

黄金分割在自适应鲁棒控制器 设计中的应用

解永春 吴宏鑫

(北京控制工程研究所, 100080)

摘 要

本文基于全系数自适应控制理论^[1], 介绍黄金分割自适应鲁棒控制器的设计方法及其实际应用, 并从理论上证明了: 在采样周期满足一定条件下, 对于参数未知、线性定常或慢变的二阶对象, 黄金分割自适应控制器可以保证控制系统在起动过程中的稳定性和良好的过渡特性。从而为二阶系统在初始过渡过程阶段实现自适应控制提供了理论依据。本文最后给出了仿真研究结果。

关键词: 黄金分割, 自适应, 鲁棒控制器。

一、引 言

自适应控制理论主要研究不确定性对象或事先很难确知的对象。在自适应控制系统的起动过程中, 如何保证闭环系统的稳定性和动态品质是目前急需解决的重要理论和应用问题。文[1]给出了连续对象离散化后差分方程系数的约束条件及取值范围, 并指出用黄金分割法寻找初始参数, 可使初始参数选择得较接近真值。由于相当大一类慢变过程的工业控制系统都可以用二阶模型近似, 所以文[1]对二阶系统提出了黄金分割与最小方差相结合的反馈控制决策。这种方法设计简单、调试方便、鲁棒性强, 能使初始过渡过程平稳, 已在五类对象的一百多个具体系统中取得了成功的应用。本文利用 Jury 稳定性判据^[2,3]证明了黄金分割与最小方差相结合的反馈控制决策对于参数估值的鲁棒稳定性, 并给出了参数估计值等于真值情况下的动态性能指标分析。从而为二阶系统在初始过渡过程阶段实现自适应控制提供了理论依据。

二、差分方程系数的取值范围

若二阶对象的动力学过程能用微分方程

$$\dot{y} = a_1 \dot{y} + a_0 y + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (2.1)$$

描述,则其相应的差分方程为

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \beta_0 u(k-1) + \beta_1 u(k-2). \quad (2.2)$$

其中, $y(k)$ 为输出误差, $u(k)$ 为控制量.

根据全系数自适应控制理论^[1], 工程上可使 $\beta_0 \in [0.003, 0.3]$, $\beta_1 = 0$. 当采样周期 Δt 与最小等效时间常数 T_{\min} 之比满足 $\frac{\Delta t}{T_{\min}} \in \left[\frac{1}{10}, \frac{1}{3} \right]$ 时, 对于稳定对象可以证明

$$1.4331 \leq \alpha_1 < 1.9975, \quad (2.3)$$

$$-1 < \alpha_2 \leq -0.5134, \quad (2.4)$$

$$0.9196 \leq \alpha_1 + \alpha_2 < 1. \quad (2.5)$$

当 $\frac{\Delta t}{T_{\min}} \in \left[\frac{1}{10}, \frac{1}{4} \right]$ 时, 对于不稳定对象可以证明

$$1.9844 \leq \alpha_1 \leq 2.2663, \quad (2.6)$$

$$-1.2840 \leq \alpha_2 \leq -1, \quad (2.7)$$

$$0.9646 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1, \quad (2.8)$$

其中最小等效时间常数 T_{\min} 定义如下:

设二阶对象式(2.1)的两个极点分别为 p_1 、 p_2 , 则

1) 若 p_1 、 p_2 全是负实数, 则定义最小等效时间常数 $T_{\min} = \min \left[-\frac{1}{p_1}, -\frac{1}{p_2} \right]$.

2) 若 $p_1 \geq 0$ 、 $p_2 \geq 0$, p_1 、 p_2 不同时为零, 则定义最小等效时间常数

$$T_{\min} = \min \left[\frac{1}{2p_1}, \frac{1}{2p_2} \right].$$

3) 若 p_1 、 p_2 为一对共轭复数根, 不妨设 $p_1 = \sigma + j\omega$, $p_2 = \sigma - j\omega$ ($\omega > 0$), 则定义最小等效时间常数

$$T_{\min} = \min \left[\left| \frac{1}{2\sigma} \right|, \frac{1}{2\omega} \right].$$

限于篇幅证明过程从略.

设 $\hat{\alpha}_1$ 、 $\hat{\alpha}_2$ 、 $\hat{\beta}_0$ 分别为 α_1 、 α_2 、 β_0 的估计值, 则在 α_1 、 α_2 、 β_0 的取值范围一定的情况下, 在参数估计时对 $\hat{\alpha}_1$ 、 $\hat{\alpha}_2$ 、 $\hat{\beta}_0$ 相应地加以限制是合理的.

