第18卷 第2期 自动化学报 Vol. 18, No. 2
1992年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1992

对称非线性控制系统的结构分解[1)]

谢小信 刘晓平 张嗣瀛
(东北工学院自控系,沈阳 110006)

摘 要

本文在文献 [1] 的基础上利用李代数的半直和分解，对具有对称性的非线性控制系统作了结构上的简化分解，并证明任一具有无穷小状态空间对称的非线性系统都存在一级联分解与一准平行分解的并联分解形式.

关键词: 对称,李群,分解,分布.

一、前 言

用微分几何方法研究非线性控制系统是近十多年发展起来的新课题. 这一方法对于非线性系统的很多方面,特别是解耦、结构分解及精确线性化等的研究都显示出极大的优越性. 对称非线性控制系统是近几年基于对称线性控制系统提出的新概念. 它反映了非线性系统自身的一种属性，一种结构上的特点. 由于非线性系统在结构上较之线性系统的复杂性,文献 [1] 给出了对称、状态空间对称、无穷小对称及无穷小状态空间对称的定义. 作者在非线性控制系统具有无穷小状态空间对称的情况下，按对称群G是 Abelian 和 Non-Abelian 两种情况分别给出系统相应的结构分解形式. 但这种结构分解形式是不彻底的,忽略了对称群G的李代数具有的诸多精细的性质.本文利用李代数的半直和分解以及可解李群的导出理想列、半单李代数的单理想直和表达式,对具有无穷小状态空间对称的非线性控制系统作了结构上的简化分解. 本文的结论较文献 [1] 的结论更为深入和彻底.

二、基 本 定 义

定义 2.1[1]. 一个非线性控制系统是三元形式 $\Sigma(B,M,f)$, π: $B\rightarrow M$是一光滑纤维丛且 $f:B\rightarrow TM$ 是一光滑映射, π_M: $TM\rightarrow M$ 是自然投影,使得图 1 可交换.

以上定义中,M可解释为系统的状态空间,B的纤维可解释为系统的输入空间. 如果 $B=M\times U$,U 表示控制流形,设 x 是M的坐标, (x,u) 是B的坐标,则控制系统 $\Sigma(B,M,f)$ 可表示为通常形式

本文于1990年6月25日收到.
1) 国家自然科学基金资助课题.

$$\dot{x} = f(x,u) \quad x \in M, \ u \in U. \tag{2.1}$$

定义 2.2[1]. 对于非线性控制系统 $\Sigma(B,M,f)$，设 θ 和 Φ 分别是李群G在 B 和 M 上的作用,如果图 2 对所有 $g \in G$ 是可交换的,则称系统 $\Sigma(B,M,f)$ 具有对称(G,θ,Φ). 这里 $T\Phi_g$ 是 Φ_g 的切映射.

