鲁棒稳定性和鲁棒对角优势的关系[1)]

庞国仲 陈振跃
(中国科学技术大学自动化系,合肥 230026)

摘 要

本文研究了多输入多输出系统的鲁棒稳定性和鲁棒对角优势的关系. 不仅给出了使系统鲁棒对角优势所需的鲁棒稳定性条件，而且还得出了系统鲁棒对角优势一定保证系统鲁棒稳定这个一般性的结论. 并可根据本文所给的结果,对允许摄动的最大边界进行估计,包括非结构摄动的范数上界和结构性摄动的摄动矩阵的各元素的模的估计. 本文得出的鲁棒对角优势保证鲁棒稳定的结果是较少保守性的.

关键词: 鲁棒性,稳定性,对角优势,多输入多输出系统.

一、引 言

基于对角优势 (diagonal dominance) 的概念，Rosenbrock 成功地将 Nyquist 方法应用于多输入多输出系统设计,创立了著名的奈氏阵列 (NA) 法. 遗憾的是 NA 法并不象 Nyquist 方法在设计单变量系统时,能定量地给出稳定裕度等这类和系统鲁棒性有关的概念和度量,也就是 NA 法缺乏鲁棒性保证. 其根本原因在于: 模型不确定性将严重影响系统的对角优势,因而改变系统的稳定性及其性能. 即使设计的系统使 Gershgorin 带与临界点保持适当的距离,但当控制对象的模型在一定的摄动范围内变化时，只要这种变化破坏了系统的对角优势,所设计的系统可能变成不稳定,此时已不能用基于对角优势概念的 NA 法进行稳定性分析. 文献[1]给出了这样一个例子: 用 NA 法设计的性能良好的系统,当模型存在摄动时,该系统就趋于不稳定. 因此,运用 NA 法对多输入多输出不确定性系统进行设计的关键,在于保证系统的鲁棒对角优势,即系统在摄动情况下仍为对角优势.

文献[2]首次引入了鲁棒对角优势的概念,给出了鲁棒对角优势系统的鲁棒稳定性判据,即鲁棒的 NA 方法. 但是并没有深入探讨系统的鲁棒稳定性和鲁棒对角优势之间的关系,只是简单地用鲁棒对角优势取代对角优势的概念，并沿用传统的 NA 方法分析摄动系统的稳定性. 文献[3]给出了对角优势系统鲁棒稳定的条件,虽然作者并没意识到鲁棒对角优势保证了鲁棒稳定这一很有意义的结论，但是却揭示了鲁棒对角优势和鲁棒稳定的内在关系. 需要指出文献[3]的结果比文献[2]所定义的鲁棒对角优势的概念保守得

本文于 1991 年 5 月 16 日收到.
1) 国家自然科学基金资助的课题.

多，这就使鲁棒解耦控制器的实现变得更加困难.

本文较深入地研究了鲁棒对角优势和鲁棒稳定性之间的关系. 在文献[2]所定义的鲁棒对角优势意义下，得出比文献[3]更少保守性的、具有一般意义的鲁棒对角优势保证鲁棒稳定的结论，同时也给出了使系统为鲁棒对角优势所需一定的鲁棒稳定条件.

二、数学准备

定义 1. $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 称为非负矩阵，若 $a_{ij}\geqslant 0$，对于 $1\leqslant i, j\leqslant n$，并记为 $A\geqslant 0$，其中 $R^{n\times n}$ 是 $n\times n$ 维的实矩阵空间.

定义 2. $A=sI-B\in R^{n\times n}$ 称为 M-矩阵，若 $B\geqslant 0$，且 $s>\rho(B)$，其中 $\rho(B)$ 为矩阵 B 的谱半径.

定义 3. $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若满足

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

则称 A 为行对角优势矩阵；同样，若满足

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ji}| \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{2}$$

则称 A 为列对角优势矩阵，其中 $C^{n\times n}$ 为 $n\times n$ 维复矩阵空间.

对于 M-矩阵，有如下结果：

引理 1[7]. $A\in R^{n\times n}$，$A=I-T$，$T\geqslant 0$，为 M-矩阵的充要条件是 A^{-1} 存在，且 $A^{-1}\geqslant 0$，其中 I 为单位矩阵.