三、黄金分割在稳定对象自适应鲁棒控制器设计中的应用

设参数未知的线性定常二阶对象离散化后的差分方程为

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \beta_0 u(k-1) + e(k), \quad (3.1)$$

其中 $e(k)$ 为零均白噪声. 设计控制律

$$u(k) = -[L_1 \hat{\alpha}_1 y(k) + L_2 \hat{\alpha}_2 y(k-1)] / \hat{\beta}_0, \quad (3.2)$$

其中 $0 < L_1 \leq 1$, $0 < L_2 \leq 1$.

当 $L_1 = 1$, $L_2 = 1$ 时, 式(3.2)即为最小方差自校正控制律; 当 $L_1 = 0.382$, $L_2 = 0.618$ (即黄金分割系数)时, 称式(3.2)为黄金分割自适应控制律. 采用最小方差自校正

控制律虽然在参数估计值等于真值时闭环系统的特征根 $z_{1,2} = 0$, 但是在参数估计值不等于真值时闭环系统可能不稳定, 所以在自适应控制系统的起动过程中很难应用. 采用黄金分割自适应控制律, 虽然在参数估计值等于真值时不能保证闭环系统稳态输出误差的方差最小, 但能保证闭环系统有较好的动态品质, 而且在参数估计值不等于真值时, 闭环系统稳定. 因此黄金分割自适应控制器作为一种次优控制器具有重要的实际应用价值. 为证明黄金分割自适应控制器的鲁棒性, 下面给出两个引理:

引理 1. 设参数未知的线性定常二阶对象离散化后的差分方程为

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \beta_0 u(k-1) + e(k), \quad (3.1)$$

$\alpha_1 \in [1.4, 2]$, $\alpha_2 \in [-1, -0.5]$, 且 α_1, α_2 满足式 (2.5), $0.5\beta_0 \leq \hat{\beta}_0 < \infty$, 若设计控制器

$$u(k) = -[L_1 \hat{\alpha}_1 y(k) + L_2 \hat{\alpha}_2 y(k-1)] / \hat{\beta}_0, \quad (3.2)$$

当 L_1, L_2 位于图 1 所示的三角形 $\triangle ABC$ 内时, 则闭环系统稳定.

证明, 由题设知道闭环系统的特征方程式为

$$z^2 + \left(\frac{\beta_0}{\hat{\beta}_0} L_1 \hat{\alpha}_1 - \alpha_1 \right) z + \left(\frac{\beta_0}{\hat{\beta}_0} L_2 \hat{\alpha}_2 - \alpha_2 \right) = 0, \quad (3.3)$$

根据 Jury 稳定性判据^[2], 当且仅当下列不等式成立时, 闭环系统稳定.

$$\left| \frac{\beta_0}{\hat{\beta}_0} L_2 \hat{\alpha}_2 - \alpha_2 \right| < 1, \quad (3.4)$$

$$1 + \left(\frac{\beta_0}{\hat{\beta}_0} L_1 \hat{\alpha}_1 - \alpha_1 \right) + \left(\frac{\beta_0}{\hat{\beta}_0} L_2 \hat{\alpha}_2 - \alpha_2 \right) > 0, \quad (3.5)$$

$$1 - \left(\frac{\beta_0}{\hat{\beta}_0} L_1 \hat{\alpha}_1 - \alpha_1 \right) + \left(\frac{\beta_0}{\hat{\beta}_0} L_2 \hat{\alpha}_2 - \alpha_2 \right) > 0. \quad (3.6)$$

因设 $0.5\beta_0 \leq \hat{\beta}_0 < \infty$, 则有 $0 < \frac{\beta_0}{\hat{\beta}_0} \leq 2$ 成立.

根据各个量的取值范围, 通过求线性不等式 (3.4) — (3.6) 的相容解, 可以推出保证闭环系统稳定的 L_1, L_2 应满足:

$$L_2 < 1.9196 L_1, \quad (3.7)$$

$$L_2 < 1.45 - 2L_1, \quad (3.8)$$

$$L_2 > 0. \quad (3.9)$$

在 L_1-L_2 平面上, 满足要求的 L_1, L_2 位于图 1 所示的三角形 $\triangle ABC$ 内. 证毕.

