

非线性系统迭代学习算法¹⁾

曾南 应行仁

(中国科学院自动化研究所, 北京 100080)

摘 要

对于一个未知的非线性连续系统或离散系统,从任给的一个初始控制出发,尝试实现一条给定的输出目标轨线。在满足一定条件下,利用跟踪误差来修正控制函数,经过反复的迭代学习可以取得满意的效果。本文改进了 Arimoto、Togai 和 Bien 等的开环迭代学习的收敛条件,并提出闭环迭代学习算法。理论与仿真结果证明了闭环算法在收敛条件、速度和抗干扰能力上都优于开环算法。

关键词: 非线性系统, 迭代控制, 学习算法, 智能控制。

一、引 言

对于高速运动机械手的控制, Uchiyama 提出一个思想^[1]: 不断重复一个轨线的控制尝试, 并以此修正控制律, 能达到较好控制的效果。Arimoto 等人^[2]根据这种思想提出迭代学习控制算法这是一种新颖方法, 能以非常简单的方式处理不确定程度相当高的动态系统, 且仅需较少的验前知识和计算量, 因此日益引起人们的兴趣。迭代学习的基本算法有 P 型与 D 型两种, 前者只用误差信息, 后者用到了误差微分。为了避免微分操作, Arimoto^[3]、Mita^[4,5]、M. Togai^[6,7]、Z. Bien^[8] 等人分别从连续系统、离散系统分析与频域分析入手, 对 P 型算法进行了不同侧面的研究, 证明了一些对于迭代学习收敛的算法。但这些算法要求迭代周期的起点是在目标轨线的起点上, 而且较难选取学习增益使得在满足收敛条件的同时加快学习, 由于每个迭代周期内的控制是开环的, 所以抗干扰能力差。针对这些, 本文给出了一种统一的 P 型连续算法与离散算法。它可以在较弱的条件下收敛。为了增强抗干扰能力, 提出闭环迭代学习控制算法, 并证明闭环算法在学习条件、学习速度及抗扰能力三方面都优于开环算法。

下面讨论中, 如不特别说明, 范数定义为

$$\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n,$$
$$\|G\| = \max_i \left\{ \sum_j |g_{ij}| \right\}, \quad G = (g_{ij}) \in R^{n \times m},$$

本文于1990年5月13日收到。

1) 本文得到国家自然科学基金 No.68974016 的支持, 并曾在1990年全国控制理论及应用年会上宣读。

$$\|f\|_1 \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \{e^{-\lambda t} \|f(t)\|\}, f: [0, T] \rightarrow R^n, \lambda > 0.$$

二、开环迭代学习控制

目前已有的迭代学习控制都是开环的。因为每次运行时,没有构成有回路的反馈。如图 1 所示。

1. 离散情形

考虑一个有 p 个输入, q 个输出的一般线性时变离散系统。其动态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{u}(k), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(k) = C(k)\mathbf{x}(k). \quad (2)$$

$A(k)$ 是一个 $n \times n$ 矩阵, $B(k)$ 是 $n \times p$ 矩阵, $C(k)$ 是 $q \times n$ 矩阵, $A(\cdot)$ 、 $B(\cdot)$ 、 $C(\cdot)$ 有界, k 是采样次数。采用转移矩阵 (1) 可写为

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, 0)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k, j+1)B(j)\mathbf{u}(j), \quad (1')$$

$\Phi(k, k_0) = A(k-1) \cdots A(k_0)$, 为状态转移矩阵。控制目的是找到 $\mathbf{u}(k)$ 使得输出 $\mathbf{y}(k)$ 为目标轨线 $\mathbf{y}_d(k)$, ($k = 1, 2, \dots, N$)。

在 $C(\cdot) = I$ 情况下,且满足以下约束条件:

$$1) \|I - BG\| + \|A\| \sum_{j=1}^{k-1} \|\Phi BG\| < 1, \|A\| < 1,$$

$$2) \mathbf{x}_{i+1}(0) = \mathbf{x}_i(0), \text{ 对所有 } i.$$

这里 i 是迭代次数, G 是 $p \times q$ 矩阵, 范数定义为 $\|H\| \equiv \sup_{0 \leq k \leq N} \|H(k)\|$, M. Togai 证明如下算法是收敛的:

$$\mathbf{e}_i(k) = \mathbf{y}_d(k) - \mathbf{y}_i(k), \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_{i+1}(k) = \mathbf{u}_i + G\mathbf{e}_i(k+1). \quad (4)$$

注意。式 (4) 中第 $i+1$ 次迭代控制量 \mathbf{u}_{i+1} 只与上一轮的控制量和误差有关,并没有利用当前控制系统的误差信息,所以是开环控制。

该算法避免了文献 [2] 中算法的微分操作及对 $\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_d$ 相应的要求,不足是没考虑输出方程,收敛条件与连续系统的也不对应。

重新分析离散算法,在约束条件 2) 下,由式 (1)–(4) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{i+1}(k+1) &= \mathbf{y}_d(k+1) - \mathbf{y}_i(k+1) + \mathbf{y}_i(k+1) - \mathbf{y}_{i+1}(k+1) \\ &= \mathbf{e}_i(k+1) - C(k+1) \sum_{j=0}^k \Phi(k+1, j+1)B(j)G\mathbf{e}_i(j+1) \\ &= [I - C(k+1)B(k)G]\mathbf{e}_i(k+1) \\ &\quad - C(k+1) \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k+1, j+1)B(j)G\mathbf{e}_i(j+1). \end{aligned}$$