M-矩阵具有单调性，即若 $B\geqslant T\geqslant 0$，$I-B$ 是 M-矩阵，则 $I-T$ 必定也是 M-矩阵.

对于对角优势矩阵，有如下一些结果：

引理 2[8]. 若 $A\in C^{n\times n}$ 是行(列)对角优势矩阵，则 A 是非奇异的.

引理 3[8]. 若 $A\in C^{n\times n}$ 为行对角优势矩阵，即

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|<\theta_i|a_{ii}| \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

其中

$$\theta_i=\frac{\sum\limits_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|}{|a_{ii}|}<1 \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则

$$|\hat{a}_{ji}|\leqslant\theta_j|\hat{a}_{ii}|<|\hat{a}_{ii}| \quad (i,j=1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

其中 $\hat{a}_{ji}$，$\hat{a}_{ii}$ 表示 $A^{-1}=\hat{A}=(\hat{a}_{ij})$ 的元素.

定理 1. 若 $A\in C^{n\times n}$ 为行对角优势矩阵，则

$$|a_{ii}||\hat{a}_{ij}|\leqslant\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}||\hat{a}_{kj}| \quad (i\neq j). \tag{4}$$

证明. A为行对角优势矩阵,于是存在逆阵 $A^{-1}=\hat{A}$. 因 $A\hat{A}=I$, 故 $A\hat{A}$ 的非对角元满足

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\hat{a}_{kj}=0\ (j\neq i),\ a_{ii}\hat{a}_{ij}+\sum_{k\neq i}^{n} a_{ik}\hat{a}_{kj}=0\quad (j\neq i),$$

$$|a_{ii}||\hat{a}_{ij}|=\left|\sum_{k\neq i}^{n} a_{ik}\hat{a}_{kj}\right|\leqslant\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}||\hat{a}_{kj}|.\ (j\neq i)$$ 证毕

引理 4[8]. 设 $A\in C^{n\times n}$ 为行对角优势矩阵,则有

$$\left|a_{ii}-\frac{1}{\hat{a}_{ii}}\right|\leqslant\sum_{j\neq i}^{n}\left|\frac{a_{ij}\hat{a}_{ji}}{\hat{a}_{ii}}\right|\leqslant\phi_i d_i<d_i, \tag{5}$$

其中

$$\phi_i=\max_{j\neq i}\{\theta_j\},\ d_i=\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|\ (i=1,2,\cdots,n).$$

引理 5[4]. 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, 且 $a_{ii}>0$ 和 $a_{ij}\leqslant 0$, 对于 $i\neq j$, $1\leqslant i$, $j\leqslant n$, 若A是对角优势矩阵,则A为 M-矩阵,且A可逆, $A^{-1}\geqslant 0$.

上述是对行对角优势矩阵的结论，而对于列对角优势矩阵也有相似结果. 引理 6 是一个关于一般复矩阵的定理.

引理 6[5]. 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 则$A$的最小奇异值 $\underline{\sigma}(A)$ 的一个上界为

$$\mu_{\min}=\min\{\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\|a_{i\cdot}\|_E\},\ \min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\|a_{\cdot j}\|_E\}\}; \tag{6}$$

A的最大奇异值 $\bar{\sigma}(A)$ 的一个下界为

$$l_{\max}=\max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\|a_{i\cdot}\|_E\},\ \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\|a_{\cdot j}\|_E\}\}. \tag{7}$$

即

$$\underline{\sigma}(A)\leqslant\mu_{\min},\ \bar{\sigma}(A)\geqslant l_{\max},$$

其中 $\|a_{i\cdot}\|_E$, $\|a_{\cdot j}\|_E$ 分别表示A的第 i 行行向量和第 j 列列向量的 Euclid 范数,即

$$\|a_{i\cdot}\|_E=\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2},\ \|a_{\cdot j}\|_E=\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

定理 2. 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 为行对角优势矩阵, 构造一个对应的实对角优势矩阵 B

$$B=\begin{pmatrix}|a_{11}| & -|a_{12}| & \cdots & -|a_{1n}|\\ -|a_{21}| & |a_{22}| & \cdots & -|a_{2n}|\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -|a_{n1}| & -|a_{n2}| & \cdots & |a_{nn}|\end{pmatrix},$$

其中 $|a_{ij}|$ 为A的第 i 行第 j 列元素的模,则有

$$B^{-1}\geqslant|A^{-1}|=|\hat{A}|, \tag{8}$$

其中 $|A^{-1}|=|\hat{A}|=(|\hat{a}_{ij}|)$ $(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$.

