第 18 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 18, No. 2
1992 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1992

LQ 最优控制系统中加权阵的确定

王 耀 青
(浙江大学能源工程系,杭州 310027)

摘　　要

本文研究了 LQ 最优调节器的逆问题. 在控制变量加权矩阵 R 给定的条件下，通过引入一组自由变量,给出了满足闭环系统特征值要求的状态加权矩阵 Q 的一种参数化表示结果.基于这种结果,研究了 LQ 逆问题的矩阵变换解法和一类系统的 LQ 逆问题的解法. 此外,文中还给出了不求解代数矩阵 Riccati 方程确定系统的最优状态反馈系数矩阵 K 的方法.

关键词: 最优控制, LQ 逆问题,加权矩阵.

一、引　　言

LQ 最优调节器逆问题研究的内容是如何确定 LQ 最优控制问题

$$\begin{cases} J = \int_0^\infty [x^T Q x + u^T R u] d\tau & (1) \\ \dot{x} = Ax + Bu & (2) \end{cases}$$

中的加权矩阵 Q 和 R，使闭环控制系统

$$\dot{x} = (A - BK)x, \quad K = R^{-1}B^T P, \tag{3a,b}$$

的特征值为期望值 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. 式中的矩阵均为适当的维数. 此外,矩阵 P 是方程

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{4}$$

的唯一对称正定解.

对 LQ 逆问题进行研究的方法很多,例如参考文献[1]. 但研究多基于数值迭代求解方法. 本文将研究 LQ 逆问题的显式代数解法和矩阵变换解法,并附有算例,用以说明这些方法的有效性.

二、主 要 结 论

为了保证 LQ 逆问题解的存在性，定义系统(2)的最优闭环极点的集合为 $C_{opt}^- = \{s \in C | s \in \lambda(A - BK), \ K = R^{-1}B^T P, \ A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0; \ \forall Q = Q^T \geqslant 0, \forall R = R^T > 0\}$. 其中 $\lambda(\cdot)$ 表示矩阵●的全部特征值的集合,并假定 $\lambda_i \in C_{opt}^-$,

本文于 1988 年 5 月 19 日收到.

$i=1,2,\cdots,n$. 关于 $\lambda_i\in C^-_{opt}$ 的条件,可以参阅文献[2-3]. 此外,文中还将定义

$$\alpha_i=\alpha(\lambda_i)\alpha(-\lambda_i),\quad C=(B\ \ AB\cdots A^{n-1}B),$$
$$\phi_i=CH\Lambda_i^+(\Lambda_i^-)^THC^T\triangleq\phi_i^+(\phi_i^-)^T,$$
$$\Lambda_i^\pm=[I_m\ \ \pm\lambda_iI_m\cdots(\pm\lambda_i)^{n-1}I_m]^T,$$

其中 $H=$ 第一行为 $[a_1I_m,\cdots,\ a_nI_m]$ 的左上三角 Toeplitz 矩阵, $a_i,i=1,2,\cdots n$ 为系统(2)的开环特征多项式

$$\alpha(s)=\det(sI_n-A)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0 \tag{5}$$

的系数; I_τ 为 $\tau\times\tau$ 维的单位矩阵. 后文将以 I 来代替 I_τ.

定理 1. 考虑由(1)—(4)所定义的 LQ 逆问题,如果取 $R=I$, 则满足 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 要求的矩阵 Q 可以参数化表示为

$$Q=-(\alpha_1\xi_1\ \ \alpha_2\xi_2\cdots\alpha_n\xi_n)(\phi_1\xi_1\ \ \phi_2\xi_2\cdots\phi_n\xi_n)^{-1} \tag{6}$$

的充分必要条件为

i) (3a,b)式的特征值为 $\lambda_i,\lambda_i\in C^-_{opt}$, $i=1,2,\cdots,n$ 且 λ_i 的几何重根个数等于其代数重根个数;

ii) 当 $\lambda_i\in\lambda(\pm A)$ 时, A 的特征值集合 $\{\lambda_{oi}\}_{i=1}^n$ 中的某个 $\lambda_{oi},\lambda_{oi}=\lambda_i$ 或 $\lambda_{oi}=-\lambda_i$ 的几何重根个数为 1.

式中 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ 的选取使得 $Q=Q^T\geqslant0$, $\{\phi_i\xi_i\}_{i=1}^n$ 在 C^n 上线性独立,且当 $\lambda_i=\lambda_j^*$ 时 $\xi_i=\xi_j^*$ ($*$ 表示复数共轭).

