第18卷 第2期
1992年3月

自动化学报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 18, No. 2
Mar., 1992

定常 2-D 系统控制能量受限下的完全能控性[1)]

陈兆宽 刘雅增
（山东大学数学系，济南 250100）

齐良民
（潍坊计算机公司，潍坊）

摘 要

本文研究了定常 2-D 系统 Roesser 模型在控制能量受限下的完全能控性，得到了一个充分必要条件，并对一种特殊的 2-D 可分离分母系统给出了控制能量受限下完全能控的一种非常简洁的代数条件.

关键词: 2-D 系统，控制能量受限，完全能控性.

一、前 言

2-D 系统模型最早是从信号系统和图象处理中提出来的，十多年来对 2-D 系统的研究已经取得了丰硕的成果. 1985 年出版了第一本有关 2-D 系统的专著[1]，对 1985 年以前的工作作了系统介绍. 我国学者对 2-D 系统的研究最早见文献 [2,3]. 目前，2-D 系统能控性问题的研究已有大量文献[4-6]，但所有工作都基于控制能量不受限制的假定，然而在实际问题中情况并非如此. 本文将研究定常 2-D 系统 Roesser 模型在控制能量受到限制下的完全能控性问题.

二、问题的叙述与几个引理

考虑 2-D 系统 Roesser 模型

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^h(i+1,j) \\ \boldsymbol{x}^v(i,j+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^h(i,j) \\ \boldsymbol{x}^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(i,j), \tag{1}$$

其中 i 为整数值垂直坐标；j 为整数值水平坐标；$\boldsymbol{x}^h(i,j) \in R^{n_1}$ 为水平状态向量；$\boldsymbol{x}^v(i,j)$ 为垂直状态向量；$\boldsymbol{u}(i,j) \in R^m$ 为输入控制向量；A 为 $(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)$ 阶状态矩

本文于 1990 年 11 月 26 日收到.
1) 国家自然科学基金资助的课题.

阵.

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}, & A_{12}\\ A_{21}, & A_{22}\end{bmatrix},\quad A_{11},A_{12},A_{21},A_{22},B_1,B_2$$

为具有适当阶数的实矩阵.

系统 (1) 的边界条件为

$$x^h(0,j),x^v(i,0),i,j=0,1,2,\cdots\cdots, \tag{2}$$

定义 1. 系统 (1) 的状态转移矩阵 $A^{i,j}$ 定义如下:

1) $A^{0,0}=I$ (单位矩阵),

2) $A^{1,0}=\begin{bmatrix}A_{11}, & A_{12}\\ 0, & 0\end{bmatrix}$, $A^{0,1}=\begin{bmatrix}0, & 0\\ A_{21}, & A_{22}\end{bmatrix}$,

3) $A^{i,j}=A^{1,0}A^{i-1,j}+A^{0,1}A^{i,j-1}$, 对 $(i,j)>(0,0)$,

4) $A^{i,j}=0$, (零矩阵),对 $i<0$ 或 $j<0$.

定义 2. 状态 $x_0\in R^{n_1+n_2}$ 称为 2-D 系统 (1) 的能控状态，如果在假定边界条件为零的条件下,存在 $(h,k)>(0,0)$ 及控制序列 $\{u(i,j),(0,0)\leqslant(i,j)\leqslant(h,k)\}$, 使得系统状态

$$x(h,k)=\begin{bmatrix}x^h(h,k)\\ x^v(h,k)\end{bmatrix}=x_0.$$

定义 3. 2-D 系统 (1) 称为完全能控的,如果任何状态 $x_0\in R^{n_1+n_2}$ 都是能控状态.

定义 4. 2-D 系统 (1) 称为控制能量受限下完全能控的，如果在假定边界条件为零的条件下对任意状态 $x_0\in R^{n_1+n_2}$ 都存在 $(h,k)>(0,0)$ 及控制序列

$$\{u(i,j),(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k),$$

$$\sum_{(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k)}u^T(i,j)\cdot u(i,j)\leqslant L^2\},$$

在其作用下使状态 $x(h,k)=x_0$, 这里 L 是指定正数.

