第 18 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 18, No. 2
1992 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1992

退化连续系统的可靠度计算[1)]

王　岩
（中国矿业大学北京研究生部，北京 100083）

摘　　要

本文引入连续状态描述系统，给出退化和可靠性定义，提出了两种特殊退化形式下系统可靠度计算的定理，并给出了应用实例.

关键词：连续状态，系统退化，可靠度.

一、连 续 系 统

系统退化即性能劣化，通常是渐变和连续性的. 经典可靠性以离散逻辑和离散状态为基础描述分析系统，较适合刻划系统性能的突变性变化，而刻划渐变性的退化较为困难.

系统性能常用指标刻划，设其取值范围为 V. 在 n 值（离散）逻辑中，V 被分成互不相容的 n 部分：$V_0, \cdots, V_{n-1}$. 离散逻辑变量为 V 上可测映射 $z: V \to I_0 (= \{0, 1, \cdots, n-1\})$. $\forall v \in V_i$, $z(v) = i$, $i \in I_0$; 下面对应引入连续状态. 为反映性能连续变化，应使连续逻辑变量的取值连续不可列. 注意到任一不可列集合的基数与实区间 $I = [0,1]$ 的基数相同[1]，则有如下定义：

定义 1. $(V, \mathscr{P}(V))$ 为可测空间[2)]，称 V 上可测映射 η: $V \to Y (Y = I)$ 为系统连续逻辑变量，Y 称为系统的连续状态集. 用连续状态描述的系统简称为连续系统.

定义 2. $v, v' \in V$, $v \neq v'$，为系统指标的两个不同取值，称系统在指标 v 下的性能优于在指标 v' 下的性能，若有 $\eta(v) < \eta(v')$.

令 T 为时间集，$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ 为系统的样本空间. 系统在 $t (\in T)$ 时刻的指标值，由可测变换 $v_t: (\Omega, \mathscr{P}(\Omega)) \to (V, \mathscr{P}(V))$ 所确定. 令 $y_t = \eta \circ v_t$. 分别把 v_t 和 y_t 称为系统指标变量和连续状态变量. 给定 $\mathscr{P}(\Omega)$ 上概率测度 p，变换族 $\{v_t, t \geqslant 0\}$ 则为一随机过程. 任给时刻 t，可由 v_t 生成 $(V, \mathscr{P}(V))$ 上概率测度 m_t[2]，再由 η 生成 $(Y, \mathscr{P}(Y))$ 上的概率测度 q_t，且满足

$$m_t = p \circ v_t^{-1}, \ \forall E \in \mathscr{P}(V), \ m_t(E) = p(v_t^{-1}(E));$$
$$q_t = m_t \circ \eta^{-1}, \ \forall F \in \mathscr{P}(Y), \ q_t(F) = m_t(\eta^{-1}(F)).$$

本文于 1990 年 4 月 3 日收到.
1）国家自然科学基金资助课题. 本文曾在 1989 年第三届全国可靠性数学年会（西安）上宣读.
2）$\mathscr{P}(\cdot)$ 表示由集合“·”生成的 σ-代数.

经典可靠性定义包括规定条件、规定时间和规定功能三项内容．规定功能具有较广泛的物理含义，对以指标为观测量的系统，规定功能可翻译为系统应具有一定的性能水平．

定义 3. 在给定条件下和给定时间内，连续系统保持一定性能水平的能力称为可靠性，这种能力若用概率表示，则称为可靠度．

把 Y 上表征系统可靠的性能水平相应状态点称为可靠状态，Y_R 为所有可靠状态点之集．

定义 4. 若 $\{y_t, t \geqslant 0\}$ 为具有无限可加性的随机过程，则连续系统的可靠度 $R(t)$ 可表示为

$$R(t) = Pr\left\{\bigcap_{s \leqslant t} \{y_s \in Y_R\}\right\}.$$

连续系统在 t 时刻的可用度 $A(t)$ 为

$$A(t) = Pr\{y_t \in Y_R\}.$$

二、连续系统退化的定义

定义 5. 给定 $\omega \in \Omega$，对某 t，若 $\frac{dy(t,\omega)}{dt} > 0$（或 $= +\infty$），称系统在该次实现的 t 时刻是退化的；若 $y(t,\omega)$ 为 t 的严格单调增函数，称系统在该次实现中是严格单调退化的． 若 $\forall \omega \in \Omega$，$y(t,\omega)$ 均为 t 的严格单调增函数，称系统是严格绝对单调退化的．

