第18卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 18, No. 2
1992年3月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1992

用于图象识别的图象代数特征抽取

洪子泉　　杨静宇
(华东工学院计算机系,南京 210014)

摘　　要

本文证明了图象的奇异值特征具有一系列代数和几何上的不变性以及对噪音的不敏感性,它是识别图象的有效特征. 本文将奇异值特征用于人象识别问题. 根据图象奇异值特征向量样本建立了 Sammon 最佳鉴别平面上的正态模式 Bayes 分类模型. 实验结果表明,奇异值特征向量具有良好的鉴别分离能力.

关键词: 图象识别,代数特征抽取,奇异值特征,人象识别,鉴别向量.

一、引　　言

特征抽取是模式识别研究的基本问题之一. 对于图象识别而言, 抽取有效的图象特征是完成图象识别的首要任务. 目前用于图象识别的特征可以分为如下几种:

1) 直观性特征. 如图象的边沿、轮廓、纹理和区域等,关于这类特征的抽取已有大量文献报道.

2) 灰度的统计特性. 如直方图特征. 将图象看作一种二维随机过程,可以引入统计上的各阶矩作为特征来描述和分析图象. 文[1]研究了各种矩的性质,其中几何不变性对图象识别极为重要[2],根据 Zernike 矩抽取的特征对图象识别相当有效[3].

3) 变换系数特征. 对图象作各种数学变换, 可以将变换的系数作为图象的一种特征. 例如 Fourier 变换、Hough 变换、Hadamard 变换等在图象特征抽取方面均有广泛应用.

作者认为,除上述三种特征外,还有一种特征如下:

4) 代数特征. 它反映了图象的一种内在属性. 将图象作为矩阵看待,可对其进行各种代数变换,或进行各种矩阵分解. 由于矩阵的特征向量反映了矩阵的一种代数属性,并且具有不变性,因此可用来作为图象特征.

最近的研究表明[4-7],矩阵的奇异值分解 (SVD) 是一种新的, 有效的代数特征抽取方法. 奇异值之所以能作为一种特征在图象识别中得到应用, 其理论依据是: 图象的奇异值具有良好的稳定性;奇异值反映了图象的一种代数本质,这种本质不是直观的, 而是一种内在属性; 奇异值具备代数和几何上的不变性. 本文对这几种重要性质加以证明,

本文于1990年2月20日收到.

用图象的 SV 特征向量样本集构造了 Sammon 最佳鉴别平面，在此基础上设计了正态模式的统计分类模型，并将此模型用于人象识别问题，取得了良好的分类效果。

二、奇异值特征抽取

任何一个实对称方阵都可经正交变换转化为对角阵。对于长方阵 $A_{m\times n}$，则可利用所谓的奇异值分解（SVD）将其转化为对角阵。

定理 1（SVD）。令 $A_{m\times n}$ 是实矩阵(不失一般性，设 $m\geqslant n$)，则存在两个正交矩阵 $U_{m\times m}$ 和 $V_{n\times n}$ 及对角阵 $\Sigma_{m\times n}$ 使下式成立:

$$A=U\Sigma V^T, \tag{1}$$

其中

$$\Sigma=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,0,\cdots,0). \tag{2}$$

式中 T 表示转置，$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k$,

$$U=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{u}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{u}_m),$$

$$V=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{v}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{v}_n),$$

$\lambda_i^2(i=1,2,\cdots,k)$ 是 AA^T 并且也是 A^TA 的特征根，λ_i 称为 A 的奇异值。$\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{v}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 分别是 AA^T 和 A^TA 的对应于 λ_i^2 的特征向量。$\boldsymbol{u}_i(i=k+1,\cdots,m)$ 是为了表达上的方便而引入的 $(m-k)$ 个列向量，可以设想它是 AA^T 对应于 $\lambda=0$ 的特征向量。同样，$\boldsymbol{v}_i(i=k+1,\cdots,n)$ 可设想是 A^TA 对应于 $\lambda=0$ 的特征向量。将(1)式写成乘积的形式，

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{u}_i\boldsymbol{V}_i^T. \tag{3}$$

如果矩阵 A 代表一幅图象，式(3)就是对该图象进行了正交分解。将矩阵 Σ 中主对角线上的奇异值元素 λ_i 连同剩余的 $(n-k)$ 个 0 构成一个 n 维列向量。

$$\boldsymbol{x}_{n\times1}=\Sigma\boldsymbol{e}=[\lambda_1,\cdots,\lambda_k,0,\cdots,0]^T. \tag{4}$$