证明. 因为矩阵B满足引理 5 条件,故B是 M-矩阵, B^{-1} 存在,且 $B^{-1}=\hat{B}\geqslant 0$. 取 $D=B|\hat{A}|$, 其对角元为

$$d_{ii}=|a_{ii}||\hat{a}_{ii}|-\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}||\hat{a}_{ji}|$$

$$=|\hat{a}_{ii}|\left(|a_{ii}|-\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|\frac{|\hat{a}_{ji}|}{|\hat{a}_{ii}|}\right).$$

由引理 4 可知

$$d_{ii}\leqslant\left(|a_{ii}|-\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|\frac{|\hat{a}_{ji}|}{|\hat{a}_{ii}|}\right)\Big/\left(|a_{ii}|-\sum_{j\neq i}^{n}\left|\frac{a_{ij}\hat{a}_{ji}}{\hat{a}_{ii}}\right|\right)\leqslant 1,$$

即D的对角元为不大于 1 的正数．对于D的非对角元 d_{ij}，$i\neq j$，有

$$d_{ij}=|a_{ii}||\hat{a}_{ij}|-\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}||\hat{a}_{kj}|,$$

由定理 1 知

$$d_{ij}\leqslant 0\ (i\neq j).$$

由此可得

$$I-D=I-B|\hat{A}|\geqslant 0.$$

对上式两端分别左乘非负矩阵 $\hat{B}$，得

$$\hat{B}-|\hat{A}|\geqslant 0.$$

证毕

定理 3. 所设和定理 2 同，另设 $\Delta\in C^{n\times n}$，且 $B-|\Delta|$ 为行对角优势矩阵，则 $I-|\Delta|B^{-1}$ 为 M-矩阵.

证明．因为B是一个行对角优势的 M-矩阵且 B^{-1} 存在，$B^{-1}=\hat{B}\geqslant 0$，故

$$|\Delta|\hat{B}\geqslant 0.$$

取

$$I-|\Delta|\hat{B}=(B-|\Delta|)\hat{B},$$

由于 $B-|\Delta|$ 为一行对角优势 M-矩阵,则 $(B-|\Delta|)^{-1}$ 存在,且 $(B-|\Delta|)^{-1}\geqslant 0$. 取

$$(I-|\Delta|\hat{B})^{-1}=B(B-|\Delta|)^{-1}.$$

为方便计,令 $C=B-|\Delta|$. 因为B和 $B-|\Delta|$ 均为行对角优势矩阵,则有

对于　$B:\dfrac{\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|}{|a_{ii}|}=\theta_i<1$;

对于　$B-|\Delta|:\dfrac{\sum_{j\neq i}^{n}(|a_{ij}|+|\Delta_{ij}|)}{|a_{ii}|-|\Delta_{ii}|}=\dfrac{\sum_{j\neq i}^{n}c_{ij}}{c_{ii}}=\theta_i\leqslant\phi_i<1$. 令 $E=BC^{-1}=B(B-|\Delta|)^{-1}$. E 的对角元为

$$e_{ii}=\hat{c}_{ii}\left[|a_{ii}|-\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|\frac{\hat{c}_{ji}}{\hat{c}_{ii}}\right]\geqslant\hat{c}_{ii}\left[|a_{ii}|-\sum_{j\neq i}^{n}|a_{ij}|\phi_j\right].$$

由B为行对角优势矩阵和 ϕ_i 的定义知 $e_{ii}\geqslant 0$，对于E的非对角元

$$e_{ij}=|a_{ii}|\hat{c}_{ij}-\sum_{k\neq i}^{n}|a_{ik}|\hat{c}_{kj}\ (i\neq j).$$

而 $CC^{-1}=I$ 的非对角元应为零,即

$$c_{ii}\hat{c}_{ij}+\sum_{k\neq i}^{n}c_{ik}\hat{c}_{kj}=(|a_{ii}|-|\Delta_{ii}|)\hat{c}_{ij}-\sum_{k\neq i}^{n}(|a_{ik}|+|\Delta_{ik}|)\ \hat{c}_{kj}=0.$$