推论 1. 式(3b)可以表示为

$$K=-[\alpha(\lambda_1)V_1\cdots\alpha(\lambda_n)V_n][X_1\cdots X_n]^{-1}, \tag{7}$$

式中

$$V_i=\alpha(-\lambda_i)B^T(-\lambda_iI-A^T)^{-1}\xi_i=(\phi_i^-)^T\xi_i, \tag{8}$$
$$X_i=\alpha(\lambda_i)(\lambda_iI-A)^{-1}BV_i=\phi_i^+V_i=\phi_i\xi_i. \tag{9}$$

由上述结论可知,求 LQ 逆问题解的关键问题是求解 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$. 下面将是一些具体解法.

引理 1. LQ 逆问题有解 $R=R^T>0$, $Q=D^TD$, $D\in \boldsymbol{R}^{1\times n}$, 的充分必要条件是

i) (2) 式的特征值 $\{\lambda_{oi}\}_{i=1}^n$ 的几何重根个数为 1;

ii) λ_i 满足 $\lambda_i=\lambda_j$, $i\neq j$, $\lambda_i\in C^-_{opt}$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

定理 2. 如果 $\{\lambda_{oi}\}_{i=1}^n$ 的几何重根个数为 1, 且 $\lambda_i\in C^-_{opt}$, $\lambda_i\neq\lambda_j$, $i\neq j$, 则满足 λ_i 要求的加权矩阵 Q 可以由以下方程来确定:

$$Q=D^TD,\ \ D\in\boldsymbol{R}^{1\times n}, \tag{10}$$

其中矩阵 D 是方程

$$D\phi_iD^T=-\alpha_i,\ \ \lambda_i\bar{\in}\lambda(\pm A), \tag{11}$$
$$D\phi_j\xi_j=0,\ \ \lambda_j\in\lambda(\pm A),\ \ \forall\xi_j \text{ 使得 } \phi_j\xi_j\neq0 \tag{12}$$

的解,式中 $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

根据定理 2, 如果要求 K, 则令

$$\xi_i=k_iD^T,\ \ k_i\neq0,\ \ \lambda_i\bar{\in}\lambda(\pm A), \tag{13}$$

结合(12)式,由(7)—(9)式就可以达到目的.

引理 2. 1) $\{\phi_i\xi_i\}_{i=1}^n$ 在 C^n 上线性独立的充分条件是矩阵对 (Q,A) 可观; 2)$(Q,$

A) 可观的充分条件是 $\lambda_i \bar{\in} \lambda(\pm A)$，且存在某个矩阵 Q，$Q = Q^T \geqslant 0$。

根据引理 2，为了简化定理 1 的约束条件，下文将假定 $\lambda_i \in \lambda(\pm A)$，$\lambda_i \in \boldsymbol{R}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，并给出矩阵 Q 的一种构造解法.

定义

$$T_l = \prod_{i=0}^{l} \tilde{T}_i,\ l = 1, 2, \cdots, n-1,\ \tilde{T}_0 = I, \tag{14}$$

$$T_l^T[-\alpha_i^{-1}\phi_i]T_l = \tilde{\phi}_i^l = \{\phi_{kj}^{li},\ k, j = 1, 2, \cdots, n\}, \tag{15}$$

取

$$\tilde{T}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & x_l & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & x_{l+1} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

若变量 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{l+1}\}^T$ 为齐次线性方程组

$$(A_l - B_l)(x_1, x_2, \cdots, x_{l+1})^T = 0,\ l = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{17}$$

$$A_l = \begin{bmatrix} \phi_{1\ 1}^{l-1\ 1} \cdots \phi_{l+1\ 1}^{l+1\ 1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \phi_{1\ l}^{l-1\ l} \cdots \phi_{l+1\ l}^{l-1\ l} \end{bmatrix},\ B_l = \begin{bmatrix} \phi_{1\ 1}^{l-1\ l+1} \cdots \phi_{1\ l+1}^{l-1\ l+1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \phi_{l\ 1}^{l-1\ l+1} \cdots \phi_{l\ l+1}^{l-1\ l+1} \end{bmatrix}$$

的解，则 ϕ_{kj}^{li}，$i, j, k = 1, 2, \cdots, n$，满足

$$\phi_{k+1\ j}^{l\ \ i} = \phi_{i\ k+1}^{l\ k+1},\ k, j = 1, 2, \cdots, l;\ l = 1, 2, \cdots, n-1$$