其中，列向量 $\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^T_{n\times1}$。称 $\boldsymbol{x}_{n\times1}$ 为 A 的奇异值特征向量（SV 特征向量）。对于任何一个实矩阵 A，在 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k$ 的限制下，奇异值分解式中，奇异值对角矩阵 Σ 是唯一的。因此，原图象 A 对应于唯一的 SV 特征向量。

下面证明 SV 特征向量的几个重要性质。

1）SV 特征向量的稳定性。

由于原始图象与它的 SV 特征向量的唯一对应关系，因此可以用 SV 特征向量描述二维图象。关键问题在于 SV 特征向量是否稳定；即当图象的灰度出现小的变化时，其 SV 特征向量是否会出现大的变化。若不出现大的变化，则称之为稳定的。SVD 扰动分析表明[8]，SV 特征具有良好的稳定性，下面的定理说明了这一点。记 $R^{m\times n}$ 是所有 $m\times n$ 阶实矩阵的全体。

定理 2. 设 $A_{m\times n}$，$B_{m\times n}\in R^{m\times n}$ 的奇异值分别是 $\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n,\tau_1\geqslant\cdots\geqslant\tau_n$，则对于 $R^{m\times n}$ 上任何一种酉不变范数 $||\cdot||$，有(证明从略)

$$\|\mathrm{diag}(\tau_1-\sigma_1,\cdots,\tau_n-\sigma_n)\|\leqslant\|B-A\|, \tag{5}$$

定理中的酉不变范数如果取为 Frobenius 范数 $\|\cdot\|_F$，则(5)式成为

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\tau_i-\sigma_i)^2}\leqslant\|A-B\|_F,\tag{5.1}$$

如果取为谱范数$\|\cdot\|_2$,则(5)式成为

$$|\tau_i-\sigma_i|\leqslant\|B-A\|_2,\ i=1,2,\cdots,n,\tag{5.2}$$

由于 SV 特征向量具有良好的稳定性,所以它对图象噪音、图象光照条件变化引起的灰度变化具有不敏感的特性.

2) SV 特征向量的转置不变性.

根据 SVD 定理,有

$$AA^T\boldsymbol{u}=\lambda^2\boldsymbol{u}$$

$$A^TA\boldsymbol{v}=\lambda^2\boldsymbol{v}$$

可见,A和 A^T 有相同的奇异值,即对应同一个 SV 特征向量.

3) SV 特征向量的旋转不变性.

首先引入初等正交变换. 形如 $Q=I-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ 的方矩称为初等正交矩阵，或 Householder 变换. 其中 I 为单位矩阵，$\boldsymbol{u}$ 是长度为一的实 n 维列向量.

任一旋转变换矩阵都可以分解为两个正交矩阵的乘积. 设原始图象矩阵为 A，对其作旋转变换相当于对 A 左乘一正交矩阵 P，得到的图象为 PA. 于是有

$$(PA)(PA)^T=P(AA^T)P^T,\tag{6}$$

其中 $P^T=P^{-1}$. 可见对A的正交变换导致了对 AA^T (或 A^TA) 作正交相似变换. 由于 AA^T 和 $P(AA^T)P^T$ 有相同的特征根，因此图象A和旋转后的图象有相同的 SV 特征向量.

4) SV 特征向量的位移不变性.

对图象的位移变换归结为对图象矩阵做行(或列)的置换，交换矩阵A的第 i, j 两行等价于在该矩阵的左边乘上矩阵

$$I_{i,j}=I-(e_i-e_j)(e_i-e_j)^T,$$

其中，e_i 和 e_j 分别表示单位矩阵I 的第 i 列和第 j 列. 变换后的矩阵为 $I_{i,j}A$. 已知 $I_{i,j}^T=I_{i,j}=I_{j,i}^T$，于是 $(I_{i,j}A)(I_{i,j}A)^T$ 的特征方程为

$$|(I_{i,j}A)(I_{i,j}A)^T-\lambda I|=0,$$

上式左边可简化为

$$\begin{aligned}|I_{i,j}AA^TI_{i,j}^T-\lambda I|&=|I_{i,j}|\times|AA^T-\lambda I_{i,j}^{-1}I_{i,j}^{-1}|\times|I_{i,j}|\\&=|AA^T-\lambda I|=0.\end{aligned}$$

所以,原始图象A与其交换两行后的图象 $I_{i,j}A$ 有相同的 SV 特征向量. 同理可证对列的置换也有相同的结果.