定义 6. $E(y_t)$ 为 y_t 的数学期望，若 $\forall t \in T$，$E(y_t)$ 为 t 的严格单调增函数，称系统为严格均值单调退化的．

推论 1. 若系统为严格绝对单调退化的，则必为严格均值单调退化．

证略．

当系统为均值单调退化时，并不一定为绝对单调退化．因此，均值单调退化比绝对单调退化具有更广泛的外延．

三、退化连续系统的可靠度计算

由定义 4，若已知 t 时刻 y_t 的概率分布，可求得系统 t 时刻的可用度 $A(t)$，但不一定能直接求得 t 时刻的可靠度 $R(t)$．这是由于 $R(t)$ 与 t 时刻以前 y_t 的分布有关，当 y_t 的变化较为复杂时，$R(t)$ 难以计算，将涉及 y_t 的无穷维联合分布．下面讨论几种较简单的情况．

定理 1. 若系统是绝对单调退化的，则 $R(t) = A(t)$．

证明．已知 $\{y_t, t \geqslant 0\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ 到 $(Y, \mathscr{P}(Y))$ 的一族可测变换，定义 $\mathscr{P}(\Omega)$ 上集合族 $\{\Omega_t, t \geqslant 0\}$ 为

$$\Omega_t = \{y_t \in Y_R\} = \{\omega \in \Omega : y_t(\omega) \in Y_R\}.$$

i)． 由定义 5，系统为绝对单调退化时，$\forall \omega \in \Omega$，若 $s, t \in T$ 且 $s \leqslant t$，则

$$y_s(\omega) \leqslant y_t(\omega).$$

ii). 由定义 2，若 $y' \in Y_R$，$y'' \in Y$ 且 $y' < y''$，则 $y'' \in Y_R$；若 $y' \bar{\in} Y_R$，$y'' \in Y$ 且 $y'' \geqslant y'$，则 $y'' \bar{\in} Y_R$. iii). $\forall \omega \in \Omega$，若 $\omega \in \Omega_t$，则 $y_t(\omega) \in Y_R$，由 i) 得 $y_s(\omega) \leqslant y_t(\omega)$，再由 ii) 得 $y_s(\omega) \in Y_R$，$\omega \in \Omega_s$，故 $\Omega_t \subseteq \Omega_s$，$\bigcap\limits_{s \leqslant t} \Omega_s = \Omega_t$，即 $\bigcap\limits_{s \leqslant t} \{y_s \in Y_R\} = \{y_t \in Y_R\}$，有

$$R(t) = Pr\left\{\bigcap_{s \leqslant t} \{y_s \in Y_R\}\right\} = \Pr\{y_t \in Y_R\} = A(t).$$

定理得证.

按此定理计算系统可靠度将十分简捷.

应用举例. 在矿井中，备用电机在高湿恒温环境中贮存时，其绝缘将受潮而降低. 当绝缘降到一定程度时，投入电网后将造成绝缘击穿和烧毁电机，导致供电中断. 合理确定电机在井下贮存时间是非常重要而实际的问题.

设电机绝缘电阻 v_t 表示，绝缘连续状态变量 $y_t = \eta(v_t)$，且当 $v_t \geqslant v_s$ 时有 $y_t \leqslant y_s$，当 $v_t = 0$ 时有 $y_t = 1$，当 $v_t = +\infty$ 时有 $y_t = 0$. 统计表明[3]在 t 时刻 v_t 服从正态分布 $N(r_t, \sigma_t)$，且在恒温湿下电阻下降为

$$r_t = R_0 \cdot (1 + t)^{-\alpha}.$$

表 1

	r_t(kΩ)	$R(t)$				
		$v^* = 100$kΩ	$v^* = 50$kΩ	$v^* = 30$kΩ	$v^* = 20$kΩ	$v^* = 10$kΩ
0	1.9×10^5	$>0.9^7$	$>0.9^7$	$>0.9^7$	$>0.9^7$	$>0.9^7$
20	1073.9	$0.9^5 71$	$0.9^6 05$	$0.9^6 41$	$0.9^6 51$	$0.9^6 63$
40	344.37	$0.9^3 81$	$0.9^5 04$	$0.9^5 75$	$0.9^5 875$	$0.9^6 40$
60	175.26	0.9842	$0.9^3 82$	$0.9^4 83$	$0.9^5 52$	$0.9^5 875$
70	135.40	0.916				
80	108.23	0.6486	$0.9^2 64$	$0.9^3 85$	$0.9^4 77$	$0.9^5 752$
90	88.794	0.2643				
100	74.372	0.0423	0.9491	$0.9^2 86$	$0.9^3 87$	$0.9^5 23$
110	66.344		0.8540			
120	54.704	$0.0^4 17$	0.6642	0.9882	$0.9^3 24$	$0.9^4 78$
130	47.796		0.4090			
140	42.176	$<0.0^7 1$	0.1774	0.9261	$0.9^2 57$	$0.9^4 31$
150	37.540		0.0490			
160	33.663		0.0076	0.7069	0.9785	$0.9^3 78$
180	27.587		$0.0^4 25$	0.3313	0.9151	$0.9^3 28$
200	23.084		$<0.0^7 1$	0.0671	0.7649	$0.9^2 77$
220	19.647			$0.0^2 42$	0.4651	$0.9^2 29$
240	19.965			$0.0^4 61$	0.1848	0.981
260	14.807			$0.0^5 154$	.0398	0.9476
280	13.060			$<0.0^7 1$	$0.0^2 293$	0.8795
300	11.620				$0.0^3 15$	0.7558
330	9.887					0.479
360	8.531					0.1945
400	7.135					0.0227

