第18卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 18, No. 3
1992年5月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1992

非线性系统解耦原则及实施[1)]

夏小华
（北京航空航天大学第七研究室，北京 100083）

摘　　要

本文给定输出的一个分划，寻找反馈规律，使得控制系统分解成若干个平行的、独立作用的子系统，这就是控制系统的反馈(块)解耦问题. 对于由微分代数语言描述的非线性输入输出控制系统，证明了它具有其本身所固有的解耦结构，当且仅当给定的分划与这个解耦结构相"匹配"时，系统可达到解耦. 对于由状态空间方程所描述的非线性系统，本文用动态扩张算法给出了其解耦结构的构造.

关键词: 微分代数，解耦，动态反馈，动态扩张.

一、引　　言

具有 p 个输出分量的控制系统的(块)解耦问题指的是：给定 $\underline{p}:=\{1,\cdots,p\}$ 的一个分划，即 $\underline{p}=P_1\cup\cdots\cup P_k$, $P_i\cap P_j=\phi$, $i\neq j$, 寻找反馈，使得复合系统在这个输出分划和一个输入分划下分解成若干个平行的、独立作用的子系统.

这个提法下的非线性系统解耦问题的研究成果很多[1-3]. 然而，值得指出，解耦问题的更一般的形式并没有解决. 事实上，最简单的线性系统的单对单解耦问题的一般形式的彻底解决是在最近才宣布的[4,5]. 而且发现[6]文献[4]中的结果也有问题.

本文运用微分代数方法，对由输入输出的非线性高阶微分方程所描述的非线性控制系统的正则解耦问题给出一个完全的刻划. 其思路与通常的做法正相反. 给定了一个系统寻找在哪些输出分划下，系统可达到解耦. 证明任意一个给定的系统都有其自身所固有的解耦结构，只有当给定的输出分划与这个解耦结构相"匹配"时，系统才可能达到解耦，并且对解耦结构达到解耦的反馈是对与其匹配的分划的解耦反馈. 对于由状态方程所描述的非线性系统，将用动态扩张算法给出其解耦结构的构造.

二、非线性系统的微分代数方法及解耦问题

这一节介绍一些微分代数概念(参见文献[7,8]) 及由 M. Fliess 所发展的非线性系统的微分代数描述[9-11]. 最后，给出解耦问题的提法.

定义 1. 一个(常)微分环(相应地，域) R 是一个具有单位元的交换环(相应地，域)，

本文于1990年11月27日收到.
1) 国家自然科学基金资助课题. 本文曾在1990年全国控制理论与应用学术交流会(杭州)上宣读.

它具有一个导数运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}: R \to R$，$a \to \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \dot{a}$ 满足

$$\forall a, b \in R,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a+b) = \dot{a} + \dot{b},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ab) = \dot{a}b + a\dot{b}.$$

本文只考虑零特征的微分环.

定义 2. 设 K，L 是两个微分域. 若 $K \subseteq L$，则 L 称为 K 的一个扩张，记为 L/K.

定义 3. R 的一个扩张的一族元素 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 称为在 R 上是微分代数相关(独立)的，如果族 $(\alpha_i^{(n)})_{n\in N, i\in I}$ 在 R 上是代数相关(独立)的，其中 I 为族 $(\alpha_i)_{i\in I}$ 的指标集，N 为自然数集，$\alpha_i^{(n)}$ 归纳定义为 $\alpha_i^{(0)} = \alpha_i$，$\alpha_i^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha_i^{(n-1)})$. 一个元素的族 (α) 在 R 上微分代数相关(独立)的情形，也称 α 在 R 上是微分代数(超越)的.

命题 1[7]. 设 α, β 是 K 的扩张中的两个元素. a) 若 β 在 $K\langle\alpha\rangle$ 上是微分代数的，α 在 K 上是微分代数的，那么 β 在 K 上是微分代数的；b) 若 β 在 $K\langle\alpha\rangle$ 上是微分代数的，α 在 $K\langle\beta\rangle$ 上是微分超越的，那么 β 在 K 上是微分代数的，其中 $K\langle\alpha\rangle$ 是包含 K 和 α 的最小微分扩张.