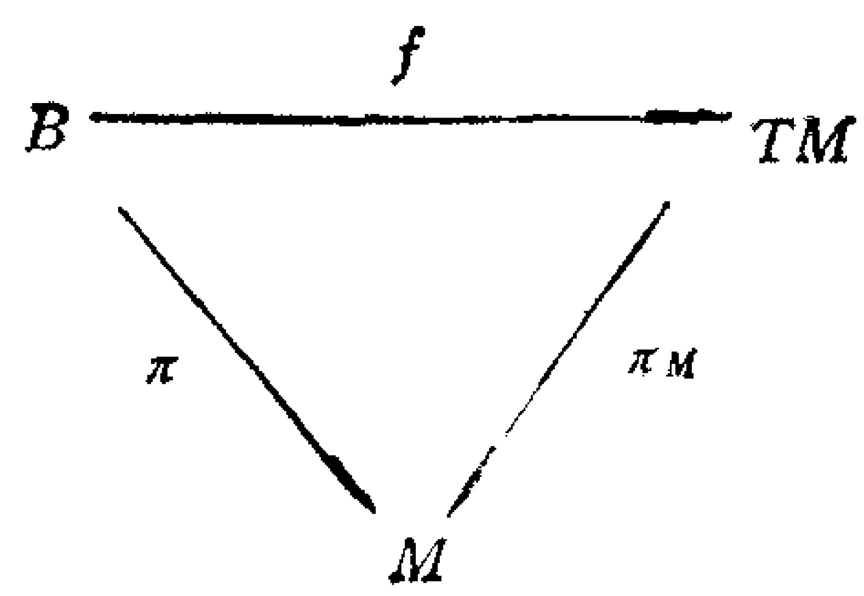


图 1

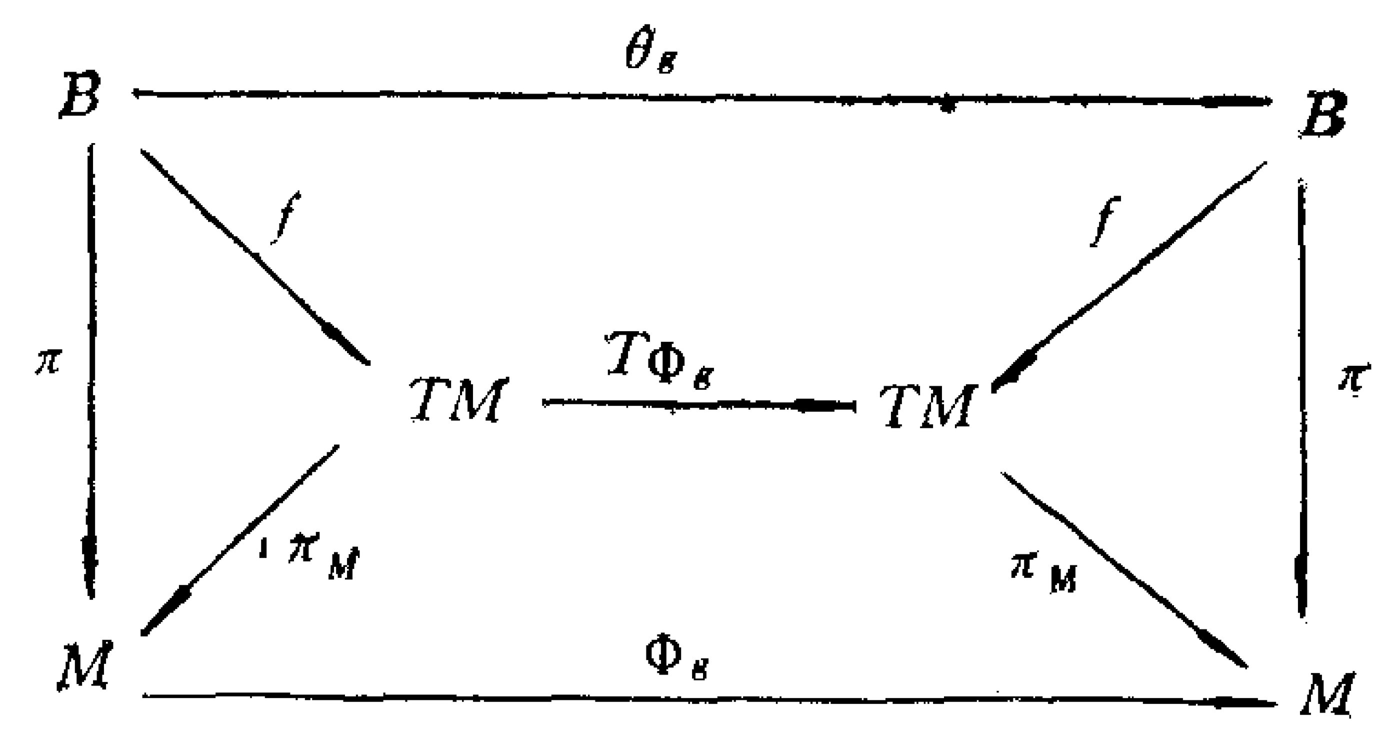


图 2

定义 2.3[1]. 对于非线性控制系统 $\Sigma(B,M,f)$，设 $B = M \times U$, U 是控制流形,如果系统关于 $\theta_g = (\Phi_g, Id_u)$: $(x,u) \longmapsto (\Phi_g(x),u)$ 具有对称 (G,θ,Φ)，则称系统具有状态空间对称 (G,Φ).