此时，只要定义 $T = T_{n-1} = \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{T}_i$；$\tilde{\phi}_i = -\alpha_i^{-1} T^T \phi_i T = \{\phi_{kj}^i,\ k, j = 1, 2, \cdots, n\}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，并构造一对称矩阵 Φ

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11}^1 & \phi_{21}^1 & \cdots & \phi_{n1}^1 \\ \phi_{21}^1 & \phi_{22}^2 & \cdots & \phi_{n2}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}^1 & \phi_{n2}^2 & \cdots & \phi_{nn}^n \end{bmatrix},$$

则当 $\Phi > 0$ 时，就可以求得 LQ 逆问题的解

$$Q = T\Phi^{-1}T^T,\ (\xi_1\xi_2\cdots\xi_n) = T. \tag{18a,b}$$

大量的计算表明矩阵 $\Phi > 0$ 的存在性.

由 T 的构造过程可知，影响 Q 的因素是 $\{\phi_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 的排列次序. 因此，对于同一个问题最多可以求得 $n!$ 个不同的加权矩阵 Q，它们均能够满足 λ_i 的要求. 下面将举例加以说明.

例. 考虑一线性时不变可控系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{u}}$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

取 $R=I$, $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=-4$. 求矩阵 Q 及 K.

解. 在本例中，由(11)式得

$$\begin{cases}8x_1^2+x_2^2-4x_3^2+8x_1x_3=24\\ 169x_1^2+63x_2^2-112x_3^2+104x_1x_3=1352\\ 25x_1^2+14x_2^2-14x_3^2+10x_1x_3=375\end{cases}$$

该方程的解为 $(x_1\ x_2\ x_3)=\pm(1.093\ \pm5.900\ 3.601)$. 从而有 $Q=(x_1\ x_2\ x_3)^T(x_1\ x_2\ x_3)$. 另一方面，由(13)式，以及(7)—(9)式可以求得

$$K=\begin{bmatrix}0.661 & 1.660 & 0.288\\ 1.660 & 7.339 & 2.726\end{bmatrix}\text{和(或)}\ K=\begin{bmatrix}0.785 & 0.899 & 1.831\\ 0.899 & 7.215 & 2.258\end{bmatrix},$$

若利用(14)—(18)式所给出的算法，则有

$$\tilde{T}_1=\begin{bmatrix}1 & 0.539 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \tilde{T}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2.281\\ 0 & 1 & 9.495\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$T=T_2=\tilde{T}_1\tilde{T}_2=\begin{bmatrix}1 & 0.539 & 2.939\\ 0 & 1 & 9.695\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$Q=T\Phi^{-1}T^T=\begin{bmatrix}4.181 & 3.752 & -4.860\\ 3.752 & 31.834 & 8.420\\ -0.486 & 8.420 & 5.182\end{bmatrix},$$

再由(18b)，(7)—(9)式可以求得

$$K=\begin{bmatrix}1.485 & 0.913 & -0.519\\ 0.913 & 6.516 & 1.433\end{bmatrix}.$$

此外，限于篇幅，略去 $\{\phi_i, i=1,2,3\}$ 的另外五种组合情况下的结果.

三、结 束 语

本文在研究了 LQ 逆问题解的参数化表示的基础上，给出了 LQ 逆问题解的具体解法. 尽管文中没有证明矩阵 Φ 的正定性问题，但大量的计算表明，本文所给出的方法是十分有效的，具有系统性和简便性等特点.

参 考 文 献

[1] Johnson, M. A. and Grimble, M. J., Recent Trends in Linear Optimal Quadratic Multivariable Control System Design, *IEE. Proc.*, **134**(1987), 1, 53.

[2] Lee, T. T. and Liaw, G. T., The Inverse Problem of Linear Optimal Control for Constant Disturbance, *Int. J. Control*, **43**(1986), 2, 233.

[3] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., Linear Optimal Control, Englewood Cliffs, N. J. Prentice-Hall (1971).

THE DETERMINATION OF WEIGHTING MATRICES IN LQ OPTIMAL CONTROL SYSTEMS

WANG YAOQING

(*Institute of Thermopower Eingineering, Zhejiang University*, 310072)

ABSTRACT

This paper is a study on the inverse problem of LQ optimal regulators. With the control weight given, the state weighting matrix satisfying the closed-loop eigenvalue requirements is parametrized in terms of a set of free variables. Based on the parametrization, an analytic procedure and a matrix transformation method are proposed to determine the state weighting matrix, as well as the free variables. As a result, by using the solved free variables, the optimal controller gain matrix can be determined without solving the algebraic Riccati matrix equation.

Key words: Optimal control; LQ inverse problem; weighting matrices.