若 L 是 K 的一个扩张，有两种可能性.

i）若 L 中的每个元素在 K 上都是微分代数的，这时，扩张 L/K 称为是微分代数的；

ii）若 L 中至少有一个元素在 K 上是微分超越的，这时，扩张 L/K 称为是微分超越的. 且在 K 上微分代数独立的这种元素的最大数目称为扩张 L/K 的微分超越度，记为 $\mathrm{diff.tr.}d^0 L/K$.

命题 2. 设微分域 $K \subseteq L \subseteq M$，下面的等式成立

$$\mathrm{diff.tr.}d^0 M/K = \mathrm{diff.tr.}d^0 M/L + \mathrm{diff.tr.}d^0 L/K.$$

定义 4. 一个微分同态 $\phi: R -> K$，其中 R 和 K 分别是一个微分环和一个微分域，指的是一个同态，使得 $\forall a \in R$，$\phi(\dot{a}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(a)$. 设 $k \subseteq R$ 是一个微分域使得 $\forall b \in k$，$\phi(b) = b$，则 ϕ 称为是 R 上的一个微分 k-指定 (specification).

定义输入输出系统，这里考虑的所有的量都在一个微分域 Ω 中，它是一个给定的特征为零的微分基域 k 的泛微分扩张. Ω 可以是实数域、复数域或某变量的亚纯函数域等.

在 Ω 中取 $m+p$ 个元素 $u = (u_1, \cdots, u_m)$，$y = (y_1, \cdots, y_p)$，设 $u_1, \cdots, u_m$ 是微分变元，即，它们在 k 上是微分代数独立的.

定义 5. 具有输入 u 和输出 y 的一个系统，指的是扩张 $k\langle u, y\rangle$，满足 $\mathrm{diff.\ tr.}\ d^0 k\langle u, y\rangle / k\langle u\rangle = 0$.

定义 6. 系统 $k\langle u, y\rangle$ 的微分输出秩为 $\mathrm{diff.\ tr.}\ d^0 k\langle y\rangle / k$.

定义 7. 系统 $k\langle u, y\rangle$ 的一个反馈指的是一个微分 k-指定 $\varphi: k\{u, y\} \to \Omega$. 记

$$\mu = \mathrm{diff.\ tr.}\ d^0 \Omega(\varphi(k\{u, y\}))/k,$$

其中 $k\{u, y\}$ 是微分多项式环，$\Omega(\varphi(k\{u, y\}))$ 是商域. 显然，$0 \leqslant \mu \leqslant m$. 若 $\mu = m$，则称反馈 φ 是正则的. 易证明 φ 是正则反馈当且仅当 φ 是到其值域中的同构.

在反馈 φ 的作用下，系统 $k\langle u, y\rangle$ 变为 $k\langle \varphi u, \varphi y\rangle$. 设 $v = (v_1, \cdots, v_\mu)$ 是微分变

元使得 $\varphi u_1,\cdots,\varphi u_m$，因而 $\varphi y_1,\cdots,\varphi y_p$ 在 $k\langle v\rangle$ 上微分代数. 视 v 为新的输入,则反馈系统为 $k\langle v,\varphi y\rangle$.

系统 $k\langle u,y\rangle$ 正则解耦问题提法如下:

定义 8. 给定系统 $k\langle u,y\rangle$ 输出的一个分划，$\underline{p}=P_1\cup\cdots\cup P_k$, $P_1\cap P_j=\phi$. 若存在输入的一个分划，$\underline{m}=M_1\cup\cdots\cup M_k\cup M_{k+1}$, $M_i\cap M_j=\phi$, 使得

$$\text{diff. tr. } d^0k\langle u_{M_i},y_{P_i}\rangle/k\langle u_{M_i}\rangle=0,\ i\in \underline{k},$$

则称系统 $k\langle u,y\rangle$ (对于给定的分划)是解耦的.

因此,系统 $k\langle u,y\rangle$ 的正则反馈问题为：给定输出的一个分划,寻找正则反馈 φ, 使得反馈系统 $k\langle v,\varphi y\rangle$ 是解耦的.

三、系统的解耦结构及正则解耦问题的解

不难证明下面的结论:

定理 1. 系统 $k\langle u,y\rangle$ 对于分划 $\underline{p}=P_1\cup\cdots\cup P_k$, $P_i\cap P_j=\phi$ 的反馈解耦问题可解的充要条件是 $\text{diff. tr. } d^0k\langle y\rangle/k=\sum_{i=1}^{k}\text{diff. tr. } d^0k\langle y_{P_i}\rangle/k$.