引理 1. 定常 2-D 系统 (1) 完全能控的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}[M(0,1),M(1,0),\cdots,M(i,j),\cdots,M(n_1,n_2)]=n_1+n_2,$$

其中 $M(i,j)=A^{i-1,j}B^{1,0}+A^{i,j-1}B^{0,1}$.

证明. 假定边界条件为零,利用 Roesser 模型解的表达式有

$$x_0=\begin{bmatrix}x^h(h,k)\\ x^v(h,k)\end{bmatrix}=\sum_{(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k)}M(h-i,k-j)u(i,j)$$

$$=[M(0,1),M(1,0),\cdots\cdots,M(h,k)]\begin{bmatrix}u(h,k-1)\\ u(h-1,k)\\ \vdots\\ u(0,0)\end{bmatrix}.$$

由 2-D Cayley-Hamiton 定理知，对任意 $A^{i,j},(i,j)\geqslant(n_1,n_2)$ 都可由 $A^{i,j},(0,0)\leqslant(i,j)\leqslant(n_1,n_2)$ 线性表出. 因此，对任意的 x_0 都存在 $(h,k)>(0,0)$ 及控制序列 $\{u(i,j),(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k)\}$ 使得 $x(h,k)=x_0$ 的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}[M(0,1),M(1,0),\cdots\cdots,M(n_1,n_2)]=n_1+n_2$$

证毕.

引理 2. 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是系统 (1) 的在矩形 $[(0,0),(h,k)]$ 中的局部能控状态,则

$$\hat{\boldsymbol{u}}=\hat{\boldsymbol{u}}(i,j)=M^T(h-i,k-j)W^{-1}(h,k)\boldsymbol{x}_0$$

是将系统状态转移到 $\boldsymbol{x}(h,k)=\boldsymbol{x}_0$(假定边界条件为零)的最小能量控制,并且最小能量为

$$I(\hat{\boldsymbol{u}})=\sum_{(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k)}\hat{\boldsymbol{u}}^T(i,j)\hat{\boldsymbol{u}}(i,j)=\boldsymbol{x}_0^TW^{-1}(h,k)\boldsymbol{x}_0,$$

其中

$$W(h,k)=\sum_{(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k)}M(h-i,k-j)M^T(h-i,k-j).$$

证明. 参看文献 [1].

引理 3. 若对称正定矩阵 P,Q 满足: $P^{-1}\geqslant Q^{-1}>0$, 则 $0<P\leqslant Q$, (0 表示零矩阵).

证明. 参看文献 [7].

引理 4. 对于实数序列 $\{a_{m,n}\}$, 如果满足

1) $a_{m,n}\leqslant a_{i,j}$, 对 $(m,n)\geqslant(i,j)$,

2) $a_{m,n}\geqslant k$ (其中 k 为常数),对 $m,n=0,1,2,\cdots\cdots$,

则 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}a_{m,n}$ 存在.

证明. 与一个下标的"实数序列 $\{a_n\}$ 单调有界必有极限"的证明相类似,故从略.

引理 5. 对于实对称矩阵序列 $\{A_{m,n}\}$ 如果满足

1) $A_{m,n}\geqslant A_{i,j}$, 对 $(m,n)\leqslant(i,j)$,

2) $A_{m,n}\geqslant K$ (K 为某个固定实对称矩阵),

$$m,n=0,1,2,\cdots\cdots.$$

则 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}A_{m,n}$ 存在,且 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}A_{m,n}\geqslant K$.

证明. 利用引理 4 的结果与文献 [7] 不难证明本引理.

引理 6. 若系统 (1) 为完全能控的,则 $\lim\limits_{\substack{h\to\infty\\k\to\infty}}W^{-1}(h,k)$ 是存在的.

证明. $\because$ $W(h,k)=\sum\limits_{(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k)}M(h-i,k-j)M^T(h-i,k-j)$

$$=[M(0,1),M(1,0),\cdots\cdots,M(h,k)]\begin{bmatrix}M^T(0,1)\\M^T(1,0)\\\vdots\\M^T(h,k)\end{bmatrix}.$$

由引理 1 知系统 (1) 为完全能控制时, $W(h,k)$ 是实对称正定矩阵. 所以, $W^{-1}(h,k)$ 是存在的,又对任意 (i,j), $M(h-i,k-j)M^T(h-i,k-j)\geqslant0$, 显然, 当 $(m,n)\geqslant(h,k)$ 时, $W(m,n)\geqslant W(h,k)>0$, 根据引理 3, $0<W^{-1}(m,n)\leqslant W^{-1}(h,k)$, 再由引理 5 知 $\lim\limits_{\substack{h\to\infty\\k\to\infty}}W^{-1}(h,k)$ 是存在的.