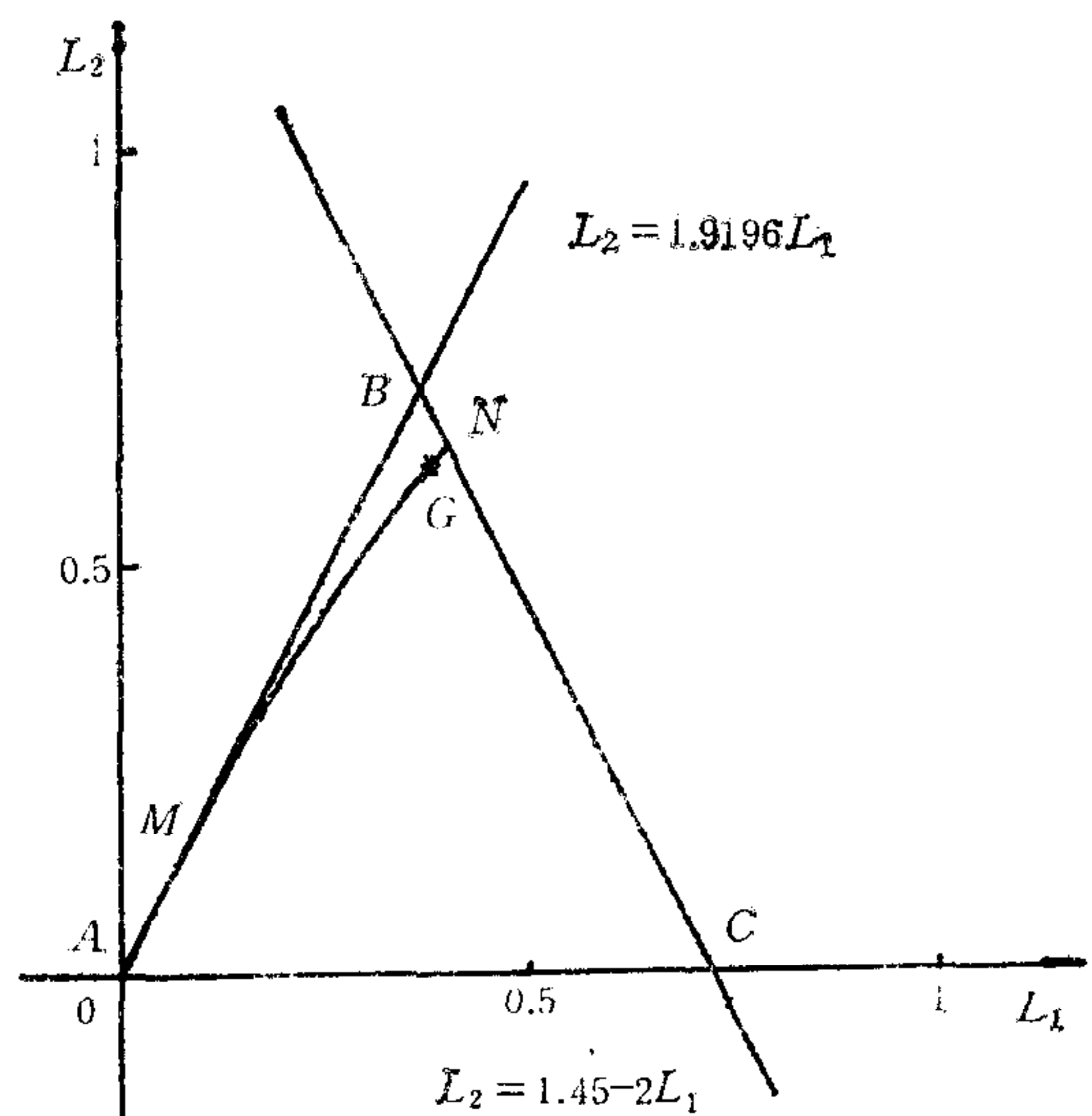


图 1 控制器参数 L_1, L_2 的取值范围

引理 2. 设参数未知、稳定的线性定常二阶对象离散化后的差分方程为式 (3.1), 控制器为式 (3.2). 当 $L_1 \in (0, 1)$, $L_2 = 1 - (1 - L_1)^2$ 时, 则在参数估计值收敛于真值以后有

1) 在 Z 平面上, 闭环极点 z_i 与开环极点 z_{oi} 之间满足

$$z_i = (1 - L_1)z_{oi} \quad (i = 1, 2),$$

闭环极点都在以 $1 - L_1$ 为半径的圆内.