令 Φ: $G \times M \to M$表示李群G在流形M上的作用， L_G 表示G的李代数， $\boldsymbol{\xi} \in L_G$ 是任一向量,那么

$$\boldsymbol{\xi}_M(x) = \frac{d}{dt}\Phi(\exp t\boldsymbol{\xi},x)|_{t=0},$$

叫做相应于 $\boldsymbol{\xi}$ 的无穷小生成元. 这里 exp 是指数映射， $t \in R$.

$\boldsymbol{\xi}_M(x)$ 显然是流形M上的向量场. 用同样的方法可以定义 B 上的向量场 $\boldsymbol{\xi}_B(b)$, $b \in B$. 无穷小生成元具有性质: $[\boldsymbol{\xi}_M(x), \boldsymbol{\eta}_M(x)] = -[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]_M(x)$. 其中 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \in L_G$.

对于某流形上的向量场 $\boldsymbol{X}$， 令 $\boldsymbol{X}_t$ 表示它的积分曲线. 从无穷小生成元的定义及图 2 可以看出，如果系统 $\Sigma(B,M,f)$ 具有对称 (G,θ,Φ)，那么下图关于 $t \in R$ 和 $\boldsymbol{\xi} \in L_G$ 是可交换的.

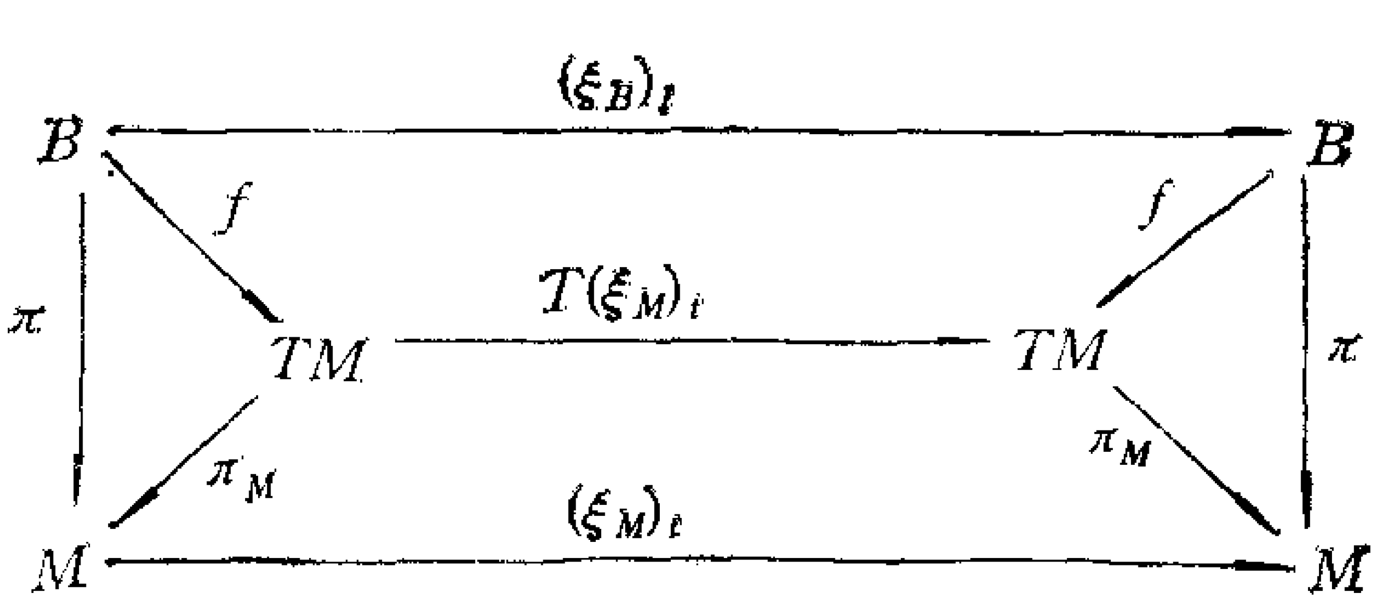


图 3

定义 2.4[1]. 非线性控制系统 $\Sigma(B,M,f)$，如果对任意 $x_0 \in M$ 都存在 x_0 的开邻域V及 $\varepsilon > 0$ 使得对所有的 $b \in \pi^{-1}(V)$, $|t| < \varepsilon$ 及 $\boldsymbol{\xi} \in L_G$, $\|\boldsymbol{\xi}\| < 1$ 都有

$$T(\boldsymbol{\xi}_M)_t f(b) = f((\boldsymbol{\xi}_b)_t(b)), \tag{2.2}$$

则称系统具有无穷小对称 (G,θ,Φ). $\|\cdot\|$ 表示 L_G 上的范数.