选择适当的误差范数,可能找到较好的收敛的充分条件。基于这种认识,采用误差范

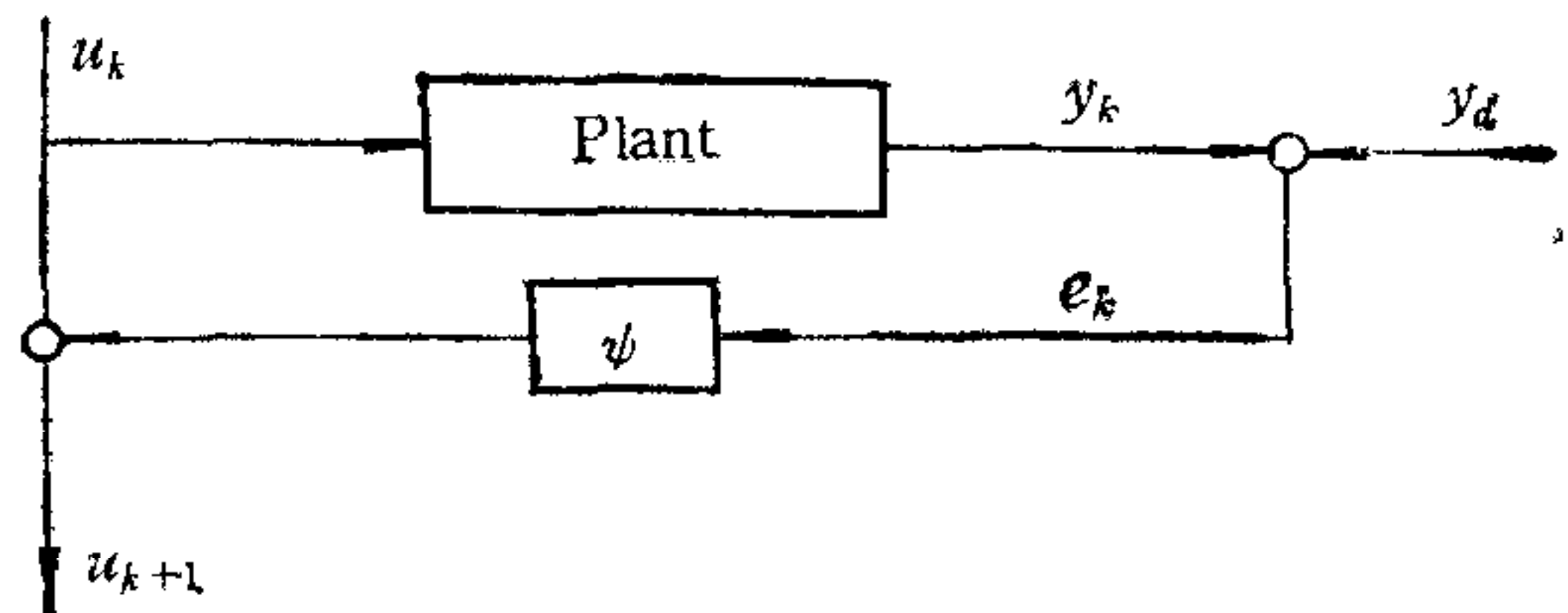


图 1 开环迭代学习控制基本结构

数

$$\|e(\cdot)\|_r \equiv \sup_{0 \leq k \leq N} \{r^k \|e(k)\|\}, \quad 0 < r < 1.$$

对于固定的 r 和 N , $\|e(\cdot)\|_r$ 收敛意味着: 对于任意的 $0 < k < N$, $\|e(k)\|$ 都可以控制到任意小的误差范围内。于是

$$\begin{aligned} r^{k+1} \mathbf{e}_{i+1}(k+1) &= (I - C(k+1)B(k)G)r^{k+1} \mathbf{e}_i(k+1) \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} r^{k-j} \Phi(k+1, j+1)B(j)G r^{j+1} \mathbf{e}_i(j+1), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} r^{k+1} \|\mathbf{e}_{i+1}(k+1)\| &\leq \|(I - C(k+1)B(k)G)\| r^{k+1} \|\mathbf{e}_i(k+1)\| \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} r^{k-j} \|\Phi(k+1, j+1)B(j)G\| r^{j+1} \|\mathbf{e}_i(j+1)\| \\ &\leq \|(I - C(k+1)B(k)G)\| r^{k+1} \|\mathbf{e}_i(k+1)\| + \sum_{j=0}^{k-1} r^{k-j} M \|\mathbf{e}_i\|_r. \end{aligned}$$

这里

$$M = \max_{k,j} \|\Phi(k+1, j+1)B(j)G\|,$$

根据范数 $\|\cdot\|_r$ 定义得到

$$\|\mathbf{e}_{i+1}\|_r \leq \left(\|I - CBG\| + \frac{Mr}{1-r} \right) \|\mathbf{e}_i\|_r \leq \rho \|\mathbf{e}_i\|_r,$$

这里

$$\rho = \|I - CBG\| + \frac{rM}{1-r} = \rho_1 + \frac{rM}{1-r}.$$

显然 $\rho < 1$ 将导致 $\|\mathbf{e}_i\|_r \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$, 这时 $r < \frac{1-\rho_1}{M+1-\rho_1}$. 亦即, 取 G 使 $\rho_1 < 1$,

则存在不为 0 的正实数 $r < \frac{1-\rho_1}{M+1-\rho_1}$ 使 $\rho < 1$. 故仅需判断 $\rho_1 < 1$ 即可. 学习

收敛条件简化为

$$\|I - CBG\| < 1.$$

把上面的分析综合成如下定理:

定理 1. 对于式 (1), (2) 描述的线性时变离散系统, 如果有

1) $\|I - C(k+1)B(k)G\| < 1, 0 \leq k \leq N$,

2) $\mathbf{x}_{i+1}(0) = \mathbf{x}_i(0)$, 对所有 i .

则离散学习算法 (3), (4) 保证: 存在一非零正数 $r \in (0, 1)$, 使 $\|\mathbf{e}_i(\cdot)\|_r \rightarrow 0 (i \rightarrow \infty)$.

注意. 当 N 有限, r 非零时, $\|e(\cdot)\|_r$ 收敛可以推出 $\|\mathbf{e}_i(k)\|$ 收敛 ($0 \leq k \leq N$), 这意味着在应用中可以通过充分的迭代学习将每一点的轨线误差控制到任给的精度. 因此定理 1 确实提供了比 M. Togai 更一般的条件而达到相同的控制目的.

