第18卷 第2期 自动化学报 Vol. 18, No. 2
1992年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1992

多变量控制系统结构图的瞬态响应模式分析法

黄永宣
(西安交通大学信控系，710049)

摘要

本文研究用结构图表示的多变量控制系统．在各种控制或扰动信号作用下，系统各环节输出的瞬态响应模式．

关键词：多变量控制系统，模式，瞬态响应．

一、前言

本文提出一种算法，可以得到多变量控制系统在各种控制或扰动信号作用下的输出响应的时间表达式(模式)．这对于系统的定性与定量分析都是十分有意义的[1]．

二、数学模型的建立

一个多变量控制系统用结构图表示时，总是由各种环节的串、并联和反馈形式连接而成的．而每一个环节又可以用(1)式所示的一次分式的串、并联和反馈形式来表示．控制和扰动信号，也可以用脉冲信号通过一次分式的串、并联和反馈形式来表示，这样就能够用一次分式作为基本环节来描述一个多变量控制系统．系统的输入都是脉冲信号；系统的输出或各环节的输出，就是某些一次分式环节的输出．

一次分式为如下形式的传递函数：

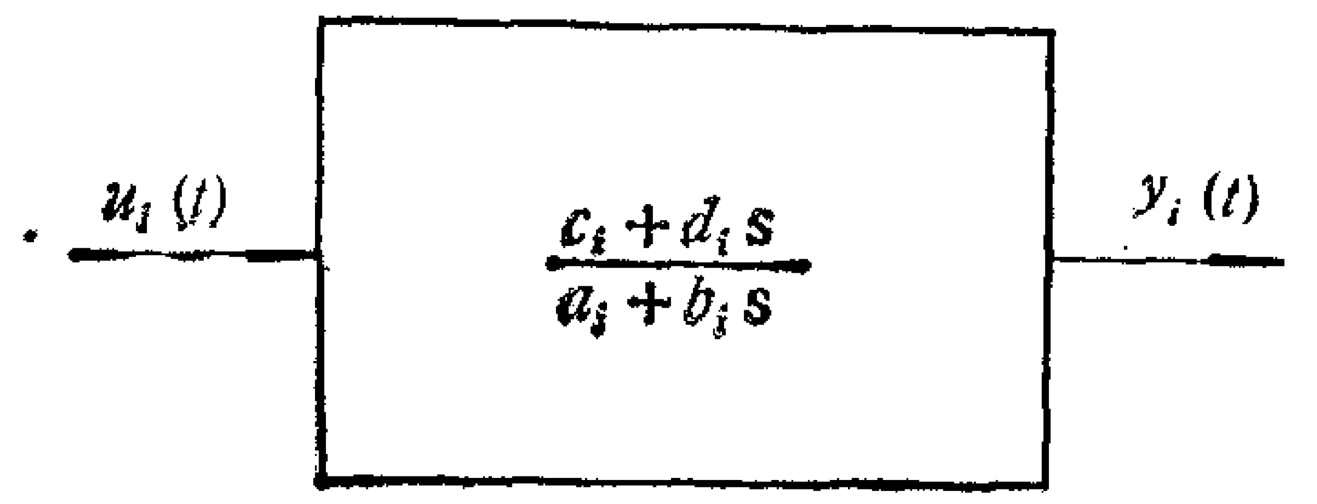
$$G(s) = \frac{c + ds}{a + bs} \quad (a, b, c, d \text{ 为实常数}). \tag{1}$$

假定整个系统由 n 个一次分式环节所组成． 每个一次分式环节的输入为 $u_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，输出为 $y_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，如图1所示．其中，$u_1, \cdots, u_m$ 是系统的输入脉冲信号，且每个脉冲信号输入的一次分式环节均不含微分项，即(1)式中的 $d = 0$．

由图1可得

$$A\boldsymbol{y}(t) + B\dot{\boldsymbol{y}}(t) = C\boldsymbol{u}(t) + D\dot{\boldsymbol{u}}(t), \tag{2}$$

本文于1990年3月24日收到．



$(i=1,2,\cdots,n)$

图 1　一次分式环节

式中，$\boldsymbol{y}(t)\in R^n$；$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$；$n>m$。

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & b_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & c_n \end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & d_{m+1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_n \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\boldsymbol{y}(t)$ 之间的关系可用下式表示：

$$\boldsymbol{u}(t)=W\boldsymbol{y}(t)+W_0\boldsymbol{\delta}(t). \tag{3}$$

式中，

$$W=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ w_{m+1,1} & \cdots & w_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n,1} & \cdots & w_{n,n} \end{bmatrix},\quad W_0=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ m\text{行} \\ m+1\text{行}. \\ \\ n\text{行} \end{array}$$

由(2)式和(3)式可得

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\bar{A}\boldsymbol{y}(t)+\bar{B}\boldsymbol{\delta}(t). \tag{4}$$