引理 6 证毕。

三、基本定理及其证明

本节给出如下基本定理及其证明。

定理 1. 定常 2-D 系统 (1) 为控制能量受限下完全能控的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}[M(0,1),M(1,0),\cdots,M(i,j),\cdots,M(n_1,n_2)]=n_1+n_2, \tag{3}$$

$$\lim_{\substack{h\to\infty\\k\to\infty}} W^{-1}(h,k)=O_n\ (O_n\ \text{为零矩阵}), \tag{4}$$

证明. 必要性：由系统 (1) 为控制能量受限下的完全能控性可以推出系统 (1) 为完全能控的. 所以由引理 1 知 (3) 式成立.

对于 (4) 式，用反证法证明. 若 $\lim\limits_{\substack{h\to\infty\\k\to\infty}} W^{-1}(h,k)=Q\neq O_n$. 选取某一 $\boldsymbol{x}_0\in R^n$，使得

$$\boldsymbol{x}_0^T Q x_0 > L^2.$$

下面证明 $\boldsymbol{x}_0$ 就是系统 (1) 在控制能量受到如下约束

$$\sum_{(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k)} \boldsymbol{u}^T(i,j)\boldsymbol{u}(i,j)\leqslant L^2$$

下的一个不可控点. 事实上，由引理 2 知，在任意矩形 $[(0,0),(h,k)]$ 中把状态转移到 $\boldsymbol{x}(h,k)=\boldsymbol{x}_0$ 的最小能量控制是存在的，并且最小能量为 $\boldsymbol{x}_0^T W^{-1}(h,k)\boldsymbol{x}_0$. 由于 $\boldsymbol{x}_0 W^{-1}(h,k)\boldsymbol{x}_0$ 是 (h,k) 的单调下降序列，因此 $\boldsymbol{x}_0^T W^{-1}(h,k)\boldsymbol{x}_0\geqslant \boldsymbol{x}_0^T Q\boldsymbol{x}_0 > L^2$，对于任意 $(h,k)>(0,0)$ 成立. 对于任何其它在 $[(0,0),(h,k)]$ 中将状态转移到 $\boldsymbol{x}(h,k)=\boldsymbol{x}_0$ 的控制序列 $\{\boldsymbol{u}(i,j)\}$ 来说，更有 $\sum\limits_{(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k)} \boldsymbol{u}^T(i,j)\boldsymbol{u}(i,j)\geqslant \boldsymbol{x}_0^T W^{-1}(h,k)\boldsymbol{x}_0 > L^2$.

这就说明，满足给定能量约束，且又能将系统状态转移到 $\boldsymbol{x}(h,k)=\boldsymbol{x}_0$ 的控制是不存在的. 这与系统为控制能量受限下是完全能控的假设相矛盾. 所以 (4) 式必然成立.

充分性：设 $\boldsymbol{x}_0$ 为任意给定的状态向量. 由式(3)及引理 1、引理 2 知，存在将系统状态转移到 $\boldsymbol{x}(h,k)=\boldsymbol{x}_0$ (假定边界条件为零)的最小能量控制：

$$\{\hat{\boldsymbol{u}}(i,j),(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k)\},$$

且最小能量为 $\boldsymbol{x}_0^T W^{-1}(h,k)\boldsymbol{x}_0$.

再由 (4) 式得，一定存在自然数对 $(T,N)\geqslant(n_1,n_2)$，使得 $\boldsymbol{x}_0^T W^{-1}(T,N)\boldsymbol{x}_0\leqslant L^2$.

令控制 $\boldsymbol{u}(i,j)=M^T(T-i,N-j)W^{-1}(T,N)\boldsymbol{x}_0$，$(0,0)\leqslant(i,j)<(T,N)$，则显然 $\sum\limits_{(0,0)\leqslant(i,j)<(T,N)} \boldsymbol{u}^T(i,j)\boldsymbol{u}(i,j)=\boldsymbol{x}_0 W^{-1}(T,N)\boldsymbol{x}_0\leqslant L^2$. 且这个控制序列 $\{\boldsymbol{u}(i,j)\}$ 将状态 $\boldsymbol{x}$ 转移到 $\boldsymbol{x}_0$. 由于 $\boldsymbol{x}_0$ 是任取的，所以由定义知系统 (1) 为控制能量受限下是完全能控的.