5) SV 特征向量的镜象变换不变性.

若对任何一个垂直于 $\boldsymbol{x}$ 的向量 $\boldsymbol{y}$，有关系 $T(\boldsymbol{y}+\alpha\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}-\alpha\boldsymbol{x}$，其中 α 是实常数，则称变换 $T(\boldsymbol{w})$ 为镜象变换. Householder 变换的矩阵为 $T=I-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$，对于任何一垂直于 $\boldsymbol{u}$ 的向量 $\boldsymbol{w}$，有 $T*(\boldsymbol{w}+\alpha\boldsymbol{u})=\boldsymbol{w}-\alpha\boldsymbol{u}$. 因此，Householder 变换是一种镜象变换. 根据性质 3) 的推导可知，SV 特征向量具有镜象变换不变性.

对于图象的任何一种特征抽取，都要求抽取的特征具有代数和几何上的不变性. 显

然SV特征具有这些不变性，这就是把它用作图象一种代数特征的理论依据.

三、奇异值特征向量的 Foley-Sammon 变换

将图象 $A_{m\times n}$ 表达为 n 维的 SV 特征向量后，便可在这个 n 维特征空间中考虑图象识别问题了. 尽管原始图象已被抽象为 n 维特征向量，但对任何一个图象识别任务而言，特征空间的维数仍然很高. 例如，在本文给出的人象识别问题中，一张 32mm × 27mm 的人脸照片需要用 70 维的 SV 特征向量描述. 大量研究结果表明，直接在高维特征空间中设计分类模型是不可取的. 通过某种数学变换将高维特征空间压缩成低维，如二维，甚至一维的特征空间，在压缩了的空间上可以更好地了解模式样本分布的情况. 这样就可以设计出适合特定问题的分类模型. 和许多研究人员取得的结果一样，作者的识别实验表明，同一个分类器在压缩了的空间中正确识别率高于在原始高维空间中的识别率.

在众多的维数压缩变换中，基于 Fisher 准则的 Foley-Sammon 最佳鉴别向量[9]是一种最有效的方法. 所谓 Fisher 准则可表示为

$$J_F(\varphi)=\frac{\varphi' S_b\varphi}{\varphi' S_w\varphi}. \tag{7}$$

其中，S_b 和 S_w 分别是样本的类间和类内散布矩阵. Foley-Sammon 变换的主要思想是在对 φ 加以某些约束的条件下求解使(7)式取极大值的向量 φ.

本文在人象照片数量(类别数)较小的情况下，使用最佳鉴别向量集中的前两个向量，即 Sammon 鉴别平面，对人象进行了识别实验. 为了求解最佳鉴别向量，需要采集大量图象样本以便计算样本的散布矩阵 S_b 和 S_w. 为此，对同一张人象照片重复采样多次. 每次采样时，摄象机与照片的相对位置略有变动，以便获得较好的统计特性. 由于在小样本情况下类内散布矩阵 S_w 为奇异阵，使求解变得很困难. 文[10]中提出用 S_w 的广义逆 S_w^+ 代替逆矩阵的办法. 本文则采用了一种新的方法，即对奇异的 S_w 加入扰动，使得它变为非奇异矩阵. 于是，通常求解最佳鉴别向量的方法便可使用了.

四、实 验 结 果

前面已证明，SV 特征向量具有代数和几何上的不变性，这使得它具备了描述图象的优良性能. 为了检验 SV 特征向量以及前一节提出的正态分类模型的分类性能，本文设计了识别 9 张 32mm × 27mm 人脸照片的实验. 通过采样，得到灰度范围为 0—255 的 84 × 70 阶矩阵. 在摄象机与照片相对位置略有变化的条件下，对每张照片采样 5 次，即每类有 5 个图象样本，总共获得 45 个图象矩阵. 根据这 45 个样本便可建立最佳鉴别平面上的统计模型.