2) 在 S 平面上, 系统开环极点向左平移 $\frac{1}{\Delta t} |\ln(1 - L_1)|$ 后即为闭环极点. 若开

环系统是欠阻尼系统, 记 $g = \frac{T_{\min}}{\Delta t} \in [3, 10]$, 则 $M_p \leq M_{p0} e^{2g\pi \ln(1 - L_1)}$,

$$t_s \leq \frac{t_{s0}}{1 - 2g \ln(1 - L_1)}.$$

其中 M_{p0} 为开环最大超调量, t_{s0} 为开环调整时间; M_p 为闭环最大超调量, t_s 为闭环调整时间.

证明. 由题设知道在参数估计值收敛于真值以后, 闭环系统的特征方程式为

$$z^2 + (L_1 - 1)\alpha_1 z + (L_2 - 1)\alpha_2 = 0. \quad (3.10)$$

设稳定的二阶连续对象的两个极点分别为 p_1 、 p_2 , 则离散化后差分方程式 (3.1) 的系数 $\alpha_1 = e^{p_1 \Delta t} + e^{p_2 \Delta t}$, $\alpha_2 = -e^{(p_1 + p_2) \Delta t}$, 对应开环极点 $z_{oi} = e^{p_i \Delta t}$, $i = 1, 2$. 若 L_1, L_2 满足 $L_2 = 1 - (1 - L_1)^2$, 其中 $L_1 \in (0, 1)$, 则闭环系统特征方程式 (3.10) 的根为

$$z_i = (1 - L_1)z_{oi}, \quad (i = 1, 2). \quad (3.11)$$

对于稳定对象, $|z_{oi}| < 1$ ($i = 1, 2$), 所以

$$|z_i| < 1 - L_1, \quad (i = 1, 2). \quad (3.12)$$

由变换关系式 $s = \frac{1}{\Delta t} \ln z$ 可以算出 z_1 、 z_2 所对应的 S 域的两个闭环极点分别为

$$s_i = p_i + \frac{1}{\Delta t} \ln(1 - L_1), \quad (i = 1, 2). \quad (3.13)$$

由于 $0 < 1 - L_1 < 1$, 所以 $\ln(1 - L_1) < 0$. 因此说在 S 平面上, 系统开环极点向左平移 $\frac{1}{\Delta t} |\ln(1 - L_1)|$ 后即为闭环极点.

若开环系统是欠阻尼系统, 则根据系统最大超调量和系统调整时间的定义可以推出

$$M_p \leq M_{p0} e^{2g\pi \ln(1 - L_1)}, \quad (3.14)$$

$$t_s \leq \frac{t_{s0}}{1 - 2g \ln(1 - L_1)}. \quad (3.15)$$

证毕.

根据引理 1、引理 2 可以证明黄金分割自适应控制律具有如下特性:

定理 1. 设参数未知、稳定的线性定常二阶对象离散化后的差分方程为式 (3.1), 其中 $\alpha_1 \in [1.4331, 1.9975)$, $\alpha_2 \in (-1, -0.5134]$, 且 α_1, α_2 满足式 (2.5), $0.5\beta_0 \leq \hat{\beta}_0 < \infty$, 控制器为式 (3.2). 当 $L_1 = 0.382$, $L_2 = 0.618$ 时, 则

1) 闭环系统稳定.

2) 在参数估计值收敛于真值以后, 在 Z 平面上, 闭环极点 z_i 和开环极点 z_{oi} 之间满足 $z_i = 0.618z_{oi}$ ($i = 1, 2$), 闭环极点都在以 0.618 为半径的圆内。在 S 平面上, 系统开环极点向左平移 $\left| \frac{\ln(0.618)}{\Delta t} \right|$ 后即为闭环极点。特别地, 开环系统是欠阻尼系统时, 记

$g = \frac{T_{\min}}{\Delta t} \in [3, 10]$, 则闭环最大超调量 $M_p \leq e^{2g\pi \ln(0.618)} M_{p0}$, 闭环调整时间

$$t_s \leq \frac{5\sigma}{1 - 2g \ln(0.618)}.$$

证明. 由引理 1、引理 2 可知, 对于定理 1 给出的二阶对象, 采用控制律式 (3.2), 当 L_1, L_2 取抛物线 $L_2 = 1 - (1 - L_1)^2$ 在图 1 所示的三角形 $\triangle ABC$ 内的部分 ($0.080 < L_1 < 0.403$), 即图 1 所示曲线弧 \widehat{MN} 上的点时, 闭环系统稳定, 且在参数估计值收敛于真值以后, 就所有参数未知、稳定的二阶系统而言, 闭环系统性能都得到了相同程度的改善, 而且 L_1 越大, 控制律式 (3.2) 与最小方差控制律越接近, 系统性能越好, 即闭环极点距离原点越近, 闭环最大超调量越小, 闭环调整时间越短. 当 $L_1 \rightarrow 0.403$ 时, $L_1 + L_2 \rightarrow 1.047$. 考虑到为参数估计最坏的情况留 5% 的稳定裕度, 取 $L_1 + L_2 = 1$. $L_1 + L_2 = 1$ 与 $L_2 = 1 - (1 - L_1)^2$ 联立, 解得