定理 1 证毕。

由定理 1 可知，对于定常 2-D 系统 Roesser 模型的控制能量受限下的完全能控性只与系统本身的结构有关，而与控制能量的限值 L^2 的大小没有关系.

四、2-D 可分离分母系统控制能量受限下的完全能控性

本节考虑定常 2-D 系统 Roesser 模型的一种特殊情形,即 $A_{21}=0$ 的情形.

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ 0, & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i,j), \tag{5}$$

文献[6]中称这种系统为 2-D 可分离分母系统,简记为 2-DSDS. 对这种特殊的 2-D 系统本文有进一步的结果,首先给出几个引理.

引理 7. 对 2-DSDS 式(5),有

$$W(h,k) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{h-1} A_{11}^i B_1 B_1^\tau (A_{11}^i)^\tau + \sum_{i=0}^{h-1} A_{11}^i A_{12} \left[\sum_{j=0}^{k} A_{22}^j B_2 B_2^\tau (A_{22}^j)^\tau \right] A_{12}^\tau (A_{11}^i)^\tau, & 0 \\ 0, & \sum_{j=0}^{k} A_{22}^j B_2 B_2^\tau (A_{22}^j)^\tau \end{bmatrix}$$

证明. 对于

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ 0, & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

通过直接计算,有

$$A^{i,0} = \begin{bmatrix} A_{11}^i, & A_{11}^{i-1} A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ i \geqslant 1.$$

$$A^{0,j} = \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & A_{22}^j \end{bmatrix}, \ j \geqslant 1, \quad A^{i,j} = \begin{bmatrix} 0, & A_{11}^{i-1} A_{12} A_{22}^j \\ 0, & 0 \end{bmatrix}, \ i,j \geqslant 1.$$

$$M(i,j) = A^{i-1,j}B^{1,0} + A^{i,j-1}B^{0,1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{i-1} \ A_{12} \ A_{22}^{j-1} \ B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ i,j \geqslant 1$$

$$M(0,j) = A^{0,j-1}B^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_{22}^j \ B_2 \end{bmatrix}, \ j > 1$$

$$M(i,0) = A^{i-1,0}B^{1,0} = \begin{bmatrix} A_{11}^{i-1} \ B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ i \geqslant 1$$

于是

$$\begin{aligned} W(h,k) &= \sum_{(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k)} M(h-i,k-j)M^T(h-i,k-j) \\ &= \sum_{(0,0)\leqslant(i,j)<(h,k)} M(i,j)M^T(i,j) = \sum_{i=1}^{h} M(i,0)M^T(i,0) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k} M(0,j)M^T(0,j) + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k} M(i,j)M^T(i,j) \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{h} A_{11}^{i-1} B_1 B_1^\tau (A_{11}^{i-1})^\tau, & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & \sum_{j=0}^{k} A_{22}^{j-1} B_2 B_2^\tau (A_{22}^{j-1})^\tau \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$+\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k} A_{11}^{i-1}A_{12}A_{22}^{j-1}B_2B_2^\tau(A_{22}^{j-1})^\tau A_{12}(A_{11}^{i-1})^\tau, & 0\\ 0, & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{h} A_{11}^{i}B_1B_1^\tau(A_{11}^{i})^\tau+\sum_{i=0}^{h-1}A_{11}^{i}A_{12}\left[\sum_{j=0}^{k-1}A_{22}^{j}B_2B_2^\tau(A_{22}^{j})^\tau\right]A_{12}^\tau(A_{11}^{i})^\tau, & 0\\ 0, & \sum_{j=0}^{k-1}A_{22}^{j}B_2B_2^\tau(A_{22}^{j})^\tau\end{bmatrix}$$

引理 7 证毕.