首先，对图象矩阵作 SVD 分解，抽取图象的 SV 特征向量之一如下:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}=(&0.9632\ 0.1513\ 0.1142\ 0.0893\ 0.0767\ 0.0728\ 0.0661\ 0.0612\ 0.0535\\ &0.0351\ 0.0294\ 0.0268\ 0.0251\ 0.0235\ 0.0186\ 0.0165\ 0.0139\ 0.0137\\ &0.0115\ 0.0094\ 0.0091\ 0.0084\ 0.0077\ 0.0074\ 0.0072\ 0.0067\ 0.0063\end{aligned}$$

0.0061 0.0059 0.0057 0.0056 0.0053 0.0052 0.0050 0.0049 0.0049
0.0046 0.0043 0.0041 0.0039 0.0038 0.0037 0.0035 0.0034 0.0033
0.0033 0.0031 0.0029 0.0029 0.0028 0.0027 0.0026 0.0024 0.0023
0.0022 0.0020 0.0019 0.0017 0.0016 0.0016 0.0015 0.0014 0.0012
0.0011 0.0010 0.0009 0.0008 0.0006 0.0005 0.0004$)^T$.

将求得的45个SV特征向量在小样本条件下建立基于SV特征向量的最佳鉴别平面以及正态模式的二次分类器，然后用图象样本进行识别实验．实验结果是：二次分类器正确地识别了全部45个训练样本;在此基础上,利用同样9个人的13张照片组成检验样本集，其中有3张照片不属于训练样本集，而是同一人不同年龄时期的照片．识别结果仍有较高的正确率．因篇幅所限,实验的详细情况见文[11].

五、结 论

本文证明了SV特征向量具有正交变换、旋转、位移、镜象映射等代数和几何上的不变性．根据矩阵扰动理论可知，SV特征向量具有良好的稳定性．这些性质使SV特征向量成为图象描述与识别的一种有效工具．实验结果表明，基于SV特征建立的二次分类模型较好地完成了人象识别这一模式识别领域的前沿课题．本文提出的SV特征抽取以及建模方法具有一般性,可应用于其它模式识别问题．

参 考 文 献

[1] Teh, C. H. and Chin, R. T., On Image Analysis by the Methods of Moments, *IEEE. Trans. on PAMI*, **PAMI-10**(1988), 4, 496—513.

[2] Maitra, S., Moment Invariants, *IEEE. Proceedings*, **67**(1979), 4, 697—699.

[3] Khotanzad, A., et al., Zernike Moment Based Rotation Invariant Feature for Pattern Recognition, *SPIE.*, **1002**(1988), 212—219.

[4] Marinovic, N. M. and Eichmann, G., Feature Extraction and Pattern Classification in Space-Spatial Frenquency Domain, *SPIE.*, **579**(1985), 19—26.

[5] Sullivan, B. J. and Liu, B., On the Use of Singular Value Decomposition and Decimation in Discrete-Time Band-Limited signal Extrapolation, *IEEE. Trans. on Acoust, Speech, Signal Processing*, **ASSP-32**(1984), 6.

[6] Klema, V. C., The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications, *IEEE. Trans. on Automatic Control*, **AC-25**(1980), 2, 164—176.

[7] 李淑秋,侯自强,用奇异值分解法提取微弱的胎儿心电信号,数据采集与处理,4(1989),增刊,12—14.

[8] 孙继广,矩阵扰动分析,科学出版社,1987,134—136.

[9] Foley, D. H. and Sammon Jr., J. W., An Optimal Set of Discriminant Vectors, *IEEE. Trans. on Computer*, C-24(1975), 3, 281—289.

[10] Tian, Q., et al, Comparison of Statistical Pattern Recognition Algorithms for Hybrid Processing II, Eigenvector Based Algorithms, *J. Opt. Soc. Am. A*, 5(1988), 10, 1670—1682.

[11] Hong, Z. Q., Algebriac Feature Extraction of Image for Recognition, *Pattern Recognition*, 24(1991), 3, 211—219.

ALGEBRAIC FEATURE EXTRACTION OF IMAGES FOR RECOGNITION

HONG ZIQUAN YANG JINGYU

(Dept. of Computer Science, East-China Institute of Technology, Nanjing, 210014)

ABSTRACT

In this paper, it is proved that the Singular Value (*SV*) feature vector has some important properties such as the invariance to the algebraic and geometric transformations, and the insensitiveness to noise. Therefore, th *SV* feature is very useful for describing and recognizing images. As an example, the *SV* feature vector is used to a problem of recognizing human facial images. The normal pattern Bayes classification model based on the Sammon optimal discriminant plane is constructed. The experimental results show that the *SV* feature vector has strong ability for the separating classes.

Key words: Image recognition; algebraic feature extraction; singular value feature; human facial recognition; discriminant vector.