定义 2.5[1]. 对于非线性控制系统 $\Sigma(B,M,f)$，设 $B = M \times U$，如果系统关于 $\theta_g = (\Phi_g, Idu)$ 具有对称 (G,θ,Φ)，则称系统具有无穷小状态空间对称 (G,Φ).

由 (2.2) 式可知,具有无穷小状态空间对称的系统 $\Sigma(B,M,f)$，满足

$$T(\boldsymbol{\xi}_M)_t f(x,u) = f((\boldsymbol{\xi}_M)_t(x),u), \tag{2.3}$$

这里 $\boldsymbol{\xi} \in L_G$, $\|\boldsymbol{\xi}\| < 1$, $|t| < \varepsilon$.

定义 2.6[2]. 如果李代数L有两个子代数 L_1 和 L_2，作为向量空间L是 L_1 与 L_2

的直和，关于李括号满足 $[L_1,L_1]\subset L_1$，$[L_2,L_2]\subset L_2$，$[L_1,L_2]\subset L_1$，那么 L 叫做 L_1 与 L_2 的半直和，记作

$$L = L_1\oplus_S L_2. \tag{2.4}$$

由定义不难知道，在半直和条件下 L_1 是 L 的理想，L_2 则未必．如果 L_2 是 L 的理想，则半直和即变为直和．

定义 2.7[2]．设 L 是一李代数，令

$$L(1) = [L,L], \tag{2.5}$$

称 $L(1)$ 为 L 的导出代数．显然，$L(1)$ 是 L 的一个理想．

定义 2.8[2]．对于李代数 L，作其导出代数 $L(1)$，再作 $L(1)$ 的导出代数 $L(2),\cdots$，如果存在某一正整数 r，$L(r)=0$，则称 L 为可解李代数．

对于可解李代数 P，令 $P(0)=P$，知 P 存在非零理想列

$$P(r)\subset P(r-1)\subset\cdots\subset P(1)\subset P(0), \tag{2.6}$$

使得 $P(r+1)=0$，r 是正整数．

三、结 构 分 解

引理 3.1[3]．设非线性控制系统 $\Sigma(B,M,f)$ 具有无穷小状态空间对称 (G,Φ)，那么对任一 $\boldsymbol{\xi}\in L_G$，都有

$$[f(x),\boldsymbol{\xi}_M(x)] = 0 \tag{3.1}$$

成立，其中 $x\in M$．

推论 3.1. 设非线性控制系统 $\Sigma(B,M,f)$ 具有无穷小状态空间对称 (G,Φ)，那么对任意有限个 $\boldsymbol{\xi}^1,\boldsymbol{\xi}^2,\cdots,\boldsymbol{\xi}^m\in L_G$，分布

$$\Delta = Sp\{\boldsymbol{\xi}^i_M(x)\,|\,i=1,\cdots,m\}$$

是关于 f 不变的，即 $[f,\Delta]\subset\Delta$．

如果 $\boldsymbol{\xi}^1,\cdots,\boldsymbol{\xi}^m$ 线性独立，且 $m=\dim L_G$，那么 Δ 与具体的 $\boldsymbol{\xi}^1,\cdots,\boldsymbol{\xi}^m$ 无关，由 L_G 或 G 唯一决定．因此，称 Δ 为相应于 L_G 的分布．

引理 3.2[4]．设 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_k$ 为 $p\in M$ 点邻域的一族分布，则它们同时可积的充要条件是

1) $\Delta_1,\cdots,\Delta_k$ 在 p 点线性无关；

2) 在 p 点的某一邻域内，分布

$$\Delta_i+\Delta_j \quad 1\leqslant i,j\leqslant k$$

非奇异，对合．

定理 3.1. 设非线性控制系统 $\Sigma(B,M,f)$ 具有无穷小状态空间对称 (G,Φ)，$L_G = L^1_G\oplus_S L^2_G$，$\Delta_1$，$\Delta_2$ 为分别相应于 L^1_G 和 L^2_G 的分布，那么 Δ_1 及 Δ_2 在 Φ 的非退化点[1] $m\in M$ 处同时可积．