2. 连续情形

考虑具有如下一般形式的非线性动态系统：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + B(t)\mathbf{u}(t), \quad (5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) + D(t)\mathbf{u}(t), \quad (6)$$

其中 $\mathbf{x} \in R^n$ 、 $\mathbf{u} \in R^p$ 、 $\mathbf{y} \in R^m$ ，在 $[0, T]$ 上有： $B(\cdot)$ 、 $D(\cdot)$ 有界， $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ 、 $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ 满足局部 Lipschitz 条件，即任给 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in W$ ， W 是 R^n 上包含目标轨线和第一次尝试轨线的一个连通区域，有

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq f_0 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \|\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq g_0 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|,$$

f_0 、 g_0 是 Lipschitz 常数。

Z. Bien 等指出 $D(t)$ 的加入使高阶算法避免了微分操作，但它要求每次迭代开始时，系统处于目标轨线上。下面的定理指出迭代不必从目标初态开始，只要起点一致即可。

定理 2. 给定由式 (5)、(6) 描述的非线性动态系统，如果式 (A)、(B)、(C) 满足，则迭代算法 $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Psi \mathbf{e}_k$ 保证 $\|\cdot\|_\lambda$ 意义下： $Y_k(\cdot) \rightarrow Y_d(\cdot)$ ($k \rightarrow \infty, \lambda$ 足够大)。

(A) $\|I - D(t)\Psi(t)\| < 1, t \in [0, T]$ 。

(B) $\mathbf{x}_{k+1}(0) = \mathbf{x}_k(0)$ ，对所有 k 。

(C) $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t)$ 时，(5) 的解在 $[0, T]$ 上存在， y_d 在 $[0, T]$ 上有界。这里 T 是一个有限的正数。证明方法与定理 3 类似，故略。

Z. Bien 等的高阶方法蜕化成一阶后，学习条件是 $\|I - \Psi(t)D(t)\| < 1$ ，与这里 $\|I - D(t)\Psi(t)\| < 1$ 仅仅是 $D(t)\Psi(t)$ 前后位置上的差别。当 $D(t)$ 有全为 0 的列向量时，Z. Bien 等的高阶方法学习条件无法成立，而本文方法却有可能；当 $D(t)$ 有全为 0 的行向量时情况刚好反过来。能否找到更一般的学习条件需要进一步的研究。

定理 2 包含 Arimoto 等的有关 D 型算法的主要结论。只要对其输出方程求一次导数，其问题就可以转化为这里的一个特例。因而 P 型算法和 D 型算法在数学上是统一的。

三、闭环迭代学习控制

实际操作中总会遇上干扰，有输入扰动，输出扰动等。前面要求每次重复都精确回到相同的位置是不可能的。它的偏离也可以视为一种扰动。开环控制抑制干扰能力较差。因而本文提出闭环迭代学习控制，如图 2 所示，在操作过程中既用到过去的经验，又根据现行观察进行调整。与开环相对，闭环算法也可分为 P、D 型基本二类。这里只讨论 P 型，D 型算法可以类推。

假定第 k 次重复时受扰学习控制系统为

$$\dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_k) + B(t)\mathbf{u}_k(t) + \boldsymbol{\xi}_k(t), \quad (7)$$

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_k) + D(t)\mathbf{u}_k(t) + \boldsymbol{\eta}_k(t), \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \Psi(t)\mathbf{e}_{k+1}(t) + \boldsymbol{\xi}_k(t), \quad (9)$$

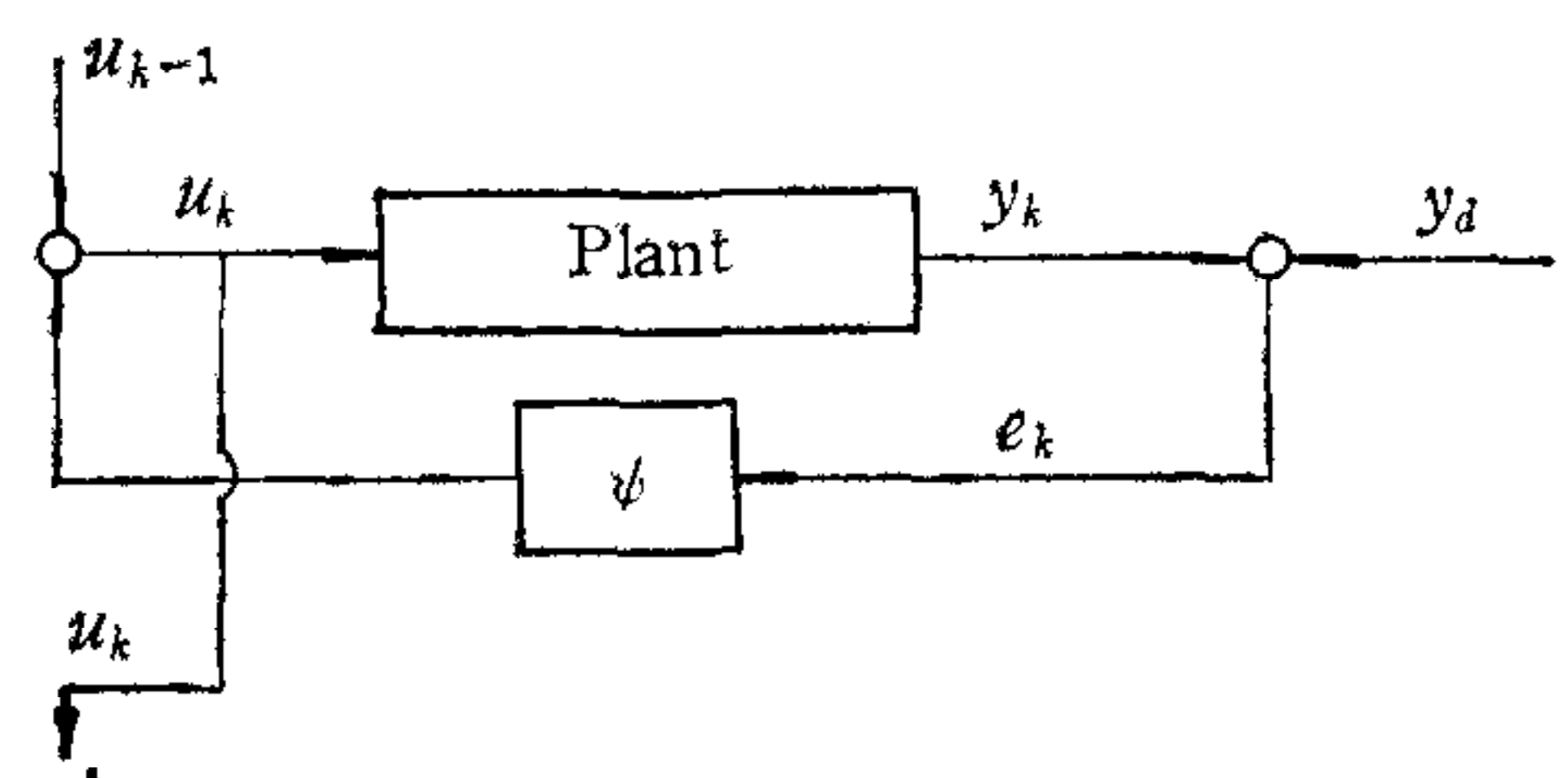


图 2 闭环学习控制基本结构

$$\mathbf{e}_{k+1}(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_{k+1}(t), \quad (10)$$

这里 $f(\cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot)$ 满足局部 Lipschitz 条件, $B(\cdot), D(\cdot)$ 有界, Ψ 是学习增益. 假设状态扰动 ζ_k 、输出扰动 η_k 、输入扰动 ξ_k 与初始扰动 $\|\mathbf{x}_{k+1}(0) - \mathbf{x}_0(0)\|$ 有同一个上界 π . 这里 π 是非负常数. 当无干扰时, $\pi = 0$.