引理 8.　设 A 是实方阵，则矩阵

$$W_k=I+AA^\tau+\cdots+A^k(A^k)^\tau$$

之逆 $W_k^{-1}\to 0(k\to\infty)$ 的充要条件是 A 的所有特征根的绝对值大于或等于 1，即

$$|\lambda_i(A)|\geqslant 1.$$

证明．参看文献 [8].

引理 9.　2-DSDS（5）式完全能控的充要条件是

$$\mathrm{rank}[A_{12},B_1,A_{11},A_{12},A_{11}B_1,\cdots,A_{11}^{n_1-1}A_{12},A_{11}^{n_1-1}B_1]=n_1,$$

$$\mathrm{rank}[B_2,A_{22}B_2,\cdots,A_{22}^{n_2-1}B_2]=n_2.$$

证明．参看文献 [4].

引理 10.　假定 $[A,B]$ 为完全能控对（1-D）意义下，则

$$\left[\sum_{i=0}^{k-1}A^iBB^\tau(A^i)^\tau\right]^{-1}\to 0(k\to\infty)$$

的充分必要条件是 $|\lambda_i(A)|\geqslant 1$.

证明：首先当 $[A,B]$ 为能控时，则.

$$\mathrm{rank}[B,AB,\cdots\cdots,A^{n-1}B]=n.$$

$$\therefore\quad \overline{W}_k=\sum_{i=0}^{k-1}A^iBB^\tau(A^i)^\tau,$$

当 $k\geqslant n$ 时是满秩的，所以 $\overline{W}_k^{-1}$ 是存在的、并且 $\overline{W}_k^{-1}$ 关于 k 是单调下降有下界的对称序列，所以 $\{\overline{W}_k^{-1}\}$ 必有极限阵存在．于是 $\overline{W}_k^{-1}\to 0(k\to\infty)$ 的充分必要条件是它的某个子列 $\overline{W}_{k_i}^{-1}\to 0(k_i\to\infty)$．现在取 $k_i=Nn$,（N 为正整数）．则

$$\overline{W}_{k_i}=\sum_{i=0}^{Nn-1}A^iBB^\tau(A^i)^\tau=\sum_{i=1}^{Nn}A^{i-1}BB^2(A^{i-1})^\tau$$

$$=\sum_{i=1}^{n}A^{i-1}BB^\tau(A^{i-1})^\tau+\sum_{i=n+1}A^{i-1}BB(A^{i-1})^\tau+\cdots$$

$$+\ .\sum_{i=(N-1)n+1}^{N_n}A^{i-1}BB(A^{i-1})^\tau$$

$$=\overline{W}_n+A^n\overline{W}_n(A^n)^\tau+\cdots+A^{(N-1)n}\overline{W}_n(A^{(N-1)n})^\tau,$$

其中

$$\overline{W}_n=\sum_{i=1}^{n}A^{i-1}BB^\tau(A^{i-1})^\tau$$

是正定矩阵. 所以存在 $\alpha,\beta>0$, 使得: $\alpha I_n<\overline{W}_n<\beta I_n$, 其中 I_n 为 $n\times n$ 单位矩阵. 于是有

$$\alpha(I+A^n(A^n)^\tau+\cdots+A^{n(N-1)}(A^{n(N-1)})^\tau]\leqslant\overline{W}_{k_i}$$
$$\leqslant\beta[I+A^n(A^n)^\tau+\cdots+A^{n(N-1)}(A^{n(N-1)})^\tau],$$

$\therefore$ $\overline{W}_{k_i}^{-1}\to 0(k_i\to\infty)$ 等价于

$$W_N^{-1}=[I+A^n(A^n)^\tau+\cdots+A^{(N-1)n}(A^{(N-1)n})^\tau]^{-1}\to 0(N\to\infty),$$

由引理 8 知, $W_N^{-1}\to 0(N\to\infty)\Longleftrightarrow|\lambda_i(A^n)|\geqslant 1\Longleftrightarrow|\lambda_i(A)|\geqslant 1$. 所以

$$\left[\sum_{i=0}^{k-1}A^iBB^\tau(A^i)^\tau\right]^{-1}\to 0\Longleftrightarrow|\lambda_i(A)|\geqslant 1.$$

引理 10 证毕.