证明． 由于 L^1_G 和 L^2_G 都是 L_G 的子代数，由文献 [1] 知 Δ_1，Δ_2 都是对合的，$\Delta_1+\Delta_2$ 显然也是对合的．Φ 在 m 点非退化，则存在 m 的邻域 V，在 V 上 Δ_1 和 Δ_2 都非奇异，$\Delta_1+\Delta_2$ 显然也非奇异．由引理 3.2 知 Δ_1 和 Δ_2 同时可积．

推论 3.2. 设非线性控制系统 $\Sigma(B,M,f)$ 具有无穷小状态空间对称 (G,Φ), $L_G = L_G^1 \oplus_S L_G^2$, 且 L_G^2 可表示为直和

$$L_G^2 = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k,$$

其中 $L_i (i=1,\cdots,k)$ 都是 L_G^2 的子代数. 令 $\Delta_1, \Delta^1, \cdots, \Delta^k$ 为分别相应于 $L_G^1, L_1, \cdots, L_k$ 的分布,则这一分布族在 Φ 的非退化点处是同时可积的.

证明可由引理 3.2 及定理 3.1 推出.

引理 3.3[4] (推广的 Frobenius 定理). 设 $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_k$ 为 $p \in M$ 点邻域的一族非奇异对合分布,那么存在 p 点邻域上的局部坐标 $x=(x^1,x^2,\cdots,x^k,x^{k+1})$, 使得

$$\Delta_i = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^i}\right\},$$

$1 \leqslant i \leqslant k$. 这里 $\partial/\partial y$ 的意义是: 设 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_s)$, 则

$$\partial/\partial y = \{\partial/\partial y_1,\cdots,\partial/\partial y_s\}.$$

引理 3.4. 设 $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots \subset \Delta_k$ 为 $p \in M$ 点邻域的一族非奇异对合分布; $\Delta_k, \Delta_{k+1}, \cdots, \Delta_r$ 是 p 点邻域的一族同时可积的非奇异对合分布,那么存在 p 的邻域 V 及 V 上的局部坐标 $x=(x^0,x^1,\cdots,x^k,x^{k+1},\cdots,x^r)$, 使得

$$\Delta_i = \mathrm{Sp}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^i}\right\},\ 1 \leqslant i \leqslant k; \tag{3.2}$$

$$\Delta_j = \mathrm{Sp}\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\right\},\ k+1 \leqslant j \leqslant r. \tag{3.3}$$

证明. 设 $\dim\Delta_k = i_k$, 在 Δ_k 中取出如下线性无关的向量场:

$$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots \boldsymbol{X}_{i_1}, \boldsymbol{X}_{i_1+1}, \cdots, \boldsymbol{X}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{X}_{i_k}, \tag{3.4}$$

使得 $\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{i_m}\}$ 是 Δ_m 的一组基$(m=1,2,\cdots,k)$.再设 $\Delta_{k+1},\Delta_{k+2},\cdots,\Delta_r$ 的维数分别为 $i_{k+1},i_{k+2},\cdots,i_r$. 在它们之中分别取出一组基构成如下线性无关的向量组:

$$\boldsymbol{X}^1, \boldsymbol{X}^2, \cdots, \boldsymbol{X}^d, \tag{3.5}$$

其中 $d = i_{k+1} + i_{k+2} + \cdots + i_r$. 将式 (3.4),(3.5) 合写为如下形式(按顺序):

$$\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_e, \tag{3.6}$$

其中 $e = i_k + d$, 则式 (3.6) 仍是线性独立的. 添加 $n-e$ 个向量场 $\boldsymbol{X}_{e+1},\cdots,\boldsymbol{X}_n$,使之构成 T_pM 的一组基,作函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \Phi_{x_1}^{X_1} \circ \Phi_{x_2}^{X_2} \circ \cdots \circ \Phi_{x_n}^{X_n}(p),$$

其中 Φ_x^{X} 表示向量场 $\boldsymbol{X}$ 的积分曲线, 则 F 所定义的映射是从 R^n 的 O 点邻域到 M 上 p 点邻域的一个同胚映射,且由于 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_k$ 满足推广的 Frobenius 定理, $\Delta_k,\Delta_{k+1},\cdots,\Delta_r$ 满足同时可积性,故 F^{-1} 所定义的局部坐标满足式 (3.2),(3.3)[4].