证明. 由于正则反馈不改变系统的微分输出秩,必要性显然.

充分性. 取反馈为 $k\{u,y\}$ 上的恒等映射. 在 y_{P_i} 中取 $k\langle y_{P_i}\rangle$ 的一组超越基

$$v_{ij},j=1,\ \cdots,\ n_i,\ n_i=\text{diff. tr. } d^0k\langle y_{P_i}\rangle/k,\ i\in\underline{k}.$$

由定理的条件,$\{v_{ij}\}$ 可以扩充为 $k\langle u,y\rangle$ 的一组超越基 $v=\{v_{ij}\ i\in \underline{m+1},\ j\in \underline{n_i}\}$. 显然在新控制 v 的作用下,系统达到解耦.

定理 1 是文献[10]中关于单对单解耦情形的推广.

为定义系统的解耦结构,先定义一种微分扩张中一族元素间的等价关系.

定义 9. 设 $A=\{a_i\}_{i\in I}$ 是微分域 K 的一个扩张中的一族元素,且每个 a_i 在 K 上是微分超越的. 若存在子族 $B=\{a_j\}_{j\in J}$, $J\subseteq I$, 使得 a_i 在 $K\langle a_t,B\rangle$ 上是微分代数的,而在 $K\langle B\rangle$ 上是微分超越的,则称 a_i 和 a_t 具有本性耦合关系.

命题 3. 本性耦合关系是等价关系.

证明. 自反律显然. 若 a_i 与 a_t 具有本性耦合关系，即存在子族 B 使得 a_i 在 $K\langle a_t,B\rangle$ 上微分代数，而在 $K\langle B\rangle$ 上微分超越. 由命题 1b)，a_t 在 $K\langle a_i,B\rangle$ 上微分代数. 又由命题 1a)，a_t 在 $K\langle B\rangle$ 上微分超越. 即 a_t 与 a_i 具有本性耦合关系. 对称律成立.

传递律. 设 a_i 与 a_j, a_j 与 a_t 具有本性耦合关系. 即存在子族 $B_1,B_2\subseteq A$, 使得

1) a_i 在 $K\langle a_j,B_1\rangle$ 上微分代数,而在 $K\langle B_1\rangle$ 上微分超越;

2) a_j 在 $K\langle a_t,B_2\rangle$ 上微分代数,而在 $K\langle B_2\rangle$ 上微分超越;

显然,可不失一般性地假设 $\{a_j\}\cup B_1$ 和 $\{a_t\}\cup B_2$ 分别是两组微分代数独立的元素族. 同时,可以假设 B_2 具有对任意 $b'\in B_2,b'$ 在 $K\langle a_t,a_j,B_2\backslash\{b'\}\rangle$ 上是微分代数的性质. 因为若不然，可取 B_2 的最小子集 $\bar{B}_2\subseteq B_2$ 使得 a_j 在 $K\langle a_t,\bar{B}_2\rangle$ 上是微分代数的. 那么 $\bar{B}_2$ 满足 2)且具有上述性质.

结合 1) 和 2)，由命题 1a)，a_i 在 $K\langle a_t, B_2, B_1\rangle$ 上是微分代数的．由于 $\{a_t\}\cup B_2$ 是微分代数独立组，可取 $B_1'\subseteq B_1$ 使得 $\{a_t\}\cup B_2\cup B_1'$ 是微分代数独立组．那么，仍然由命题 1a)，a_i 在 $K\langle a_t, B_2, B_1'\rangle$ 上是微分代数的．

这时，有两种情况：

i) a_i 在 $K\langle B_2, B_1'\rangle$ 上是微分超越的．如果是这样，命题得证．

ii) a_i 在 $K\langle B_2, B_1'\rangle$ 上是微分代数的．如果是这样，一定存在 $b'\in B_2$ 使得 b' 在 $K\langle a_i, B_2\backslash\{b'\}, B_1'\rangle$ 上是微分代数的．事实上，由 1)，a_i 在 $K\langle B_1'\rangle$ 上是微分超越的，存在 B_2 的最小非空子集 B_2' 使得 a_i 在 $K\langle B_2', B_1'\rangle$ 上是微分代数的．与上面的推理类似，对任意 $b'\in B_2', b'$ 在 $K\langle a_i, B_2'\backslash\{b'\}, B_1'\rangle$ 上是微分代数的．因此，b' 在 $K\langle a_i, B_2\backslash\{b'\}, B_1'\rangle$ 上是微分代数的．