引理 11. 假定 2-DSDS (5) 式是完全能控的, 如果 1) $|\lambda_i(A_{11})|\geqslant 1$, 或者 2) A_{12} 为满秩方阵,且 $|\lambda_i(A_{22})|\geqslant 1$, 那么

$$V(h,k)=\sum_{i=0}^{h-1}A_{11}^iB_1B_1^\tau(A_{11}^i)^\tau+\sum_{i=0}^{h-1}[A_{11}^iA_{12}]$$
$$\cdot\left[\sum_{j=0}^{k-1}A_{22}^jB_2B_2^\tau(A_{22}^j)^\tau\right]\cdot A_{12}^\tau(A_{11}^i)^\tau$$

之逆 $V^{-1}(h,k)\to 0$ $\left(\text{当}\ \begin{matrix}h\to\infty\\k\to\infty\end{matrix}\right)$

证明. 由

$$V(h,k)=\sum_{i=0}^{h-1}A_{11}^i[B_1,A_{12}]$$
$$\cdot\begin{bmatrix}I, & 0\\ 0, & \sum_{j=0}^{k-1}A_{22}^jB_2B_2^\tau(A_{22}^j)^\tau\end{bmatrix}\cdot[B_1,A_{12}]^\tau(A_{11}^i)^\tau,$$

取 $k=n_2$, 则

$$\sum_{j=0}^{k-1}A_{22}^jB_2B_2^\tau(A_{22}^j)^\tau$$

为正定矩阵, $\therefore$ $\exists\alpha>0$ 使 $\sum_{j=0}^{n_2-1}A_{22}^jB_2B_2^\tau(A_{22}^j)^\tau\geqslant\alpha I_{n_2}$, 这里 I_{n_2} 为 $n_2\times n_2$ 单位矩阵.

取 $\bar{\alpha}=\min\{1,\alpha\}$, 则当 $k\geqslant n_2$ 时,

$$V(h,k)\geqslant\bar{\alpha}\sum_{i=0}^{h-1}A_{11}^i[B_1,A_{12}][B_1,A_{12}]^\tau(A_{11}^i)^\tau,$$

于是当 $k\geqslant n_2$ 时,

$$0<V^{-1}(h,k)\leqslant\frac{1}{\bar{\alpha}}\left\{\sum_{i=0}^{h-1}A_{11}^i[B_1,A_{12}][B_1,A_{12}]^\tau(A_{11}^i)^\tau\right\}^{-1}$$

由引理 10 知,当 $|\lambda_i(A_{11})|\geqslant 1$ 时,

$$\lim_{\substack{h\to\infty\\k\to\infty}}V^{-1}(h,k)=0.$$

于是当满足引理 11 的条件 1) 时，引理的结论得证．下面证明，当满足引理 11 的条件 2) 时，引理的结论也成立．

事实上，对于任意的 $h,k>0$ 时，都有

$$V(h,k) \geqslant A_{12}\left[\sum_{j=0}^{k-1} A_{22}^{j} B_2 B_2^{\tau}(A_{22}^{j})^{\tau}\right] A_{12}^{\tau},$$

于是由引理 10 知，当 $|\lambda_i(A_{22})| \geqslant 1$，$A_{12}$ 为满秩方阵时，

$$0 \leqslant \lim_{\substack{h\to\infty\\k\to\infty}} V^{-1}(h,k) = \lim_{k\to\infty}(A_{12}^{\tau})^{-1}\left[\sum_{j=0}^{k-1} A_{22}^{j} B_2 B_2^{\tau}(A_{22}^{j})^{\tau}\right]^{-1} A_{12}^{-1} = 0.$$

引理 11 证毕．

定理 2. 2-DSDS (5) 式(在边界条件为零时)为控制能量受限下完全能控的必要条件是

$$\operatorname{rank}[B_1, A_{12}, A_{11}B_1, A_{11}A_{12}, \cdots, A_{11}^{n_1-1}B_1, A_{11}^{n_1-1}A_{12}] = n_1, \tag{6}$$

$$\operatorname{rank}[B_2, A_{22}B_2, \cdots, A_{22}^{n_2-1}B_2] = n_2, \tag{7}$$

$$|\lambda_i(A_{22})| \geqslant 1, \tag{8}$$

一个充分条件是

$$\operatorname{rank}[B_1, A_{12}, A_{11}B_1, A_{11}A_{12}, \cdots, A_{11}^{n_1-1}B_1, A_{11}^{n_1-1}A_{12}] = n_1, \tag{9}$$