由于 C^{-1} 为非负矩阵，$\hat{c}_{ij}\geqslant 0$，$1\leqslant i,\ j\leqslant n$. 比较上两式,得

$$e_{ij}\geqslant(|a_{ii}|-|\Delta_{ii}|)\hat{c}_{ij}-\sum_{k\neq i}^{n}(|a_{ik}|+|\Delta_{ki}|)\hat{c}_{kj},$$

故 $e_{ij}\geqslant 0$，$i\neq j$，由此可得

$$E=BC^{-1}=B(B-|\Delta|)^{-1}=(I-|\Delta|B^{-1})^{-1}\geqslant 0.$$

由引理 1 知 $I-|\Delta|B^{-1}$ 为 M-矩阵.　　证毕

三、鲁棒对角优势和鲁棒稳定的关系

考虑如图 1 所示的具有摄动的反馈系统. 其中 $Q(s)\in C^{n\times n}$ 为正则有理传递矩阵，$F=\operatorname*{diag}_{1\leqslant i\leqslant n}\{f_i\}$ $f_i\in R$ 为对角反馈矩阵，$\Delta(s)\in C^{n\times n}$ 为一关于 $Q(s)$ 的加法摄动. 设 $\Delta(s)$ 是稳定的,并在如下意义下有界:

1）非结构性摄动:

$$\sup_{s\in D}\|\Delta(s)\|<\infty; \tag{9}$$

2）结构性摄动:

$$|\Delta_{ij}(s)|\leqslant|r_{ij}(s)|<\infty \tag{10}$$

$$\forall i,\ j=1,2,\cdots,n,\ s\forall D.$$

即对于非负矩阵 $|\Delta(s)|=(|\Delta_{ij}(s)|)$，$|R(s)|=(|r_{ij}(s)|)$，满足

$$|\Delta(s)|\leqslant|R(s)|\quad\forall s\in D,$$

其中 D 是通常的 Nyquist 围线,$\|\cdot\|$为矩阵范数.

对于图 1 所示系统,给出两种鲁棒对角优势定义.

定义 4.　强鲁棒对角优势(关于非结构性摄动的鲁棒对角优势)：若 $(F^{-1}+Q(s))$ 在 D 上是行或列对角优势的,并满足

$$1)\ \|\Delta(s)\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{n}|\Delta_{ij}(s)<\min_i\left\{|f_i^{-1}+q_{ii}(s)|-\sum_{j\neq i}^{n}|q_{ij}(s)|\right\}, \tag{11}$$

或者

$$2)\ \|\Delta(s)\|_1=\max_j\sum_{i=1}^{n}|\Delta_{ij}(s)|<\min_j\left\{|f_j^{-1}+q_{jj}(s)|-\sum_{i\neq j}^{n}|q_{ij}(s)|\right\}, \tag{12}$$

则称图 1 系统是行(对应于 (11) 式)或列(对应于 (12) 式)强鲁棒对角优势的.

定义 5. 鲁棒对角优势[2]：若 $(F^{-1}+Q(s))$ 在 D 上是行或列对角优势的，并满足

$$1)\ |f_i^{-1}+q_{ii}(s)|-|\Delta_{ii}(s)|>\sum_{j\neq i}^{n}(q_{ij}(s)|+|\Delta_{ij}(s)|)\ (\text{行优}) \tag{13}$$

或

$$2)\ |f_j^{-1}+q_{jj}(s)|-|\Delta_{jj}(s)|>\sum_{i\neq j}^{n}(|q_{ij}(s)|+|\Delta_{ij}(s)|)\ (\text{列优}), \tag{14}$$

对于 $i, j = 1, 2, \cdots, n$，则称图 1 所示系统是行或列鲁棒对角优势.

3.1. 鲁棒对角优势下的鲁棒稳定性

引理 7[3]. 若图 1 所示系统满足

1）名义系统（即 $\Delta(s) = 0$ 时）是闭环稳定的；2）$(F^{-1} + Q(s))$ 在 $s \in D$ 上是行或列对角优势的；3）系统是在定义 4 意义下的行或列强鲁棒对角优势的. 则图 1 所示的闭环摄动系统一定是稳定的. 可见，一个稳定的系统，若是强鲁棒对角优势的，则该系统一定是鲁棒稳定的.