由对称性的证明，a_t 在 $K\langle a_j, B_2\rangle$ 上是微分代数的，命题 1a) 保证 a_t 在 $K\langle a_i, a_j, B_2\backslash\{b'\}, B_1'\rangle$ 上是微分代数的．

仍然用反证法证明．a_t 在 $K\langle a_j, B_2\backslash\{b'\}, B_1'\rangle$ 上是微分超越的若不然，因为 b' 在 $K\langle a_t, a_j, B_2\backslash\{b'\}\rangle$ 上，因而在 $K\langle a_t, a_j, B_2\backslash\{b'\}, B_1'\rangle$ 上是微分代数的．由命题 1a)，b' 在 $K\langle a_j, B_2\backslash\{b'\}, B_1'\rangle$ 上是微分代数的．由命题 1b)，因为 b' 在 $K\langle B_2\backslash\{b'\}, B_1'\rangle$ 上是微分超越的，a_j 在 $K\langle B_2, B_1'\rangle$ 上必是微分代数的．又 a_t 在 $K\langle a_j, B_2\rangle$ 上，因而在 $K\langle a_j, B_2, B_1'\rangle$ 上是微分代数的，命题 1a) 又保证 a_t 在 $K\langle B_2, B_1'\rangle$ 上是微分代数的．而这与 $\{a_t\}\cup B_2\cup B_1'$ 是微分代数独立组相矛盾．

传递律得证．

定义系统的解耦结构是设输出的每个分量 y_k 在微分基域 k 上是微分超越的．该假设相当于说输出一定要受输入的影响．对应于线性系统，这相当于要求系统的传递矩阵没有零行．可见这个假设并不苛刻．

定义 10. 设系统 $k\langle u, y\rangle$．$\{y_1, \cdots, y_p\}$ 的本性耦合关系称为系统 $k\langle u, y\rangle$ 的(最小)解耦结构．而相应于有个等价关系所定义的 p 的分划称为系统的最小解耦分划．

定理 2. 系统 $k\langle u, y\rangle$ 的解耦结构在正则反馈作用下是不变的．

证明．由于本性耦合关系在微分同构下是不变的，结论显然．

定理 3. 设 R 是系统 $k\langle u, y\rangle$ 的解耦结构．下面的叙述是等价的．

i) D 是系统 $k\langle u, y\rangle$ 的一个解耦分划 $p = D_1\cup\cdots\cup D_t$，$D_i\cap D_j = \phi$，$i\neq j$ 所对应的等价关系，即系统 $k\langle u, y\rangle$ 在这个分划下可达到反馈解耦；

ii) R 是 D 的加细，即 $\forall s_1, s_2$，$s_1Rs_2\Rightarrow s_1Ds_2$．

证明．i) $\Rightarrow$ ii) 只要证明下标属于两个不同的 D_i, D_j，$i\neq j$ 输出分量不满足本性耦合关系即可．在解耦的情形，这两个输出分量必属于两个独立的子系统．若它们满足一个平凡的微分方程，则必然会推出若干个微分代数独立的输入分量满足一个非平凡的微分方程．矛盾．

ii) $\Rightarrow$ i) 只要证明对于最小解耦分划，系统 $k\langle u, y\rangle$ 可达到反馈解耦即可．由解耦结构的定义，对于最小解耦分划中两个不同分块中的输出分量是微分独立的．因而显然

$$\text{diff. tr. } d^0k\langle y\rangle/k = \sum_{i=1}^{k}\text{diff. tr. } d^0k\langle y_{P_i}\rangle/k,$$

由定理 1，即证。

有此定理，要判断一个分划下系统是否可解耦，仅需要看该分划是否与解耦结构匹配即可。

四、状态方程描述的非线性系统的解耦结构

考虑如下非线性系统 Σ

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u,$$
$$y = h(x).$$

其中，$x \in R^n$，$u \in R^m$，$y \in R^p$。为与微分代数方法相联系，还假设[12]：($A1$) f,g,h 是亚纯的；($A2$) f,g,h 是其变量的微分代数函数(即，基本超越的)；($A3$) 设 K 是由 t 的所有有理函数所构成的微分域，则 $K\langle y\rangle$ 是微分域，且导数算子满足