$$\operatorname{rank}[B_2, A_{22}, B_2, \cdots\cdots, A_{22}^{n_2-1}B_2] = n_2, \tag{10}$$

$$|\lambda_i(A_{11})| \geqslant 1, |\lambda_i(A_{22})| \geqslant 1. \tag{11}$$

证明．先证一个必要条件：由 2-DSDS 是控制能量受限下完全能控的，所以由引理 9 知，式 (6),(7) 必然成立，再根据定理 1 与引理 7，必然有

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{j=0}^{k} A_{22}^{j} B_2 B_2^{\tau}(A_{22}^{j})^{\tau}\right]^{-1} \to 0.$$

再由引理 10，必然有 $|\lambda_i(A_{22})| \geqslant 1$.

再证一个充分条件．由 (9) 与 (10) 式知，2-DSDS 是完全能控的．再由

$$|\lambda_i(A_{11})| \geqslant 1 \text{ 及 } |\lambda_i(A_{22})| \geqslant 1.$$

根据引理 7 与引理 11 有

$$\lim_{\substack{h\to\infty\\k\to\infty}} W^{-1}(h,k) = 0.$$

所以由定理 1 知，2-DSDS 为控制能量受限下是完全能控的．

定理 2 证毕．

定理 3. 若边界条件为零，A_{12} 为满秩方阵，则 2-DSDS (5) 式为控制能量受限下完全能控的充分必要条件是

$$\operatorname{rank}\ [B_2, A_{22}B_2, \cdots, A_{22}^{n_2-1}B_2] = n_2$$

$$|\lambda_i(A_{22})| \geqslant 1.$$

证明．只须注意到 A_{12} 为满秩方阵时，条件式 (6) 是恒满足的，再利用引理 10，即可与证明定理 2 完全类似地证明本定理

定理 3 证毕．

参 考 文 献

[1] T. Kaczorek, Two-Dimensional Linear Systems, Springer-Verlag, 1985.
[2] 陈文德，2-D 系统的状态空间方法及其有关问题，信息与控制，**14**(1984),2.
[3] 陈文德,2-D 系统的能达性、能观性与综合,控制理论与应用，**1**(1984),4.
[4] Tao Lin, New Necessary and Sufficient Conditions for Local Controllability and Local Observability of 2-D Separable Denominator Systems, *IEEE* **AC-32**(1987),3.
[5] Klamka, J., Minimum Energy Control for 2-D System, *System Science*, **9**(1983).
[6] Kurfe, J. E., Basic Properties for q-Dimensional Linear Systems, *Int. J. Control*, **42**(1985),1.
[7] 须田信英等,自动控制中的矩阵理论,科学出版社，1979.
[8] 陈兆宽等,带随机量测噪声的初始状态马尔柯夫估计的均方收敛性、系统科学与数学，(1985),1.

ON THE FULL CONTROLLABILITY OF 2-D TIME-INVARIANT SYSTEMS WITH CONSTRAINT OF CONTROL ENERGY

CHEN ZHAOKUAN LIU YAZENG

(*Mathematical Dept., Shandong University, Jinan* 250100)

QI LIANGMIN

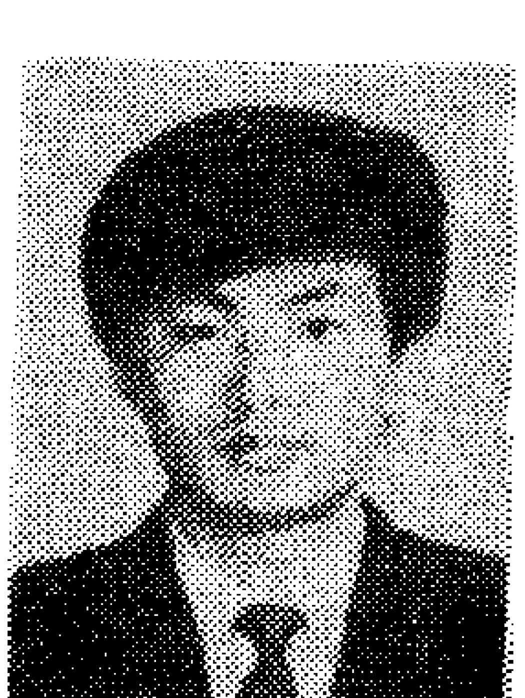
(*Weifang Computer Corporation, Weifang*)