$$L_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382,$$

$$L_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

图 1 中的点 G 即为黄金分割点. 当 $L_1 = 0.382$, $L_2 = 0.618$ 时, 题设满足引理 1、引理 2 的条件, 根据引理 1、引理 2, 可以得出定理 1 的结论.

下面给出稳定对象的黄金分割自适应跟踪控制器的设计方法及鲁棒性结论.

对定理 1 中的稳定对象设计跟踪控制器

$$u_0(k) = [T_M(k+1) - \hat{\alpha}_1 T_M(k) - \hat{\alpha}_2 T_M(k-1)] / \hat{\beta}_0, \quad (3.16)$$

$$u_L(k) = -[L_1 \hat{\alpha}_1 y(k) + L_2 \hat{\alpha}_2 y(k-1)] / \hat{\beta}_0, \quad (3.17)$$

$$u(k) = u_0(k) + u_L(k). \quad (3.18)$$

其中, $T(k)$ 为实际输出, $T_M(k)$ 为跟踪模型输出, 输出误差 $y(k) = T(k) - T_M(k)$, $u(k)$ 为总控制量, $u_0(k)$ 为维持控制量, $u_L(k)$ 为反馈控制量.

此时闭环系统的特征方程式仍为式 (3.3), 根据引理 1、引理 2 及定理 1 可知: 当 $L_1 = 0.382$, $L_2 = 0.618$ 时, 闭环系统稳定, 且在参数估计值收敛于真值以后, 闭环极点 z_i 和开环极点 z_{oi} 之间满足 $z_i = 0.618z_{oi}$ ($i = 1, 2$).

进入稳态之后

$$T(k) = T_M(k) + y(k),$$

$$y(k) = \frac{1}{1 - (1 - L_1)\alpha_1 - (1 - L_2)\alpha_2} e(k),$$

即 $T(k)$ 能跟踪 $T_M(k)$, 且因 $0 < 1 - (1 - L_1)\alpha_1 - (1 - L_2)\alpha_2 < 1$, 所以输出误差的方差不是最小方差. 这时可将 L_1, L_2 沿 $L_2 = 1 - (1 - L_1)^2$ ($0 < L_1 \leq 1$) 光滑切换到

$L_1 = 1$ 、 $L_2 = 1$ ，即最小方差控制。但对于参数慢时变系统不存在切换问题。

四、黄金分割在不稳定对象自适应鲁棒 控制器设计中的应用

对于参数未知、非稳定的线性定常二阶对象，也可按黄金分割自适应控制律设计闭环系统。

定理 2. 设参数未知、非稳定的线性定常二阶对象离散化后的差分方程为式(3.1)，其中 $\alpha_1 \in [1.9844, 2.2663]$ ， $\alpha_2 \in [-1.2840, -1]$ ，且 α_1, α_2 满足式(2.8)， $0.5\beta_0 \leq \hat{\beta}_0 \leq 2\beta_0$ ，控制器为式(3.2)。当 $L_1 = 0.382$ 、 $L_2 = 0.618$ 时，则

1) 闭环系统稳定。

2) 在参数估计值收敛于真值以后，在 Z 平面上，闭环极点 z_i 和开环极点 z_{oi} 之间满足 $z_i = 0.618z_{oi}$ ($i = 1, 2$)，闭环极点都在以 0.701 为半径的圆内。在 S 平面上，系统开环极点向左平移 $\frac{0.481}{\Delta t}$ 后即为闭环极点。特别地，当开环系统是欠阻尼系统时，记