引理 3.5[2]. 任一李代数 L 都可表示为一可解李代数 P 与一半单李代数 S 的半直和

$$L = P \oplus_S S. \tag{3.7}$$

引理 3.6[2]. 李代数 S 半单的充分必要条件是 S 可写为其单理想的直和

$$S = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_t. \tag{3.8}$$

引理 3.7[1]. 设 $\boldsymbol{X}^1,\cdots,\boldsymbol{X}^k$ 是流形 M 上的向量场且在 $m \in M$ 点线性独立,那么存在 m 处的局部坐标卡 (V,ϕ), 具有坐标函数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得

$$X^i = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_V,\ 1 \leqslant i \leqslant k$$

成立的充分必要条件为 $[X^i, X^j] = 0$，$1 \leqslant i,\ j \leqslant k$，而且如果 $(\tilde{V}, \tilde{\phi})$ 是给定的坐标卡满足

$$\{X^1, \cdots, X^k\} \subset \mathrm{Sp}\left\{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}\right\},\ j \geqslant k$$

那么 (V, ϕ) 的坐标函数可选择 $x_r = \tilde{x}_r$，$j+1 \leqslant r \leqslant n$.

根据以上引理有

定理 3.2. 设非线性控制系统 $\Sigma(B, M, f)$ 具有无穷小状态空间对称 (G, Φ)，Φ 在 $m \in M$ 点非退化. 那么存在 m 处的局部坐标卡 (V, ϕ)，具有坐标函数

$$z = (z_1, z_2, \cdots, z_n),$$

使得系统在 z 坐标下具有如下形式:

$$\begin{aligned}
\dot{z}^0 &= f^0(z^0, u),\\
\dot{z}^1 &= f^1(z^0, z^1, u),\\
\dot{z}^2 &= f^2(z^0, z^1, z^2, u),\\
&\cdots\cdots\\
\dot{z}^r &= f^r(z^0, z^1, z^2, \cdots, z^r, u),\\
\dot{z}^{r+1} &= f^{r+1}(z^0, z^1, z^2, \cdots, z^r, u),\\
\dot{z}^{r+2} &= f^{r+2}(z^0, z^{r+2}, u),\\
\dot{z}^{r+3} &= f^{r+3}(z^0, z^{r+3}, u),\\
&\cdots\cdots\\
\dot{z}^{p+1} &= f^{p+1}(z^0, z^{p+1}, u),
\end{aligned}$$

这里 $z = (z^0, z^1, \cdots, z^{p+1})$.

证明. 不妨设 G 的李代数 L_G 有形式 (3.7) 且其中 S 有形式 (3.8)，P 有导出理想列式 (2.6). 令 Δ_i 为相应于 $P(i)$ 的分布 $(i = r, r-1, \cdots, 0)$，Δ^i 为相应于 S_i 的分布 $(i = 1, 2, \cdots, t)$. 由 Φ 的非退化性及推论 3.2 知，$\Delta_r \subset \Delta_{r-1} \subset \cdots \subset \Delta_0$ 在 m 点满足引理 3.3，$\Delta_0, \Delta^1, \cdots, \Delta^t$ 在 m 处满足同时可积性，故下面的分布列

$$\Delta_r \subset \Delta_{r-1} \subset \cdots \subset \Delta_0, \Delta^1, \Delta^2, \cdots, \Delta^t,$$

满足引理3.4的条件. 把上式按顺序记为

$$\Delta(0) \subset \Delta(1) \subset \cdots \subset \Delta(r), \Delta(r+1), \cdots, \Delta(p), \tag{3.9}$$

其中 $p = r + t$. 由引理 3.4 知，存在 m 处的局部坐标卡 $(\tilde{V}, \tilde{\phi})$，具有坐标函数 $\tilde{x} = \tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^r, \cdots, \tilde{x}^{p+1})$ 使得

$$\Delta(i) = \mathrm{Sp}\left\{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^0}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right\},\ 0 \leqslant i \leqslant r, \tag{3.10}$$

$$\Delta(j) = \mathrm{Sp}\left\{\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right\},\ r+1 \leqslant j \leqslant p. \tag{3.11}$$