定理 3. 给定式 (7), (8), (9), (10) 描述的受扰迭代学习控制系统.

1) 无干扰情形. 如果满足以下条件:

i) $\|(I + D(t)\Psi(t))^{-1}\| < 1, t \in [0, T]$.

ii) 在 $[0, T]$ 上, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t)$ 时, 式 (7) 存在解, $\mathbf{Y}_d(t)$ 有界.

则在 $[0, T]$ 上, $\|\cdot\|_\lambda$ 意义下, $\mathbf{Y}_k(\cdot) \rightarrow \mathbf{Y}_d(\cdot)$ ($k \rightarrow \infty, \lambda$ 足够大).

2) 有干扰情形. 如果条件 ii) 成立且存在 $\Psi(t)$ 使 $\|(I + D(t)\Psi(t))^{-1}\|$ 任意小, 则任给 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数 n , 当 $k > n$ 时, 在 $[0, T]$ 上有不等式

$$\|\mathbf{y}_k(t) - \mathbf{y}_d(t)\| < \varepsilon.$$

证明. 由控制系统的条件和 ii), 应用 Gronwall 不等式不难得出 $\mathbf{x}_k(t)$ 在 $[0, T]$ 上有界.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1}(t) &= \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t) + \mathbf{y}_k(t) - \mathbf{y}_{k+1}(t) \\ &= \mathbf{e}_k(t) - D(t)\Psi\mathbf{e}_{k+1}(t) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_k) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_{k+1}) \\ &\quad + \eta_k(t) - \eta_{k+1}(t) - D(t)\xi_k(t). \end{aligned}$$

若 $(I + D(t)\Psi(t))^{-1}$ 在 $0 \leq t \leq T$ 上存在

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1}(t) &= (I + D(t)\Psi(t))^{-1}[\mathbf{e}_k(t) + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_k) \\ &\quad - \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_{k+1}) + \eta_k(t) - \eta_{k+1}(t) - D(t)\xi_k(t)], \end{aligned}$$

两边取范数并利用 Lipschitz 条件, 则有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}(t)\| &\leq \|(I + D(t)\Psi(t))^{-1}\|[\|\mathbf{e}_k(t)\| \\ &\quad + g_0\|\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_{k+1}(t)\| + [2 + \|D(t)\|]\pi], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)\| &= \|\mathbf{x}_{k+1}(0) - \mathbf{x}_k(0) \\ &\quad + \int_0^t [f(\tau, \mathbf{x}_{k+1}(\tau)) + B(\tau)\mathbf{u}_{k+1}(\tau) + \zeta_{k+1} \\ &\quad - f(\tau, \mathbf{x}_k(\tau)) - B(\tau)\mathbf{u}_k(\tau) - \zeta_k] d\tau\| \\ &\leq f_0 \int_0^t \|\mathbf{x}_{k+1}(\tau) - \mathbf{x}_k(\tau)\| d\tau + b_\Psi \int_0^t \|\mathbf{e}_{k+1}\| d\tau + M, \end{aligned}$$

这里

$$M = 2(T + 1)\pi, \quad b_\Psi = \sup_{t \in [0, T]} \|B(t)\Psi(t)\|,$$

两边同乘以 $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, 就有

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)\| &\leq b_\Psi \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} e^{-\lambda\tau} \|\mathbf{e}_{k+1}(\tau)\| d\tau + f_0 \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} e^{-\lambda\tau} \|\mathbf{x}_{k+1}(\tau) \\ &\quad - \mathbf{x}_k(\tau)\| d\tau + M \\ &\leq \frac{b_\Psi(1 - e^{-\lambda t})}{\lambda} \|\mathbf{e}_{k+1}\|_\lambda + f_0 \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} e^{-\lambda\tau} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_\lambda d\tau + M. \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式, 有

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)\| &\leq \frac{b_\Psi(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda} e^{\frac{f_0(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda}} \|\mathbf{e}_{k+1}\|_\lambda + e^{\frac{f_0(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda}} M \\ &= O(\lambda^{-1}) \|\mathbf{e}_{k+1}\|_\lambda + e^{\frac{f_0(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda}} M, \end{aligned}$$

用 $e^{-\lambda t}$ 乘 $\|\mathbf{e}_{k+1}\|$ 不等式的两边, 再由上式得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}\|_\lambda &\leq \rho(\|\mathbf{e}_k\|_\lambda + O(\lambda^{-1})\|\mathbf{e}_{k+1}\|_\lambda + \bar{M}), \\ \bar{M} &= \sup_{t \in [0, T]} \left\{ e^{\frac{f_0(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda}} M + (\|D(t)\| + 2)\pi \right\}, \\ \rho &= \sup_{t \in [0, T]} \|(I + D(t)\Psi(t))^{-1}\|, \end{aligned}$$

给定 ρ , 总存在 $\lambda > 0$, 使 $1 - \rho O(\lambda^{-1}) > 0$, 因而有

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|_\lambda \leq \rho_1(\|\mathbf{e}_k\|_\lambda + \bar{M}) \leq \rho_1^k \|\mathbf{e}_k\|_\lambda + \frac{\rho_1 - \rho_1^k}{1 - \rho_1} \bar{M}, \quad \rho_1 = \frac{\rho}{1 - \rho O(\lambda^{-1})}.$$

不等式右边一项是初始误差的影响, 另一项体现干扰的影响. 无干扰情况下 $\bar{M} = 0$, 当 $\rho_1 < 1$ 时

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_k\|_\lambda = 0.$$

因存在有限的大于零的 λ 值使 $\rho < 1$ 与 $\rho_1 < 1$ 等价, 故定理的前半部分成立.

如果存在 $\Psi(t)$ 使 ρ 任意小, 即任给 $\varepsilon > 0$ 有 $\rho_1 < \frac{\delta}{\bar{M} + \delta}$, $\delta = \varepsilon e^{-\lambda T}$, 那么存在

正整数 n , 当 $k > n$ 时, 有

$$\|\mathbf{e}_k\|_\lambda < \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \bar{M} < \delta, \quad \|\mathbf{y}_k(t) - \mathbf{y}_d(t)\| < \varepsilon.$$

定理的后半部分得证.

