入通道中不含有不确定性，或是单输入系统．本文进一步讨论存在上述不确定性的多输入系统的鲁棒控制问题．

文中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示最大和最小特征值；$(\cdot)^T$ 表示转置；$\|\cdot\|$ 为 Euclidean 模．

考虑一类线性离散时间不确定系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=(A+\Delta A(\boldsymbol{r}(k)))\boldsymbol{x}(k)+(B+\Delta B(\boldsymbol{s}(k)))\boldsymbol{u}(k)+C\boldsymbol{w}(k), \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{u}\in R^m$，$\boldsymbol{w}\in R^l$ 分别为状态、输入和外部干扰；A, B 和 C 是具有适当维数的常数矩阵；$\Delta A(\cdot)$ 和 $\Delta B(\cdot)$ 是不确定矩阵，它们的元素分别依赖于参数 $\boldsymbol{r}(k)$ 和 $\boldsymbol{s}(k)$．现作如下假设：

假设 1．标称系统（nominal system）

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k) \tag{1.2}$$

是可稳定的．

假设 2．矩阵 B 的秩为 m（其中 $m\leqslant n$）．

假设 3．不确定量可以随时间缓慢变化，$\boldsymbol{r}(\cdot)$：$N\to\theta\in R^p$，$\boldsymbol{s}(\cdot)$：$N\to\Omega\in R^q$ 以及 $\boldsymbol{w}(\cdot)$：$N\to\phi\in R^l$，其中 θ, Ω 和 ϕ 是具有适当维数的预先规定的有界集，N 是自然数的集合．

假设 4．存在函数矩阵 $D(\cdot)$：$R^p\to R^{m\times n}$，$E(\cdot)$：$R^q\to R^{m\times m}$ 和常数矩阵 $F\in R^{m\times r}$，使得

本文于 1991 年 1 月 15 日收到．

$$
\begin{aligned}
&\Delta A(\boldsymbol{r}(k)) = BD(\boldsymbol{r}(k)),\\
&\Delta B(\boldsymbol{s}(k)) = BE(\boldsymbol{s}(k)),\\
&C = BF.
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

假设 5. $D(\boldsymbol{r}(k))$，$E(\boldsymbol{s}(k))$ 和 $\boldsymbol{g}(k) = F\boldsymbol{w}(k)$ 是有界的：

$$
\begin{aligned}
&\|D(\boldsymbol{r}(k))\| \leqslant D^*,\\
&\|E(\boldsymbol{s}(k))\| \leqslant E^*,\\
&\|\boldsymbol{g}(k)\| \leqslant G^*.
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

作者的目的是设计一个控制器，以尽量减少不确定量对系统稳定性的影响，提高系统抗不确定量干扰的能力.

二、鲁棒的线性状态反馈控制器

本文不失一般性地假设标称系统(1.2)是渐近稳定的，那么对于任意给定的对称正定矩阵 Q，总存在一个对称正定矩阵 P，满足

$$A^TPA - P + Q = 0. \tag{2.1}$$

对于系统(1.1)，定义李雅普诺夫函数

$$V(\boldsymbol{x}(k)) = \boldsymbol{x}^T(k)P\boldsymbol{x}(k). \tag{2.2}$$

引理 1. 对于矩阵 $E \in R^{m\times m}$ 和对称正定矩阵 $P_1 \in R^{m\times m}$，如果 $\|E\| \leqslant E^*$，并且

$$E^* < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P_1)}{\lambda_{\max}(P_1)}}, \tag{2.3}$$

则 $P_1 - E^TP_1E$ 是正定的(证明略).