现在于 $P(r)$ 中取出一组基(其模均小于 1)

$$\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \cdots, \boldsymbol{\xi}^{k_r}.$$

由于 $P(r+1) = 0$ 知其相应的无穷小生成元满足

$$[\boldsymbol{\xi}^i_M, \boldsymbol{\xi}^j_M] = 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant k_r. \tag{3.12}$$

而且显然有

$$\{\xi_M^1,\cdots,\xi_M^{k_r}\}\subset\Delta_r=\Delta(0)$$

故由引理 3.7，存在m处坐标卡 (V,ϕ)，具有坐标函数 $x=(x^0,x^1,\cdots,x^r,\cdots,x^{p+1})$ 使得

$$\xi_M^i=\frac{\partial}{\partial x_i}|_V,\ 1\leqslant i\leqslant k_r. \tag{3.13}$$

其中 $x^0=(x_1,\cdots,x_{k_r})$，$x^j=\tilde{x}^j$，$1\leqslant j\leqslant p+1$. 这样式 (3.10),(3.11) 变为

$$\Delta(i)=\mathrm{Sp}\left\{\frac{\partial}{\partial x^0},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^i}\right\},\ 1\leqslant i\leqslant r, \tag{3.14}$$

$$\Delta(j)=\mathrm{Sp}\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\right\},\ r+1\leqslant j\leqslant p \tag{3.15}$$

由 (3.13) 式和引理 3.1 中 (3.1) 式，可知

$$\frac{\partial f}{\partial x^0}=0.$$

再由推论 3.1 知，$\Delta(i)$ 都是 f 不变的 $(i=0,1,\cdots,p)$，可知系统 $\Sigma(B,M,f)$ 在m处的局部坐标卡 (V,ϕ) 及坐标 x 下，具有形式

$$\begin{aligned}
\dot{x}^0&=f^0(x^1,x^2,\cdots,x^{r-1},x^r,x^{p+1},u)\\
\dot{x}^1&=f^1(x^1,x^2,\cdots,x^{r-1},x^r,x^{p+1},u)\\
\dot{x}^2&=f^2(x^2,\cdots,x^{r-1},x^r,x^{p+1},u)\\
&\cdots\cdots\\
\dot{x}^{r-1}&=f^{r-1}(x^{r-1},x^r,x^{p+1},u)\\
\dot{x}^r&=f^r(x^r,x^{p+1},u)\\
\dot{x}^{r+1}&=f^{r+1}(x^{r+1},x^{p+1},u)\\
&\cdots\cdots\\
\dot{x}^p&=f^p(x^p,x^{p+1},u)\\
\dot{x}^{p+1}&=f^{p+1}(x^{p+1},u)
\end{aligned}$$

作坐标变换 $x\to z$: $z^0=x^{p+1}$, $z^1=x^r$, $z^2=x^{r-1}$, $z^3=x^{r-2},\cdots$, $z^{r+1}=x^0$, $z^{r+2}=x^{r+1}$, $z^{r+3}=x^{r+2},\cdots,z^{p+1}=x^p$，系统在 z 坐标下即为定理中的形式.

参 考 文 献

[1] Grizzle, J. W. and Marcus, S. I., The Structure of Nonlinear Control Systems Possessing Symmetries, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-30** (1985), 248—257.

[2] 邵常贵等，李群论与纤维丛，华中工学院出版社，1986.

[3] Nijmeijer, H. and van der schaft, A. J., Partial Symmetries for Nonlinear Systems, *Maths. Systems Theory*, **18** (1985), 79—96.

[4] 程代展，非线性系统的几何理论，科学出版社，1988,92,128.