$g = \frac{T_{\min}}{\Delta t} \in [4, 10]$ ，则闭环最大超调量 $M_p \leq e^{(1-0.962g)\pi}$ ，闭环调整时间

$$t_s \leq 4\Delta t / \left(0.481 - \frac{0.5}{g} \right).$$

定理 2 的证明思路同定理 1，这里从略。

不稳定对象的黄金分割自适应跟踪控制器的设计方法及鲁棒性结论与稳定对象的相同。

五、仿 真 研 究

本节通过计算机仿真，验证本文的主要结论。

1) 仿真对象。

设线性定常二阶对象的仿真模型为式(3.1)。

2) 参考模型。

借用模型参考自适应控制的思想，把系统过渡过程性能指标的要求转化为一个时间函数的输入输出模型，从而实现性能指标的闭环控制。

3) 参数估计。

采用最小二乘参数估计方法估计 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0$ 。

4) 控制器设计。

维持控制量、反馈控制量、总控制量分别按式(3.16)、(3.17)、(3.18)计算。

5) 仿真结果。

表 1 是在参数估计最坏的情况下，对象参数取四组不同的值时的仿真结果。从表 1 可以看出：只有当 $L_1 = 0.382$ 、 $L_2 = 0.618$ 时，上述四种情况下闭环系统都稳定；而当

L_1, L_2 取其他值时, 不能保证所有闭环系统都稳定。

表 1 参数估计最坏情况下的仿真结果

对象参数	参数估值	L_1, L_2	闭环极点	闭环稳定性
$\alpha_1 = 1.44$ $\alpha_2 = -.52$ $\beta_0 = .1$	$\hat{\alpha}_1 = 1.9$ $\hat{\alpha}_2 = -.91$ $\hat{\beta}_0 = .05$.382 .618	-.784 .772	稳定
		1 1	-2.82 .461	不稳定
		.45 .55	-.842 .572	稳定
		.35 .67	.893 -.783	稳定
$\alpha_1 = 1.9$ $\alpha_2 = -.91$ $\beta_0 = 0.1$	$\hat{\alpha}_1 = 1.44$ $\hat{\alpha}_2 = -.52$ $\hat{\beta}_0 = .05$.382 .618	.400± .328i	稳定
		1 1	-1.10 .118	不稳定
$\alpha_1 = 2$ $\alpha_2 = -1$ $\beta_0 = .1$	$\hat{\alpha}_1 = 2.26$ $\hat{\alpha}_2 = -1.28$ $\hat{\beta}_0 = .05$.382 .618	.912 -.638	稳定
		1 1	-3.03 .514	不稳定
		.45 .55	-.656 .662	稳定
		.35 .67	1.08 -.662	不稳定
$\alpha_1 = 2.26$ $\alpha_2 = -1.28$ $\beta_0 = .05$	$\hat{\alpha}_1 = 2$ $\hat{\alpha}_2 = -1$ $\hat{\beta}_0 = .1$.382 .618	.939±.299i	稳定
		1 1	.630±.619i	稳定
		.45 .55	.905±.431i	不稳定
		.35 .67	.955±.182i	稳定

图2、图3分别为按黄金分割自适应控制律和按最小方差自校正控制律设计的控制系统的输出曲线。图中的实线为 $T(k)$, 虚线为 $T_M(k)$ 。二阶对象是不稳定的。在初始过渡过程阶段, 按黄金分割自适应控制律设计的控制系统的输出曲线比按最小方差自校正控制律设计的控制系统的输出曲线平稳。