定理 1. 考虑由(1.1)式所描述的离散时间不确定系统，如果假设 1—5 被满足，并且

$$E^* < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(B^TPB)}{\lambda_{\max}(B^TPB)}}, \tag{2.4}$$

那么在控制律

$$\boldsymbol{u}^*(k) = -(B^TPB)^{-1}B^TPA\boldsymbol{x}(k) \tag{2.5}$$

的作用下，李雅普诺夫函数(2.2)向前一步的变化差满足不等式

$$\Delta V = V(\boldsymbol{x}(k+1)) - V(\boldsymbol{x}(k)) \leqslant -A_1\|\boldsymbol{x}(k)\|^2 + A_2\|\boldsymbol{x}(k)\| + A_3, \tag{2.6}$$

其中

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \lambda_{\min}(Q) - \frac{\lambda_{\max}(B^TPB)\lambda_{\min}(B^TPB)D^{*2}}{\lambda_{\min}(B^TPB) - \lambda_{\max}(B^TPB)E^{*2}},\\
A_2 &= \frac{2\lambda_{\max}(B^TPB)\lambda_{\min}(B^TPB)D^*G^*}{\lambda_{\min}(B^TPB) - \lambda_{\max}(B^TPB)E^{*2}},\\
A_3 &= \frac{\lambda_{\max}(B^TPB)\lambda_{\min}(B^TPB)G^*}{\lambda_{\min}(B^TPB) - \lambda_{\max}(B^TPB)E^{*2}}.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

证明. 将(1.3)式代入(1.1)式得

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + B(\boldsymbol{h}(k) + \boldsymbol{u}(k)), \tag{2.8}$$

式中

$$h(k)=Dx(k)+Eu(k)+g(k). \tag{2.9}$$

根据(2.2)式和(2.8)式，有

$$\begin{aligned}\Delta V=&\ x^T(k)(A^TPA-P)x(k)+2h^T(k)(B^TPBu(k)+B^TPAx(k))\\&+2x^T(k)A^TPBu(k)+h^T(k)B^TPBh(k)+u^T(k)B^TPBu(k).\end{aligned}\tag{2.10}$$

将(2 1)式和(2.5)式代入(10)式得

$$\begin{aligned}\Delta V=&-x^T(k)Qx(k)-u^{*T}(k)(B^TPB-E^TB^TPBE)u^*(k)\\&+2(Dx(k)+g(k))^TB^TPBEu^*(k)+(Dx(k)\\&+g(k))^TB^TPB(Dx(k)+g(k)).\end{aligned}\tag{2.11}$$

根据条件(2.4)式由引理 1 知：$B^TPB-E^TB^TPBE$ 是非奇异的. 将(2.11)式变为

$$\begin{aligned}\Delta V=&-x^T(k)Qx(k)+(Dx(k)+g(k))^T[B^TPBE(B^TPB\\&-E^TB^TPBE)^{-1}E^TB^TPB+B^TPB](Dx(k)+g(k))\\&-(u^*(k)-v(k))^T(B^TPB-E^TB^TPBE)(u^*(k)-V(k)),\end{aligned}\tag{2.12}$$

其中

$$V(k)=(B^TPB-E^TB^TPBE)^{-1}E^TB^TPB(Dx(k)+g(k)). \tag{2.13}$$

根据众所周知的矩阵恒等式

$$(J+KLM)^{-1}=J^{-1}-J^{-1}K(L^{-1}+MJ^{-1}K)^{-1}MJ^{-1}, \tag{2.14}$$

其中 J，L和 $J+KLM$ 皆为非奇异矩阵，有

$$\begin{aligned}B^TPBE(B^TPB-E^TB^TPBE)^{-1}E^TB^TPB+B^TPB=&[(B^TPB)^{-1}\\&-E(B^TPB)^{-1}E^T]^{-1}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

因为 $B^TPB-E^TB^TPBE$ 为正定，故由(2.12)和(1.4)式得

$$\begin{aligned}\Delta V\leqslant&-x^T(k)Qx(k)+(Dx(k)+g(k))^T[(B^TPB)^{-1}\\&-E(B^TPB)^{-1}E^T]^{-1}(Dx(k)+g(k))\\\leqslant&-\lambda_{\min}(Q)\|x(k)\|^2+\frac{\lambda_{\min}(B^TPB)\lambda_{\max}(B^TPB)\ (D^*\|x(k)\|+G^*)^2}{\lambda_{\min}(B^TPB)-\lambda_{\max}(B^TPB)E^{*2}}\\=&-A_1\|x(k)\|^2+A_2\|x(k)\|+A_3,\end{aligned}\tag{2.16}$$

式中 A_1，A_2 和 A_3 由(2.7)式定义.