THE STRUCTURE DECOMPOSITION OF SYMMETRIC NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

XIE XIAOXIN　LIU XIAOPING　ZHANG SIYING

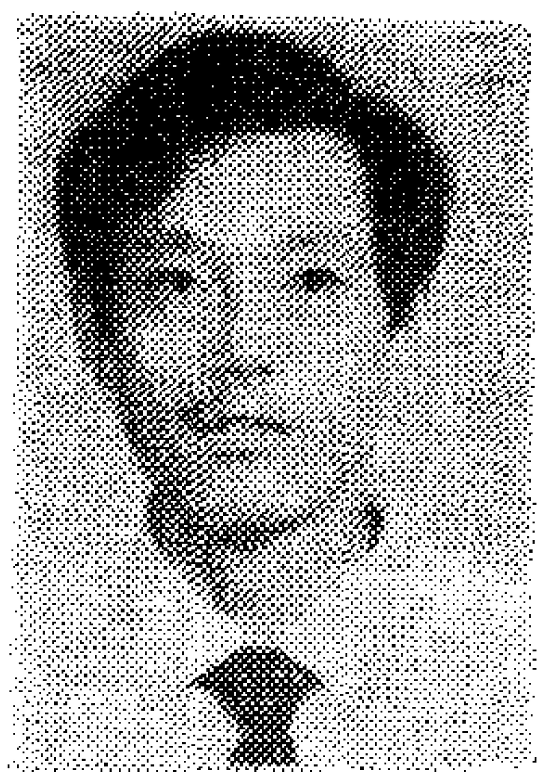
(*Dept. of Automatic Control, Northeast University of Technology, Shenyang* 110006)

ABSTRACT

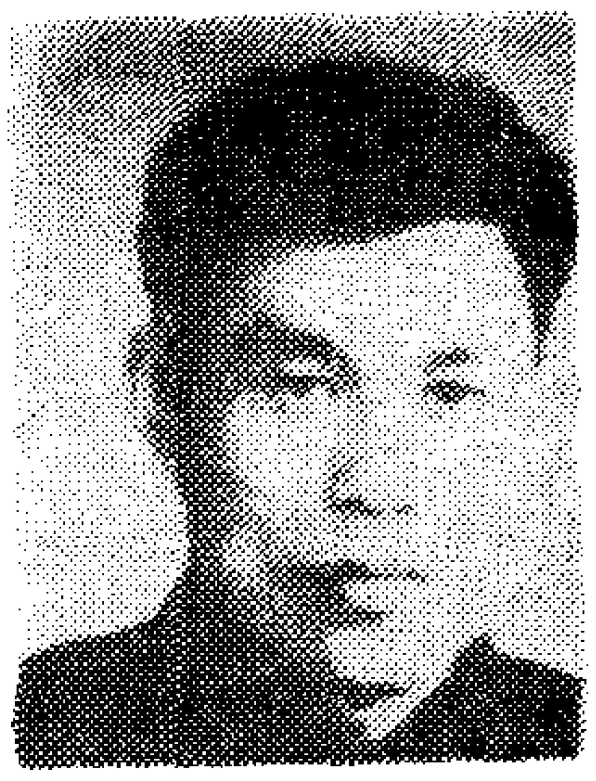
On the basis of reference [1], the paper presents the structure decomposition of symmetric nonlinear control systems by means of the semi-direct sum decomposition of Lie algebras. It is proved that a nonlinear system with infinitesimal state space symmetry has a parallel form of a cascade decomposition and quasi-parallel decomposition.

Key words: Symmetry; Lie group; decomposition; distribution.

谢小信　1966 年 12 月出生于安徽省砀山县. 1988 年毕业于阜阳师范学院数学系，同年考入东北工学院自控系攻读硕士学位，于 1990 年毕业. 现正在东北工学院自控系攻读博士学位，从事复杂非线性系统结构的研究.



刘晓平　1962 年出生于黑龙江省双城县. 分别于 1984、1987、1989 年在东北工学院自控系获学士、硕士和博士学位. 毕业后留校任教并于 1991 年破格晋升为副教授. 在最优控制、对策论、奇异系统及非线性系统等领域从事研究工作，并在国内外学术杂志及会议上发表论文 40 余篇.



张嗣瀛　1948 年毕业于武汉大学，1957—1959 年在苏联莫斯科大学数学力学系进修运动稳定性及自动控制理论. 现任东北工学院自控系教授，自动化研究所所长，中国自动化学会常务理事，《控制与决策》主编，《信息与控制》副主编. 目前主要从事微分对策，复杂控制系统的结构等方面的研究.