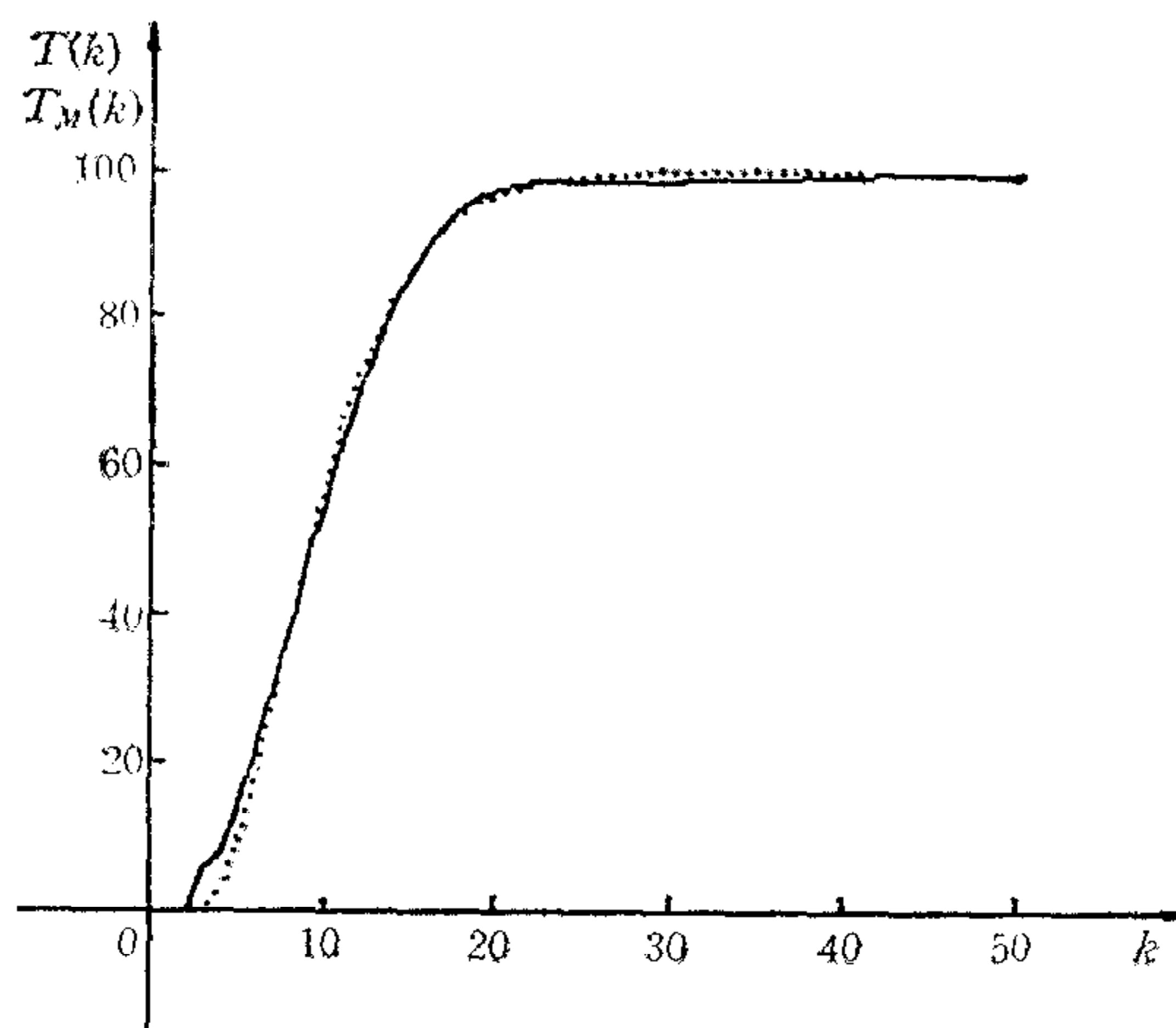


图 2 二阶不稳定对象、最小二乘参数估计时的输出曲线 ($L_1 = 0.382, L_2 = 0.518$)