根据定理 1，很容易得到下面两个推论.

推论 1. 如果假设 1—5 被满足，并且不等式

$$\lambda_{\min}(Q)>\frac{\lambda_{\min}(B^TPB)\lambda_{\max}(B^TPB)D^{*2}}{\lambda_{\min}(B^TPB)-\lambda_{\max}(B^TPB)E^{*2}} \tag{2.17}$$

成立，那么系统(1.1)在控制律(2.5)作用下，其状态有界.

推论 2. 如果没有外部干扰，并且不等式(2.17)成立，那么在控制律(2.5)的作用下，不确定系统(1.1)是渐近稳定的.

讨论. 同文献[2,3]所给出的结果进行比较，本文的结果是最好的，给出的控制律能够忍受更大的不确定量变化范围. 并且由于这个控制律是状态的连续函数，因此可以避免文献[2,3]所给出的控制器的缺点，即由于控制律的非线性而在系统中产生振荡.

三、仿真例子

现对如下系统进行仿真研究：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = (A+\Delta A)\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + (B+\Delta B)\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} g_1(k) \\ g_2(k) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.24 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

取 Q 为单位矩阵，解方程(2.1)得 $P = \begin{bmatrix} 1.131 & 0.144 \\ 0.144 & 2.28 \end{bmatrix}$，鲁棒控制律为

$$u_1(k) = -\frac{1}{1.5}x_2(k), \quad u_1(k) = -0.24x_1(k) - 0.2x_2(k). \quad (3.2)$$

为了清楚地说明问题，首先设定不确定量固定进行仿真。

1）不确定量是固定的．设定

$$D = E = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix},$$

$g_1(k)$ 和 $g_2(k)$ 为任意常数．经计算得

$$\frac{\lambda_{\max}(B^TPB)\lambda_{\min}(B^TPB)D^{*2}}{\lambda_{\min}(B^TPB) - \lambda_{\max}(B^TPB)E^{*2}} = 0.964 < 1,$$

满足本文给出的稳定条件。

由此可以看出，当不存在不确定量时，系统为标称系统，且是渐近稳定的．但由于不确定量的干扰，$A+\Delta A$ 变为不稳定．在控制律(3.2)的作用下，闭环极点为 0 和 0.318 因此闭环系统是稳定的．由此可以看到本文所给出的鲁棒控制器的作用。