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}[f(x) + g(x)u],$$

$$\cdots$$

$$y^{(k+1)} = y^{(k+1)}(x, u, \cdots, u^{(k)}) = \frac{\partial y^{(k)}}{\partial x}[f(x) + g(x)u] + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{\partial y^{(k)}}{\partial u^{(i)}}u^{(i+1)}.$$

对于这类系统，将用动态扩张算法来构造其解耦结构。动态扩张算法被成功地用来解决了非线性系统的许多分析和综合问题[2,3]。由于篇幅所限，动态扩张算法的具体步骤参见文献[2,3]。在此强调指出，动态扩张算法所涉及的线性无关、矩阵秩等概念都指在亚纯函数域意义下定义的。

可以发现，动态扩张算法运行的结果是得到一个扩张系统 Σ^e，它在算法最后一轮的第二步得到一个如下形式的矩阵 b^e

$$b^e = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ * & * & \cdots & * & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $*$ 可能是非零元素，第 i 个单位向量在 r_i 行，$i = 1, \cdots, \rho$，$\rho = \mathrm{diff.tr.}\ d^0(\Sigma)$。

再用下面的算法进行解耦结构的计算。

记矩阵 b^e 的元素为 b^e_{ij}，令 $E_i = \{j \mid b^e_{ji} \neq 0\}$，$i \in \underline{\rho}$。可见

$$\underline{p} = E_1 \cup \cdots \cup E_\rho \cup E_{\rho+1},$$

其中，$E_{p+1} = \underline{p} \backslash (E_1 \cup \cdots \cup E_p)$.

初始化：令 $s: = 1$，初始和式 $E_1 \cup \cdots \cup E_p$，$t: = p$.

1）考虑和式 $E_1 \cup \cdots \cup E_t$，$E_i \neq \phi$，$i \in \underline{t}$；若 $t = 0$，令 $P_{s+1} = E_{p+1}$，停止；

2）若 $E_1 \cap E_j = \phi$，$j \neq 1$，那么令 $P_s = E_1$，到 4)；

3）若对于某个 $j \neq 1$，$E_1 \cap E_j \neq \phi$，令 $E_1: = E_1 \cup E_j$，$t: = t - 1$，而和式 $E_1 \cup \cdots \cup E_t$ 中相应地改变下标而写成，$E_1 \cup \cdots \cup E_t: = (E_1 \cup E_j) \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{j-1} \cup E_{j+1} \cup \cdots \cup E_t$，到 1)；

4）令 $s: = s + 1$，$E_i: = E_{i+1}$，$i = 1, \cdots, t - 1$，$t: = t - 1$，形成和式 $E_1 \cup \cdots \cup E_t$，到 1).

可以看出，上述算法在有限步停止，且给出 $\underline{p}$ 的一个分划 $\underline{p} = P_1 \cup \cdots \cup P_k \cup P_{k+1}$. 有

定理 4. 由上述算法给出的分划是系统Σ的解耦结构.

证明. 由定理 1，只要证明扩张系统 Σ^e 的输出 $\{y_1, \cdots, y_p\}$ 的本性耦合等价类正好是由下标属于 P_i 的全部元素所构成的即可. 因为，在算法中所进行的静态反馈和添加的积分器都是正则反馈.

不难看出，$\{y_1, \cdots, y_p\}$ 的本性耦合关系等价于动态扩张算法最后一轮第二步所给出的矩阵 b^e 的行的本性耦合关系.

由简单的线性代数运算易证从 1) 到 4) 的算法正是用来计算 b^e 的本性耦合关系的.

因此，定理得证.

参　考　文　献

[1] Isidori, A., Nonlinear Control Systems: An Introduction, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, New York. **72**(1985).

[2] Descusse, J. Moog, C. H., Decoupling with Dynamic Compensation for Strong Invertible Affine Non-linear Systems, *Int. J. Con. trol.*, **42**(1985), 1387—1398.

[3] 夏小华、高为炳，非线性系统的最小阶动态解耦，中国科学A辑，**10**(1989)，1107—1112.