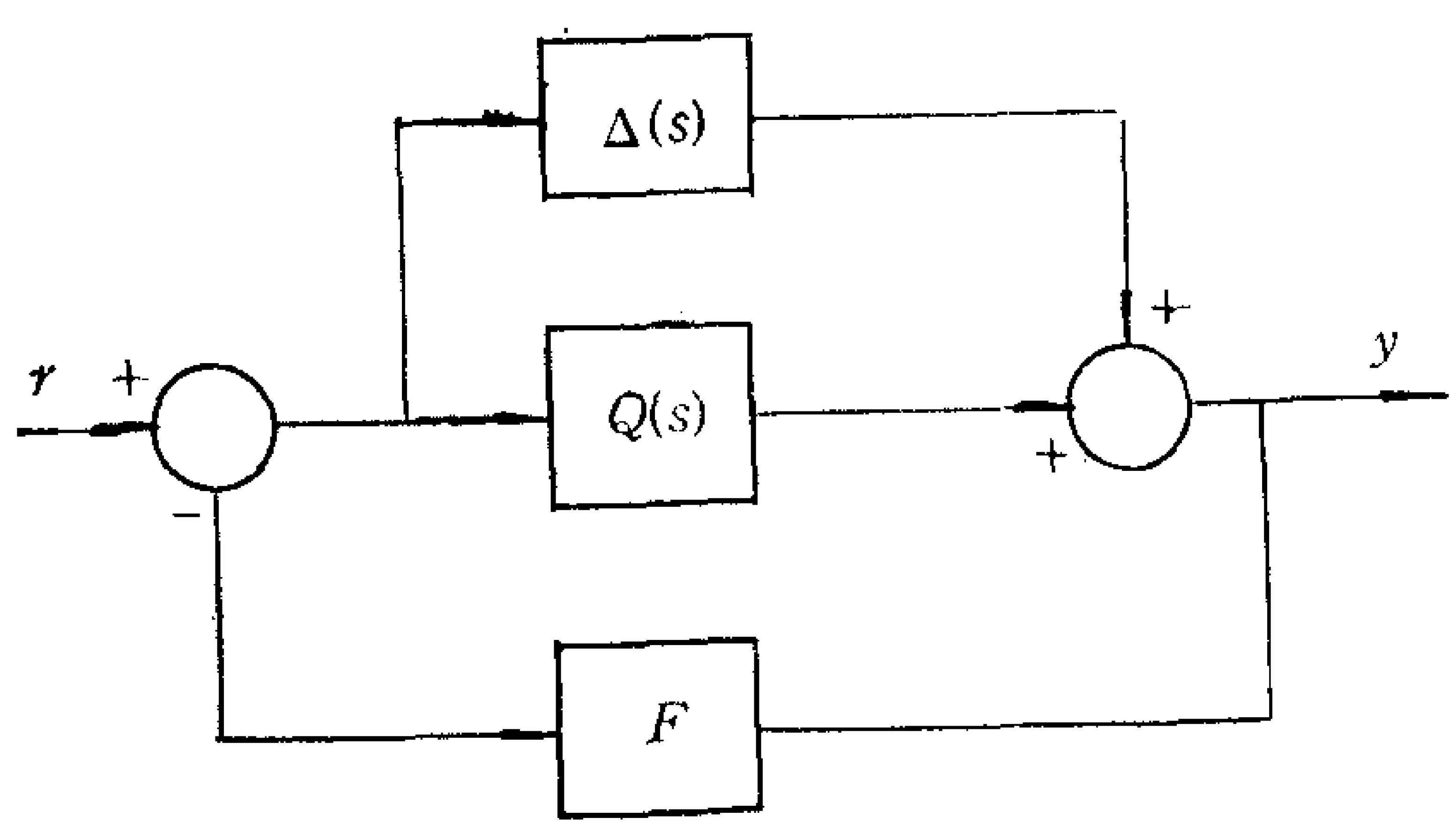

图 1 具有摄动的反馈系统

引理 8[6]. 若图 1 所示系统满足

1）名义系统是闭环稳定的；2）$I - |\Delta(s)||(F^{-1} + Q(s))^{-1}|$ 在 $s \in D$ 为 M-矩阵. 则图 1 所示摄动系统闭环稳定.