由此看到不管有无干扰, 如果取 Ψ 使 $(I + D(t)\Psi(t))^{-1}$ 足够小, 误差总可以控制在任意指定的范围. 当 $D(t)$ 是可逆时控制较为简单. 这时取 $\Psi(t) = \phi I$, ϕ 是非零实数.

$$(I + D(t)\Psi(t)) = \left(\left(\frac{1}{\phi} \right) I + D(t) \right) \phi,$$

只要 $-1/\phi$ 不是 $D(t)$ 的特征值, $(I + D(t)\Psi(t))^{-1}$ 就存在. 由于

$$\lim_{|\phi| \rightarrow \infty} (I + D(t)\Psi(t))^{-1} = \lim_{|\phi| \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{\phi} \right) I + D(t) \right)^{-1} \left(\frac{1}{\phi} \right) = 0,$$

即

$$\lim_{|\phi| \rightarrow \infty} \|(I + D(t)\Psi(t))^{-1}\| = 0,$$

因此 $|\phi|$ 足够大时, $\|(I + D(t)\Psi(t))^{-1}\| \ll 1$. 它可以把干扰的影响控制在非常小的容限内, 并使得学习具有很高的收敛速度.

四、仿真结果

为了比较,考虑文献 [8,9] 的例子.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2+5t) & -(3+2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \quad (11)$$

$$Y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$Y_d(t) = 12t^2(1-t). \quad (13)$$

注意这里没有 $D(t)$ 项, P 型算法不能直接使用. 类似文献 [8] 可以找到上式的等价形式.

令

$$z(t) = \dot{Y}(t), \quad z_d(t) = \dot{Y}_d(t)$$

式 (11) 不变, 式 (12), (13) 变为

$$z(t) = [-(2+5t) \ -(3+2t)] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t), \quad (14)$$

$$z_d(t) = 12t(2-3t). \quad (15)$$

下面根据有无干扰两种情况, 画出响应曲线与误差曲线, 对比开、闭环算法. 无论哪种情况, 仿真点数取 100, 步长为 0.01, 允许误差 0.05, 初始控制量为 0. 为了比较出闭环学习的优越性, 特作如下假设: 开环情况下系统动态是知道的, 即已知 $CB = 1$, 因而最好的学习增益 T 取 1; 闭环情况下系统动态不全知道, 只知 D 可逆. 这是用闭环一般情况与开环最好情况相比. 考虑四种干扰: 1) 初始状态扰动(重复操作引起). 2) 输入扰动. 3) 输出扰动. 4) 状态扰动. 取 $\pi = 5$. 如果重复起点是目标轨线的起点, 这时 $x(0) = [0, 0]$, 称理想初态; 如果不在目标轨线的起点上, 但每次一致, 这里取 $x(0) = [5, -5]$, 称非理想初态.

1. 无干扰情形

1) 理想初态. 闭环学习增益 Ψ 分别取 5, 10, 100 时, 从图 3 看到确实随着 Ψ 的增加, 学习速度加快, 由需要 6 次重复到只需 2 次; Ψ 从 -10 到 -100 时也有同样的结论. 这表明只要满足学习条件, 正负反馈都能使学习发生. 而 Arimoto 等的算法尽管是在最好的情况仍然需要 11 次重复, 说明学习条件中, $\|I - D\Psi\|$ 接近零时, $O(\lambda^{-1})$ 在收敛条件里起主导作用, 而闭环学习条件中 $\|(I + D\Psi)^{-1}\|$ 始终起主要作用. 这一点在误差曲线中体现得很明显: 开环学习速度是有限度的, 到一定程度不能再提高; 而闭环总能加快学习. 值得指出, 同样是在最好的情况下, Z. Bien 等的两阶方法需要 6 次迭代.

2) 非理想初态. 图 4 表明, 开环算法收敛, 这与定理 2 一致; 学习增益取 10, 50 时, 闭环方法分别仅需 4、2 次重复.

2. 扰动存在情形

仿真表明只要有一种扰动, 开环方法就不收敛. 这里仅举四种扰动都存在的例子. 图 5a 表明开环方法不收敛. 闭环后 Ψ 取 300, 1000 误差逐步减小, 已接近允许程度, $\Psi =$