[4] Descusse, J. Lafay, J. F. Malabre, M., Solution to Morgan's Problem, *IEEE Trans.* **AC-33**(1988), 732—739.

[5] 韩正之，陈树中，Morgan 问题始末，控制与决策，**5**(1990)，52—58.

[6] Gluminea, A. Moog, C. H., Nonlinear Morgan's Problem: Case of $(p+1)$ Inputs and p Outputs, Preprint. *IEEE Trans. on Automat. Control*, (1990).

[7] Kochin, E. R., Differential Algebra and Algebraic Groups, Academic Press, New York, 1973.

[8] Pommaret, J. F., Differential Galois Theory, Gordon and Breach, New York, 1983.

[9] Fliess, M., Nonlinear Control Theory and Differential Algebra, Proc. II ASA Conf. Modelling Adaptive Control, Sopron, Hungary, 1986.

[10] Fliess, M., Nonlinear Control Theory and Differential Algebra: Some Illustrative Examples, 10th IFAC World Congress, Munich, 1987, 114—118.

[11] Fliess, M., Generalized Controller Canonical Forms for Linear and Nonlinear Dynamics, *IEEE Trans*, **AC-35**(1990), 994—1001.

[12] Di Benedetto, M. D. Grizzle, J. W. Moog, C. H., Rank Invariants of Nonlinear Systems, *SIAM J. Control and Optimization*, **27**(1989), 658—672.

THE PRINCIPLE AND IMPLEMENTATION OF DECOUPLING FOR NONLINEAR SYSTEMS

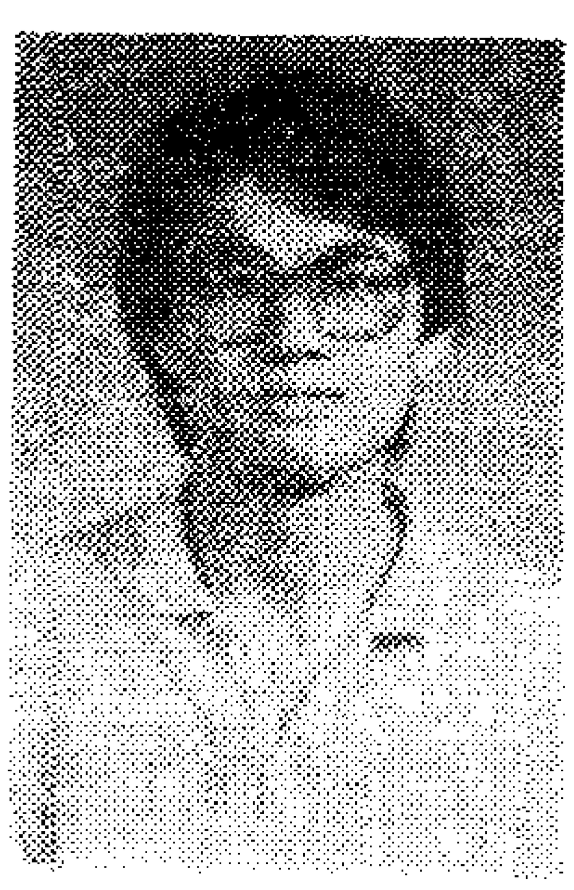
XIA XIAOHUA

(*7th Research Div., Beijing Univ. of Aero. & Astro., Beijing* 100083)

ABSTRACT

Given an output partition, finding (if possible) a feedback control law such that the compensated system is decomposed into several parellel and indepehdent subsystems this is the usual formulation of the block decoupling problem of control systems. For nonlinear input-output control systems described by differential algebraic terms, we show that they possess their own inherent decoupling structures. A system can be decoupled if and only if the given partition "matches" the decoupling structure. And, for nonlinear systems in state space equations, we can explicitly construct the decoupling structures by emploping the dynamic extension algorithm.

Key words: Differential algebra; decoupling; dynamic feedback; dynamic extension.



夏小华 1963 年 1 月出生于武汉。1986 年 6 月在武汉水利电力学院任助教。1989 年 8 月在北京航空航天大学获工学博士学位，后留校任教，现为讲师。目前的研究兴趣主要集中在非线性控制领域，对线性系统，采样控制系统等方面也有兴趣。