ABSTRACT

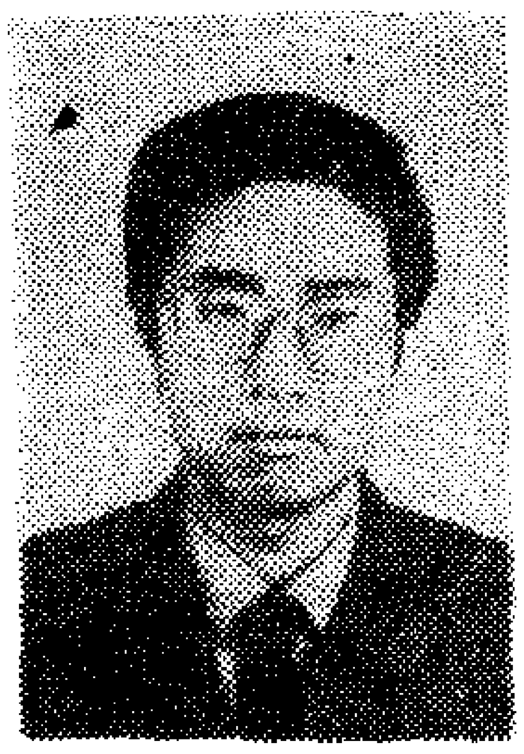
In this paper, the problem of the full controllability for the Roesser's model of 2-D time-invariant systems with constraint of control energy is studied and a sufficient and necessary condition associated with the problem are given. A simple algebraical condition of the full controllability for a special 2-D separable denominator system with constraint of control energy is also presented.

Key words: 2-D system; constraint of control energy; full controllability.

陈兆宽 1938年12月生于江苏常州，1961年毕业于山东大学数学系，现任山东大学数学系副教授、山东省自动化学会常务理事、计算机应用专业委员会副主任．主要从事线性与非线性系统理论与微型计算机在工业过程控制中的应用研究工作．



刘雅增 1963年4月生于山东青岛，1987年在山东大学数学系获运筹学与控制论专业硕士学位．现任山东大学数学系讲师、山东省自动化学会会员．主要从事线性与非线性系统理论与微型计算机在工业过程控制中的应用研究工作．



齐良民　1963 年 1 月生于山东潍坊，1989 年在山东大学数学系获运筹学与控制论专业硕士学位．现任华光电子集团公司通信研究所工程师、软件室主任．主要从事交换软件开发工作．

中国自动化学会成立三十周年纪念会在京隆重召开

中国自动化学会成立三十周年纪念暨第三届学术年会于 1991 年 12 月 2 日—6 日在北京隆重召开．我会的部分荣誉理事、理事、各省、市(区)自动化学会、各专业与工作委员会的代表及论文作者 300 余人出席了会议，其中中青年科技工作者占三分之一以上．

会议开幕式由黄泰翼理事长主持，胡启恒理事长致开幕词，杨嘉墀理事长作了题为“中国自动化学会三十年”的报告，机电部科技委主任范宏才、国务院电子信息推广应用办公室黎连生、“863”计划自动化领域首席科学家蒋新松分别作了题为“国内机械工业制造自动化”、“我国电子信息应用的现状与展望”、“国内外高技术领域自动化的发展状况”的报告，国家计委科技司副司长姜均露作了有关“促进企业科技进步、用自动化技术改造传统产业”方面的发言，国务院委员、国家科委主任、我会第三届理事长宋健到会看望了全体代表，并发表了鼓舞人心的讲话．

会议组织了 17 篇综述报告与具有明显社会经济效益的实例解剖报告，征集学术论文 400 余篇，其中 176 篇收入论文集．与会代表分别参加了以“智能化与自动化”、“工程应用中的控制理论与计算机科学”、“连续与离散生产过程中的 CIM”、“低成本自动化和自动化技术改造传统产业问题”等为专题的圆桌讨论会，并参观了由我会主办、国务院电子信息系统推广应用办公室等 7 个单位共同发起的“91′ 自动化技术应用暨高技术成果展览会”．

学会办公室　李爱国