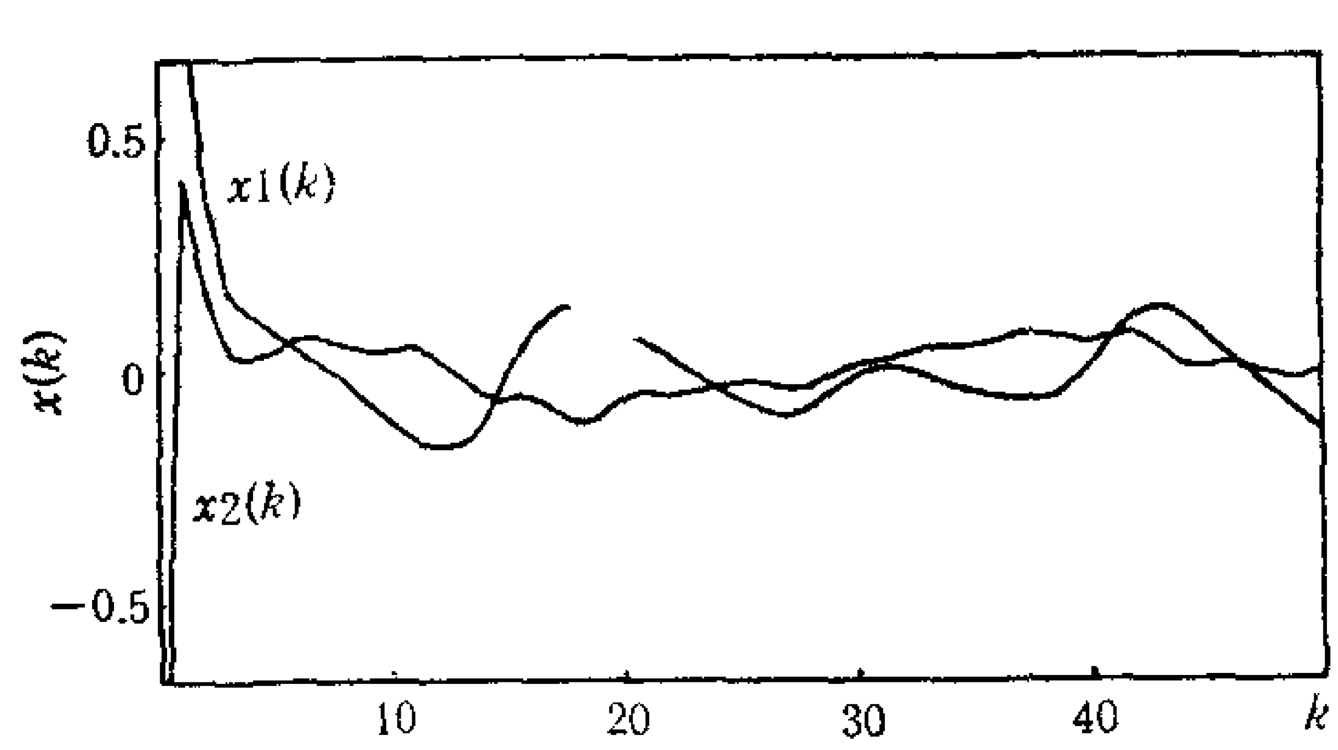

图 1

2）不确定量是时变的．设定

$$D = 0.25\begin{bmatrix} \cos(0.15k\pi) & \sin(0.1k\pi) \\ \cos(0.3k\pi) & \sin(0.1k\pi) \end{bmatrix},$$

$$E = 0.25\begin{bmatrix} \cos(0.2k\pi) & \sin(0.15k\pi) \\ \sin(0.1k\pi) & \cos(0.05k\pi) \end{bmatrix},$$

$$g_1(k) = 0.05(\cos(0.1k\pi) + \sin(0.15k\pi)),$$

$$g_2(k) = 0.05(\sin(0.06k\pi) + \cos(0.06k\pi)),$$

此时也满足本文给出的稳定条件．因此，系统是稳定的．图 1 所示的仿真结果验证了这一点。

参考文献

[1] Corless, M. and Manela, J., Control of Uncertain Discrete Time System, *Amer. Contrl. Conf.*, (1986), 515—520.

[2] Magana, M. E. and Zak, S. H., Robust State Feedback of Discrete-time Uncertain Dynamic System, *IEEE*

Trans. Automat. Contrl., **AC-33**(1988), 887—891.
[3] Yang, W. C. and Tomizuka, M., Discrete-time Robust Control via State Feedback for Single Input Systems, *IEEE Trans. Automat. Contrl.*, **AC-35**(1990), 590—598.

ROBUST CONTROL FOR A CLASS OF DISCRETE-TIME UNCERTAIN SYSTEMS

GU XINGYUAN YU XIANGGANG
(Dept. of Automatic Control, Northeast University of Technology, Shenyang 110006)

ABSTRACT

A linear state feedback controller for a class of discrete-time uncertain systems with multi-inputs is presented. The controller is designed based on the second method of Lyapunov. The stability of systems is analysed and the sufficent conditions for it are obtained. Finally, a simulation example is given.

Key words: Uncertain systems; robust control; Lyapunov function.