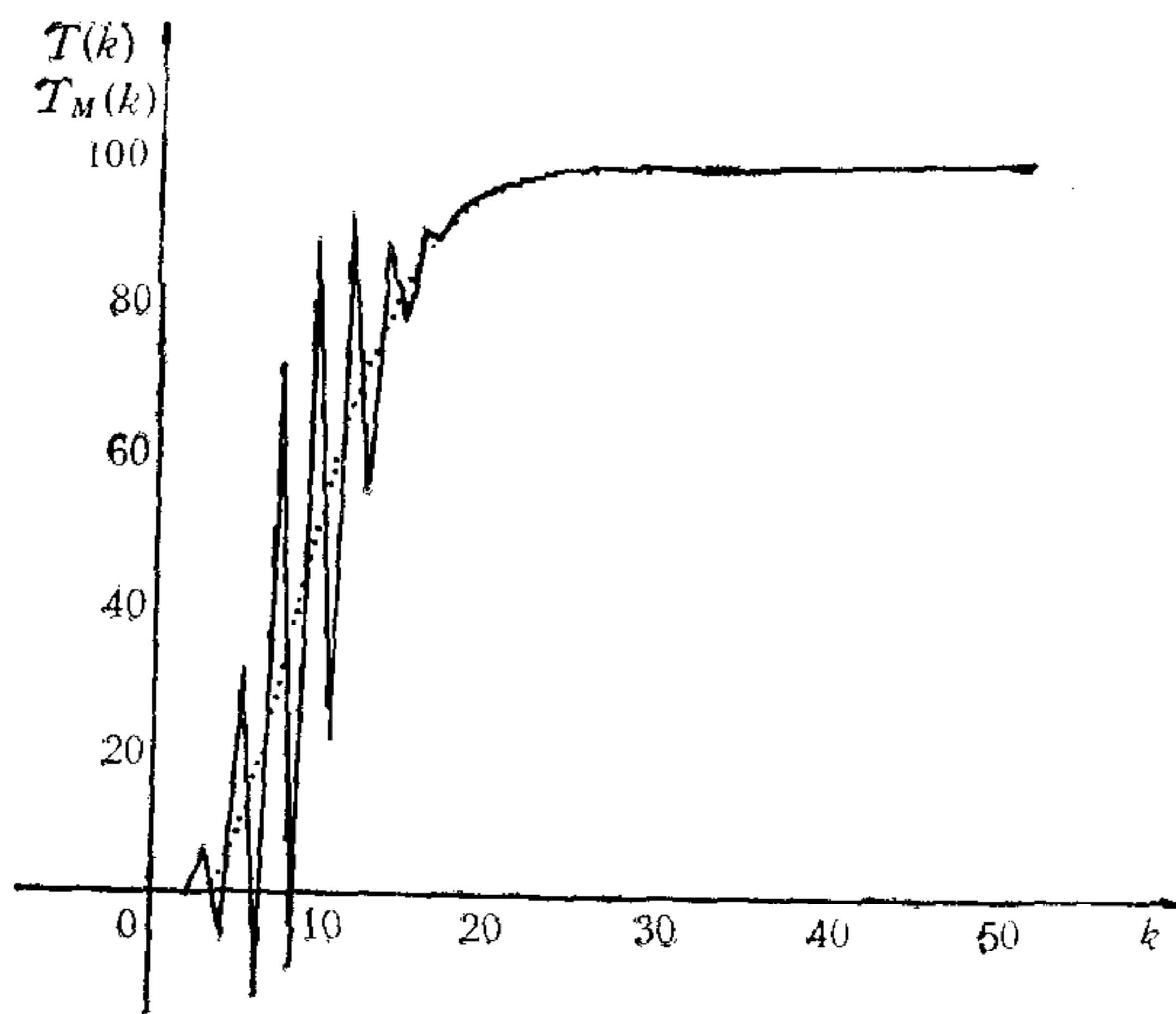


图3 二阶不稳定对象、最小二乘参数估计时的输出曲线 ($L_1 = 1, L_2 = 1$)

六、结 束 语

与现有的自适应控制方法相比,黄金分割自适应控制器具有如下优点: 1) 它克服了最小方差自校正控制器对参数过于敏感、控制量过大的缺点; 2) 不需要试凑控制加权系数 μ ; 3) 计算简单; 4) 在参数未收敛时能保证控制系统稳定. 因此黄金分割自适应控制器已成功地应用于炼油厂加热炉自适应控制、造纸厂水分基重自适应控制、航天器瞬态热流跟踪控制等^[1]. 同时该方法已推广到多变量系统、某些非线性和参数慢时变系统、滞后步数大于 1 和高阶系统. 有关这些方面的理论证明问题正在进一步研究.

致谢. 本文得到了杨嘉墀先生、屠善澄先生、黄琳教授、李清泉教授、蔡季冰教授、陈宗基教授的热心指教, 得到了本所自适应控制讨论班的帮助, 在此一并表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- [1] 吴宏鑫, 全系数自适应控制理论及其应用, 国防工业出版社, 1990.
- [2] 贺允东, 数字控制系统, 人民邮电出版社, 1986, 221—222.
- [3] E. I. Jury, Theory and Applications of the Z-Transform Method, New York: Wiley 1964; Kruger Publ. Co. (1973), chap. 3.

THE APPLICATION OF THE GOLDEN SECTION IN ADAPTIVE ROBUST CONTROLLER DESIGN

XIE YONGCHUN WU HONGXIN

(Beijing Institute of Control Engineering, 100080)

ABSTRACT

In this paper, the design method and the practical application of the golden section adaptive robust controller are introduced based upon the all-coefficients adaptive control theory. It is also proved that for second-order plants with unknown parameters, the golden section adaptive controller can make the closed-loop systems stable and dynamic characteristics satisfactory in the starting process when sampling time satisfies certain conditions. The conclusion provides theoretical support for applying adaptive control to the transient process. Finally, the results of simulation research are presented.

Key words: Golden section; adaptive; robustness controller.



解永春 1966年生于河北省秦皇岛。1989年毕业于清华大学电子工程系并获学士学位，1991年在北京控制工程研究所获自动控制理论及其应用专业硕士学位，现在继续攻读博士学位。主要从事鲁棒自适应控制理论和应用方面的研究。



吴宏鑫 1939年生。1965年清华大学自动控制系毕业。现任北京控制工程研究所智能控制与空间机器人研究室主任、研究员、博士生导师。主要从事自适应控制、智能控制等方面的研究，主要论著二十多篇，代表作《全系数自适应控制理论及其应用》。