1500 时满足跟踪要求(图 5b)。

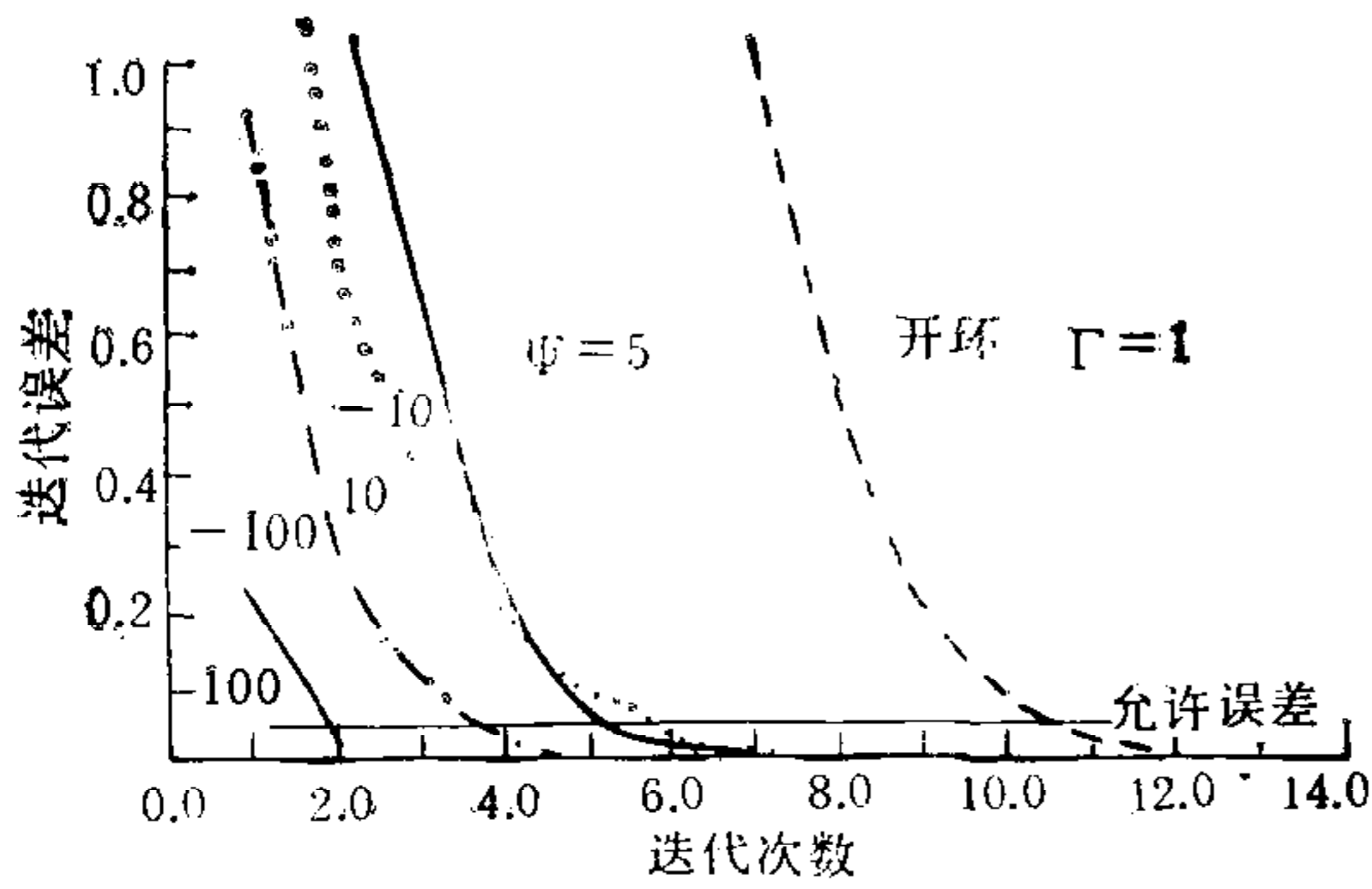


图 3 无扰理想初态开、闭环误差曲线

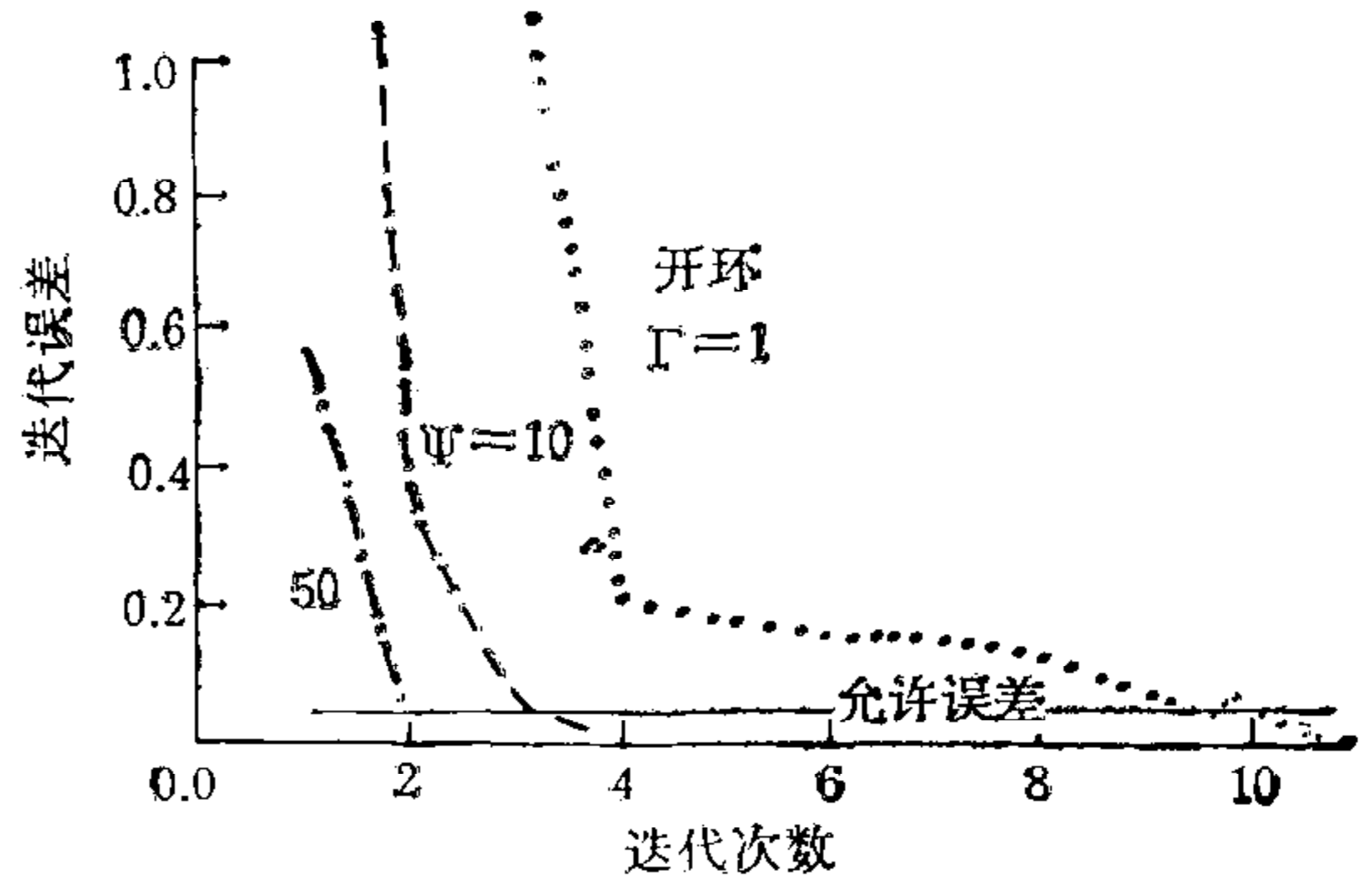


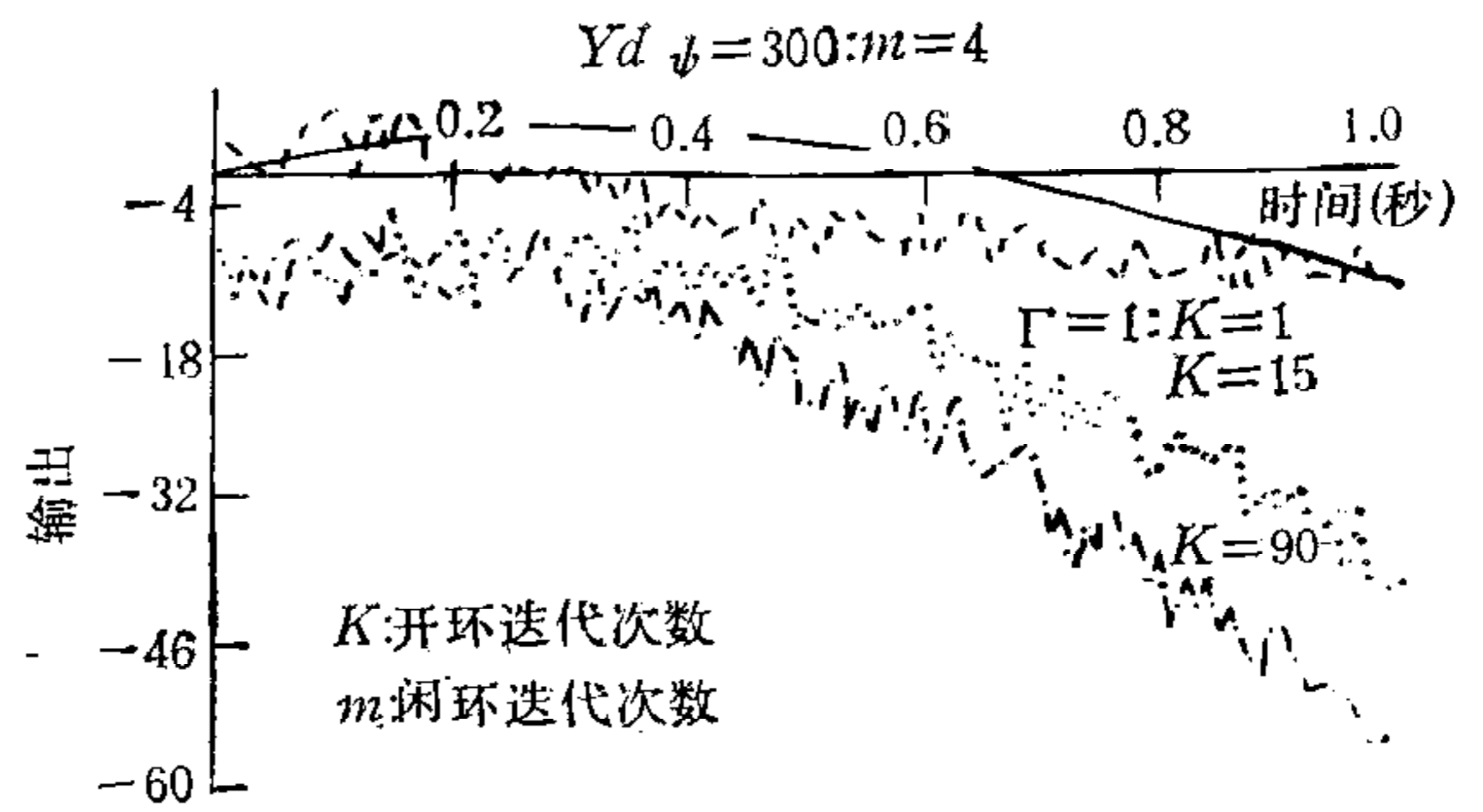
图 4 无扰非理想初态开、闭环误差曲线

综上所述，闭环算法在学习增益的选择、加快学习速度、对干扰的不敏感及抑制能力方面都大大超过开环算法。与前面的理论分析是一致的。

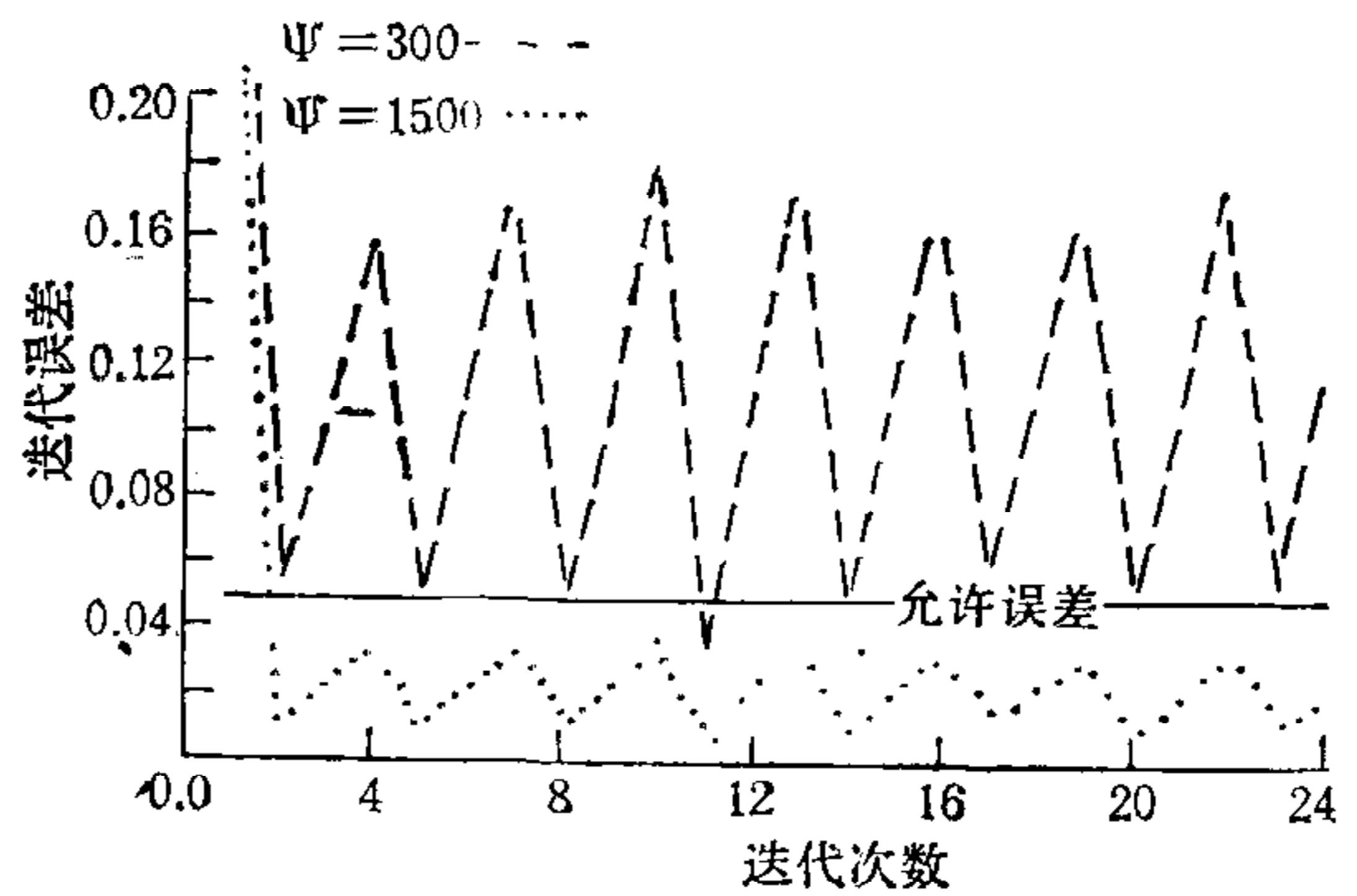
五、结 束 语

本文重新分析离散算法，采用适当的误差范数，得到较好的收敛条件，使与连续算法相对应，重新分析连续算法，得到 P 型算法的一个新收敛条件，放宽了迭代的初始条件；并包含 Arimoto 等最早提出的 D 型算法的收敛条件，表明 P 型算法与 D 型算法的统一性。

理论分析与实例验证表明，本文提出的闭环算法具有开环算法所没有的干扰抑制能力，而且在提高收敛速度方面上不受不确定因素 $O(\lambda^{-1})$ 的影响，而开环算法则因 $O(\lambda^{-1})$ 的作用，收敛速度提高到一定程度后，不能再提高。特别是在 D 可逆的情况下，闭环算法给出了较为彻底的解答。



a. 开、闭环响应曲线



b. 闭环误差曲线

图 5 干扰存在情况

参 考 文 献

[1] Uchiyama, M., Formulation of High-speed Motion pattern of a Mechanical Arm by Trial, *Trans. of SICE*, 14(1978), 706—712.

[2] Arimoto, S., et al., Bettering Operation of Dynamical Systems by Learning: A New Control Theory for Servomechanics Systems, *Proc. 23th IEEE Conf. on Decis. and Contr.* (1984), 1064—1069.