由引理 8 知，只要找到非负矩阵 $\hat{B}$，使 $\hat{B} \geqslant |(F^{-1} + Q(s))^{-1}|$，且

$$I - |\Delta(s)|\hat{B}$$

在 $s \in D$ 为 M-矩阵，则图 1 所示系统闭环稳定.

定理 4. 在图 1 所示系统中，其摄动为结构性摄动，若满足

1）名义系统是闭环稳定；

2）$(F^{-1} + Q(s))$ 在 $s \in D$ 是行或列对角优势的；

3）定义矩阵

$$B(s) = \begin{pmatrix} |f_1^{-1} + q_{11}(s)| & -|q_{12}(s)| & \cdots & -|q_{1n}(s)| \\ -|q_{21}(s)| & |f_2^{-1} + q_{22}(s)| & \cdots & -|q_{2n}(s)| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -|q_{n1}(s)| & -|q_{n2}(s)| & \cdots & |f_n^{-1} + q_{nn}(s)| \end{pmatrix},$$

若系统是按定义 5 在 $s \in D$ 为鲁棒对角优势的，则图 1 所示的摄动系统为闭环稳定的.

证明. $B(s)$ 在 $s \in D$ 是对角优势 M-矩阵，故 $\hat{B}$ 存在，且 $\hat{B} \geqslant 0$. 由定理 2 知 $\hat{B} \geqslant |(F^{-1} + Q(s))^{-1}|$，由定理 3 知 $I - |\Delta|\hat{B}$ 为 M-矩阵，则从 M-矩阵单调性和引理 8 知，图 1 所示摄动系统闭环稳定. 证毕

定理 4 表明. 若一个稳定系统是鲁棒对角优势的，则该系统必定是鲁棒稳定的.

3.2. 鲁棒稳定下的鲁棒对角优势

引理 9[1]. 若名义系统是闭环稳定的，且

$$\bar{\sigma}(\Delta(s)) < d(s)\underline{\sigma}(F^{-1} + Q(s)), \quad \forall s \in D \tag{15}$$

其中 $0 \leqslant d(s) \leqslant 1$，则图 1 所示摄动系统闭环稳定.

定理 5. 若图 1 所示系统满足:

1）名义系统是闭环稳定的；

2）$F^{-1} + Q(s)$ 在 $s \in D$ 是行或列对角优势的；

3）$\bar{\sigma}(\Delta(s)) < d(s)\underline{\sigma}(F^{-1} + \theta(s))$，$\forall s \in D$（鲁棒稳定），对于 $F^{-1} + \theta(s)$ 为行或

列对角优势，$d(s)$ 分别为

$$d(s)=d_r(s)=\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{|f_i^{-1}+q_{ii}(s)|^2-\sum\limits_{j\neq i}^{n}|q_{ij}(s)|^2\right\}^{1/2}}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{|f_i^{-1}+q_{ii}(s)|^2+\sum\limits_{j\neq i}^{n}|q_{ij}(s)|^2\right\}^{1/2}}\ (\text{行优}),$$

$$d(s)=d_c(s)=\frac{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{|f_j^{-1}+q_{jj}(s)|^2-\sum\limits_{i\neq j}^{n}|q_{ij}(s)|^2\right\}^{1/2}}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{|f_j^{-1}+q_{jj}(s)|^2+\sum\limits_{i\neq j}^{n}|q_{ij}(s)|^2\right\}^{1/2}}\ (\text{列优}).$$

则图 1 所示摄动系统是强鲁棒对角优势的.

证明. 由引理 6 得

$$d_r(s)\underline{\sigma}(F^{-1}+Q(s))\leqslant d_r(s)\mu_{\min}(F^{-1}+\theta(s))$$
$$\leqslant d_r(s)\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{|f_i^{-1}+q_{ii}(s)|^2+\sum_{j\neq i}^{n}|q_{ij}(s)|^2\right\}^{1/2},$$

$$\bar{\sigma}(\Delta(s))\geqslant l_{\max}(\Delta(s))\geqslant\max_i\left\{\sum_{j=1}^{n}|\Delta_{ij}(s)|^2\right\}^{1/2}.$$