R_0——初始值，α——正常数，t——受潮时间(昼夜)．在井下，备用电机绝缘随受潮时间而下降，$\frac{dv_t(\omega)}{dt} \leqslant 0 \left(\frac{dy_t(\omega)}{dt} \geqslant 0\right)$，满足绝对单调退化条件．若绝缘电阻最低允许值(检漏继电器整定值)为 v^*，$y^* = \eta(v^*)$，有 $Y_R = [0, y^*]$，由定理 1 得

$$R(t) = Pr\{y_t \leqslant y^*\} = \Pr\{v_t \geqslant v^*\} = 1 - \phi\left(\frac{v^* - r_t}{\sigma_t}\right).$$

$\phi(\cdot)$ 为标准正态分布的分布函数．取 BAO-42/4 型电机[4]的一组数据：$R_0 = 1.9 \times 10^8 \Omega$，$\alpha = 1.7$，$\rho = \frac{\sigma_t}{r_t} = 0.2$，将它们带入上式可得 $R(t)$，见表 1．

计算结果表明，电机井下贮存时间、检漏继电器标定值和可靠度三者紧密相连，够成一个贮存维修策略．表 1 给出了一族策略，得到的是可靠度"谱"．可根据具体情况合理选择标定值，正确确定贮存时间并估计可靠度．

使用定理 1 时，首先要求系统符合绝对单调退化的条件，其限制太强．可适当放宽．

推论 2. 若对系统做周期性观测，周期为 T_0，$t_n = nT_0(n = 0, 1, \cdots)$．为观测时刻．如果 $\forall s < t_n, y_s(\omega) < y_{t_n}(\omega)$，则 $R(t_n) = A(t_n)$．

事实上，给定 t_n，由 $y_s < y_{t_n}(s < t_n)$，可得 $\bigcap_{s \leqslant t_n} \Omega_s = \Omega_{t_n}$，进而可得 $R(t_n) = A(t_n)$．

推论 3. 在某特定时刻 t，若 $\forall \omega \in \Omega$，$\forall s < t$，有 $y_s(\omega) < y_t(\omega)$，则有 $R(t) = A(t)$．

推论 3 很容易由推论 2 得到，且突破了周期性观测的限制，因而具有更广泛的用途．

四、结　束　语

连续状态能较好刻划系统退化，可比离散状态给出更多的系统信息，使系统状态直接与性能指标相联系，给出可靠度"谱"．为在较广的范围和意义下制订策略提供了依据．本文所给出的两种特殊退化形式下系统可靠度计算方法，具有一定的实际意义．当然，还有许多工作需要今后继续去做．

参　考　文　献

[1] 徐荣权、金长泽，实变函数论，辽宁人民出版社，1984 年．
[2] 郑宗成，测度与概率基础，广东科技出版社，1984 年．
[3] 〔苏〕Б.Г. 瓦・耶夫，防爆与矿用电气设备的可靠性，郭余庆译，煤炭工业出版社，1987 年．
[4] 〔苏〕В.Г. 索鲍列夫，矿用电气设备的电绝缘，郭余庆译，煤炭工业出版社，1989年．

THE CACULATION OF RELIABILITY OF DEGENERATING CONTINUOUS SYSTEM

WANG YAN

(Graduate School of China University of Mining and Technology, Beijing 100083)

ABSTRACT

In this paper, a continuous state is introduced to describe systems. The definitions of degeneration and reliability are given. The theorem of caculating the system reliability of two kinds of special degenerations is put forward and proved. A practical example is also discued.

Key words: Continuous state: degeneration of system; reliability.