- [3] Arimoto, S., et al., Learning Control Theory for Dynamical Systems, Proc. of 24th Conf. on Decis. and Contr. (1985), 1357—1380.
- [4] Mita, T., Repetitive Control of Mechanical Systems, ATACS'84 OCT. 4—5, 1984.
- [5] Mita T., et al., Iterative Control of Robot Manipulator, Proc. 15th ISIR, Japan (1985), 665—675.
- [6] Togai, M., et al., Analysis and Design on An optimal Learning Control Scheme for Industrial Robots: A Discrete System Approach, Proc. 24th IEEE Conf. on Decis and Contr. (1985) 1399—1404.
- [7] Togai, M., et al., Discrete Learning Control and Its Application to Controlling Industrial Robots, Proc. IEEE Workshop on Intelligent Control, 1985.
- [8] Bien, Z., et al., High-order Iterative Learning Control Algorithm, Proc. IEE, 136(1989), 3, 105—112.
- [9] Oh, S. R. et al., An Iterative Learning Control Method with Application for the Robot Mauipulator, *IEEE J. Robot. Autom.*, 4(1988), 5, 504—514.

ITERATIVE LEARNING CONTROL ALGORITHM FOR LINEAR DYNAMICAL SYSTEM

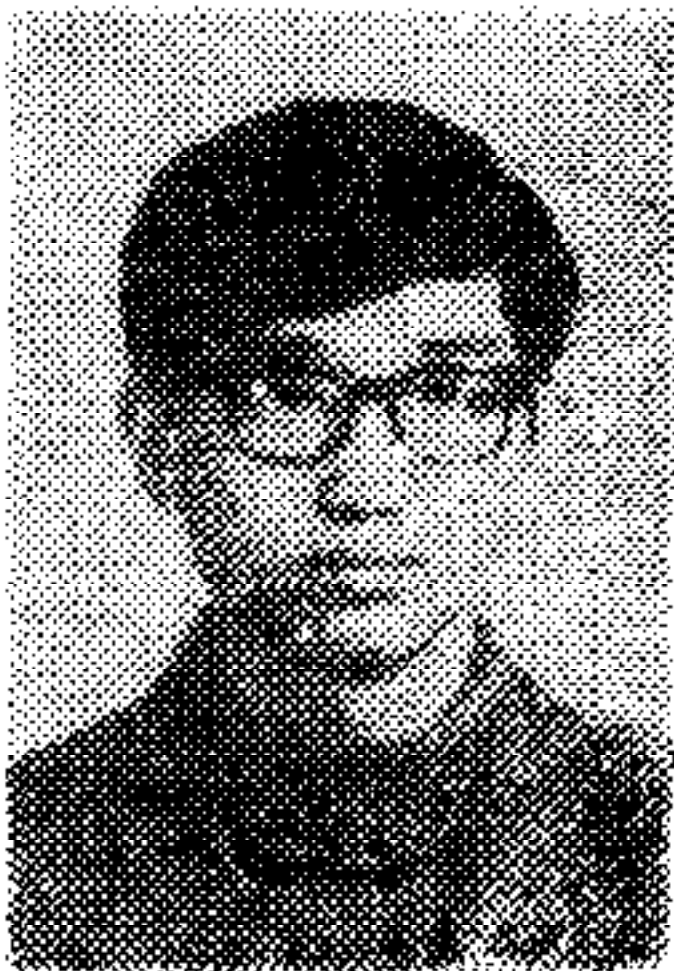
ZENG NAN YING XINREN

(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

ABSTRACT

A simple iterative learning algorithm could be used to control the nonlinear dynamical systems by updating the control function from an arbitrary initial trial. This paper improves the convergent condition on the open loop iterative learning schemes posed by Arimoto, M. Togai, Z. Bien, et al., and develops a closed-loop version. It is proved theoretically and demonstrated via simulations that the closed-loop learning scheme is superior to the previous strategies in convergent condition, learning speed and disturbance rejection.

Key words: Nonlinear system; iterative control; learning algorithm; intelligent control.



曾南 1987年毕业于中国科学技术大学系统科学与科学管理系自动控制专业, 1990年获中国科学院自动化所自动控制理论及应用硕士学位。现在中科院自动化所模式识别实验室工作。目前主要兴趣在机器人学、神经网络和控制理论。

应行仁 简介见本刊第17卷第1期。