由条件 (3) 得

$$\max_i\left\{\sum_{j=1}^{n}|\Delta_{ij}(s)|^2\right\}^{1/2}<d_r(s)\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{|f_i^{-1}+q_{ii}(s)|^2+\sum_{j\neq i}^{n}|g_{ij}(s)|^2\right\}^{1/2}$$
$$=\min_i\left\{|f_i^{-1}+q_{ii}(s)|^2-\sum_{j\neq i}^{n}|q_{ij}(s)|^2\right\}^{1/2},$$

于是

$$\min_i\left\{|f_i^{-1}+q_{ii}(s)|^2-\sum_{j\neq i}^{n}|q_{ij}(s)|^2\right\}>\max_i\left\{\sum_{j=1}^{n}|\Delta_{ij}(s)|^2\right\}.$$

由此可推出

$$\min_i\left\{|f_i^{-1}+q_{ii}(s)|-\sum_{j\neq i}^{n}|q_{ij}(s)|\right\}>\max_i\left\{\sum_{j=1}^{n}|\Delta_{ij}(s)|\right\},$$

即系统为强鲁棒行对角优势的. 同样可证系统为强鲁棒列对角优势.　　证毕.

四、几 点 讨 论

(1) 图 2 给出了定理 4 的图形解释.

$$OA=\sum_{j=1}^{n}|\Delta_{ij}(s)|,i=1,2,\cdots,n\ \text{或}\ OA=\sum_{i=1}^{n}|\Delta_{ij}(s)|,\ j=1,2,\cdots,n.$$

$$OB=|q_{ii}(s)|-\sum_{j\neq i}^{n}|q_{ij}(s)|,\ \text{或}\ OB=|q_{jj}(s)|-\sum_{i\neq j}^{n}|q_{ij}(s)|.$$

(2) 由引理 7 和定理 4 知,(强)鲁棒对角优势是比鲁棒稳定性更强的鲁棒性条件,因

而(强)鲁棒对角优势一定保证鲁棒稳定. 而且鲁棒对角优势越大，最大允许摄动范围也越大.

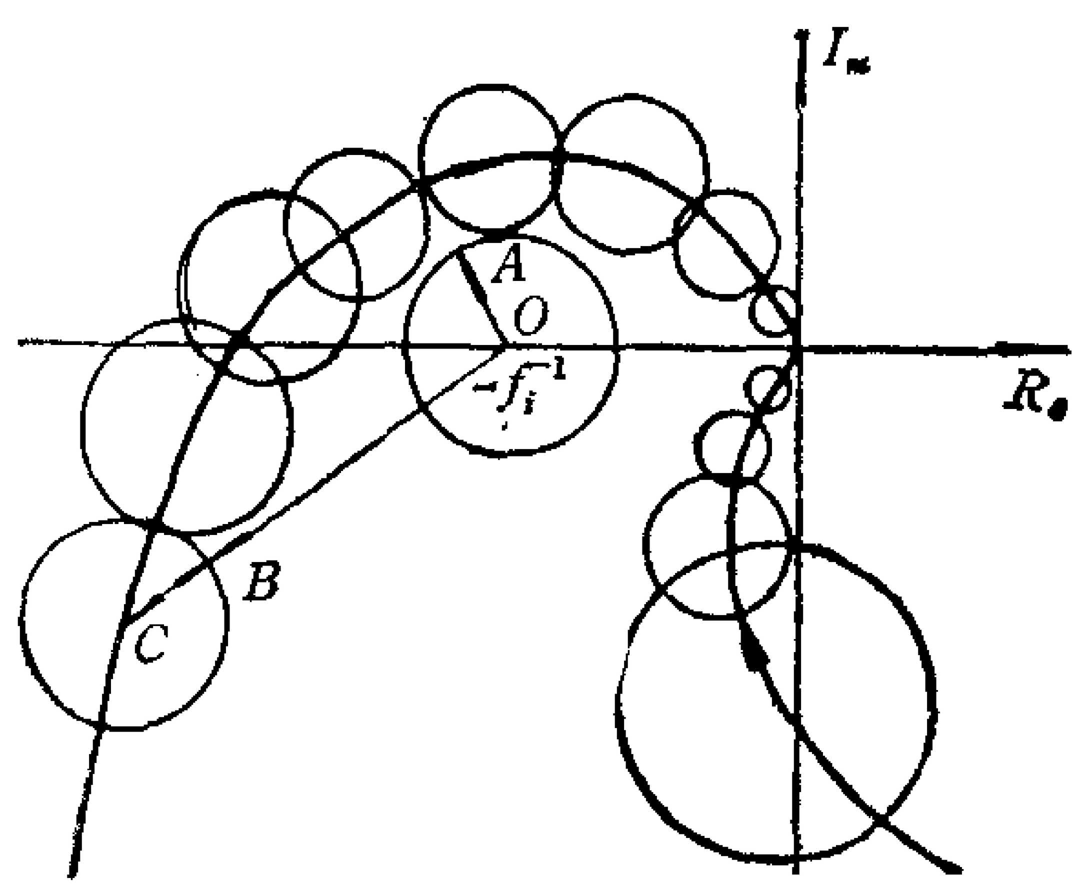

图 2 定理 4 的图形解释

(3) 在 $d_r=1$ (或 $d_c=1$) 时, 鲁棒稳定条件等价于鲁棒对角优势条件. 但这并不意味着系统一定是对角的, 这与习惯看法是截然不同的.

(4) 定理 4 考虑的是式 (10) 的结构性摄动, 其结果比引理 7 更少保守性. 并且可根据鲁棒对角优势条件, 直接估计各控制回路的最大允许摄动边界

$\max|\Delta_{ij}(s)|,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n.$

(5) 对于列对角优势和逆传递矩阵, 也有类似的结论.

本文的结果不仅对深入研究系统鲁棒性和系统结构之间关系具有理论意义，而且为 NA 方法推广用于不确定性多输入多输出系统的鲁棒性分析与设计提供了理论依据和较简捷的方法.

今后研究方向有: 鲁棒对角优势控制器设计; 在系统对角优势遭到破坏时, 系统的鲁棒稳定性问题.

参 考 文 献

[1] Doyle, J. C. and Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for A Classical Modern System, *IEEE Trans.*, **AC-26**(1981), 4—16.

[2] Arkun, Y., Manousiouthakis, B., and Putz, P., Robust Nyquist Array Methodology: A New Theoretical Framework for Analysis and Design of Robust Multivariable Feedback Systems, *Int. J. Control*, **40**(1984), (4), 603—629.

[3] Yeung, L. F. and Bryant, G. F., Robust Stability of Diagonally Dominant Systems, Proc. IEE, **131**(6), 253—260, 1984.

[4] Berman, A and Plemmons, R. J., Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, New York: Academic, 1979.

[5] Qi, L., Some Simple Estimates for Singular Values of a Matrix, *Linear Algebra Appl*, **56**(1984), 105—119.

[6] Kantor, J. C. and Andres, R. P., Characterization of "Allowable Perturbations" for Robust Stability, *IEEE Trans.* **AC-28**(1983), 107—109.

[7] 李乔, 矩阵论八讲, 上海科学技术出版社, 1988.

[8] 白方周, 庞国仲, 多变量频域理论与设计技术, 国防工业出版社, 1988.

THE RELATION BETWEEN ROBUST STABILITY AND ROBUST DIAGONAL DOMINANCE

PANG GUOZHONG　CHEN ZHENYUE

(Dept. of Automation, University of Science and Technology of China, 230026)

ABSTRACT

This paper is concerned with the relationship between robust stability and robust diagonal dominance for MIMO systems. It is shown that a system can be robust diagonal dominance under some robust stability conditions, and a general conclusion that robust diagonal dominance is a sufficient condition for robust stability is derived. The results of this paper can be used to estimate the maximum bounds of allowable perturbations, including upper bounds of the norms for unstructured perturbation and moduli of elements of perturbation matrix for structured perturbation. The result of robust diagonal dominance guaranteeing robust stability in this paper is less conservative.

Key words: Robustness; stability; diagonal dominance; multi-input and multi-output system.

庞国仲　辽宁省人，1963 年毕业于中国科学技术大学自动化系．并留校任教．现为副教授，从事控制理论、控制工程、计算机辅助设计研究工作．已发表学术论文三十余篇，与别人合作出版了两本书，有四项科研成果分别获中国科学院、中国石化总公司和安徽省科技进步奖．