式中，

$$\bar{A}=(B-DW)^{-1}(CW-A),\ \bar{B}=(B-DW)^{-1}CW_0, \tag{5}$$

(4)式的解为

$$\boldsymbol{y}(t)=e^{\bar{A}t}\boldsymbol{y}(0)+\int_0^t e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B}\boldsymbol{\delta}(\tau)d\tau=e^{\bar{A}t}\boldsymbol{y}(0)+e^{\bar{A}t}\bar{B}. \tag{6}$$

三、矩阵指数 $e^{\bar{A}t}$ 的模式表达式算法

设 $\bar{A}$ 的 $2p$ 个不同特征值分别为

$$\lambda_1=\alpha_1+j\beta_1,\lambda_2=\alpha_1-j\beta_1,\cdots,\lambda_{2p-1}=\alpha_p+j\beta_p,\lambda_{2p}=\alpha_p-j\beta_p, \tag{7}$$

其重数分别为 $r_1,\cdots,r_p$，且有

$$2r_1+\cdots+2r_p=n. \tag{8}$$

根据凯莱-哈密顿定理和复数的性质并加以推广，可得到如下关系式：

$$e^{\bar{A}t}=b_0(t)I+b_1(t)\bar{A}+b_2(t)(\bar{A})^2+\cdots+b_{n-1}(t)(\bar{A})^{n-1}, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} b_0(t)\\ b_1(t)\\ b_2(t)\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ b_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{Re}[(\alpha_1+j\beta_1)] & \mathrm{Re}[(\alpha_1+j\beta_1)^2] & \mathrm{Re}[(\alpha_1+j\beta_1)^3] & \cdots & \mathrm{Re}[(\alpha_1+j\beta_1)^{n-1}]\\ 0 & 1 & 2\mathrm{Re}[(\alpha_1+j\beta_1)] & 3\mathrm{Re}[(\alpha_1+j\beta_1)^2] & \cdots & (n-1)\mathrm{Re}[(\alpha_1+j\beta_1)^{n-2}]\\ 0 & 0 & 2 & 6\mathrm{Re}[(\alpha_1+j\beta_1)] & \cdots & (n-1)(n-2)\mathrm{Re}[(\alpha_1+j\beta_1)^{n-3}]\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \mathrm{Im}[(\alpha_1+j\beta_1)] & \mathrm{Im}[(\alpha_1+j\beta_1)^2] & \mathrm{Im}[(\alpha_1+j\beta_1)^3] & \cdots & \mathrm{Im}[(\alpha_1+j\beta_1)^{n-1}]\\ 0 & 0 & 2\mathrm{Im}[(\alpha_1+j\beta_1)] & 3\mathrm{Im}[(\alpha_1+j\beta_1)^2] & \cdots & (n-1)\mathrm{Im}[(\alpha_1+j\beta_1)^{n-2}]\\ 0 & 0 & 2 & 6\mathrm{Im}[(\alpha_1+j\beta_1)] & \cdots & (n-1)(n-2)\mathrm{Im}[(\alpha_1+j\beta_1)^{n-3}]\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}^{-1}\begin{array}{l}\begin{bmatrix} e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t\\ te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t\\ t^2e^{\alpha_r t}\cos\beta_1 t\\ \vdots\\ e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t\\ te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t\\ te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t\\ \vdots\\ \vdots \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{第 1 行}\\ \\ \\ \\ \text{第 } r_1+1 \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \text{第 } n \text{ 行,}\end{array} \tag{10}$$

式中，$\mathrm{Re}[(\alpha_i+j\beta_i)^k]$ 表示 $(\alpha_i+j\beta_i)^k$ 的实部，$i=1,2,\cdots p$；$k=1,2,\cdots,n-1$. $\mathrm{Im}[(\alpha_i+j\beta_i)^k]$ 表 示 $(\alpha_i+j\beta_i)^k$ 的 虚 部，$i=1,2,\cdots,p$；$k=1,2,\cdots,n-1$.

四、应用实例

已知两输入两输出系统如图 2 所示，求各环节在单位阶跃输入信号作用下的输出模式表达式.

(2),(3)式中的 A,B,C,D,W,W_0 分别为：

$$A=\begin{bmatrix} 0 &&&&&&& \\ & 0 &&&& \mathbf{0} && \\ && 0 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ & \mathbf{0} &&&& 0 && \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&&&& 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&& \mathbf{0} && \\ && 1 &&&&& \\ &&& 2 &&&& \\ &&&& 5 &&& \\ & \mathbf{0} &&&& 1 && \\ &&&&&&& 3 & \\ &&&&&&&& 9 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&& \mathbf{0} && \\ && 1 &&&&& \\ &&& 5 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ & \mathbf{0} &&&& 1 && \\ &&&&&&& 6 & \\ &&&&&&&& 1 \end{bmatrix},$$

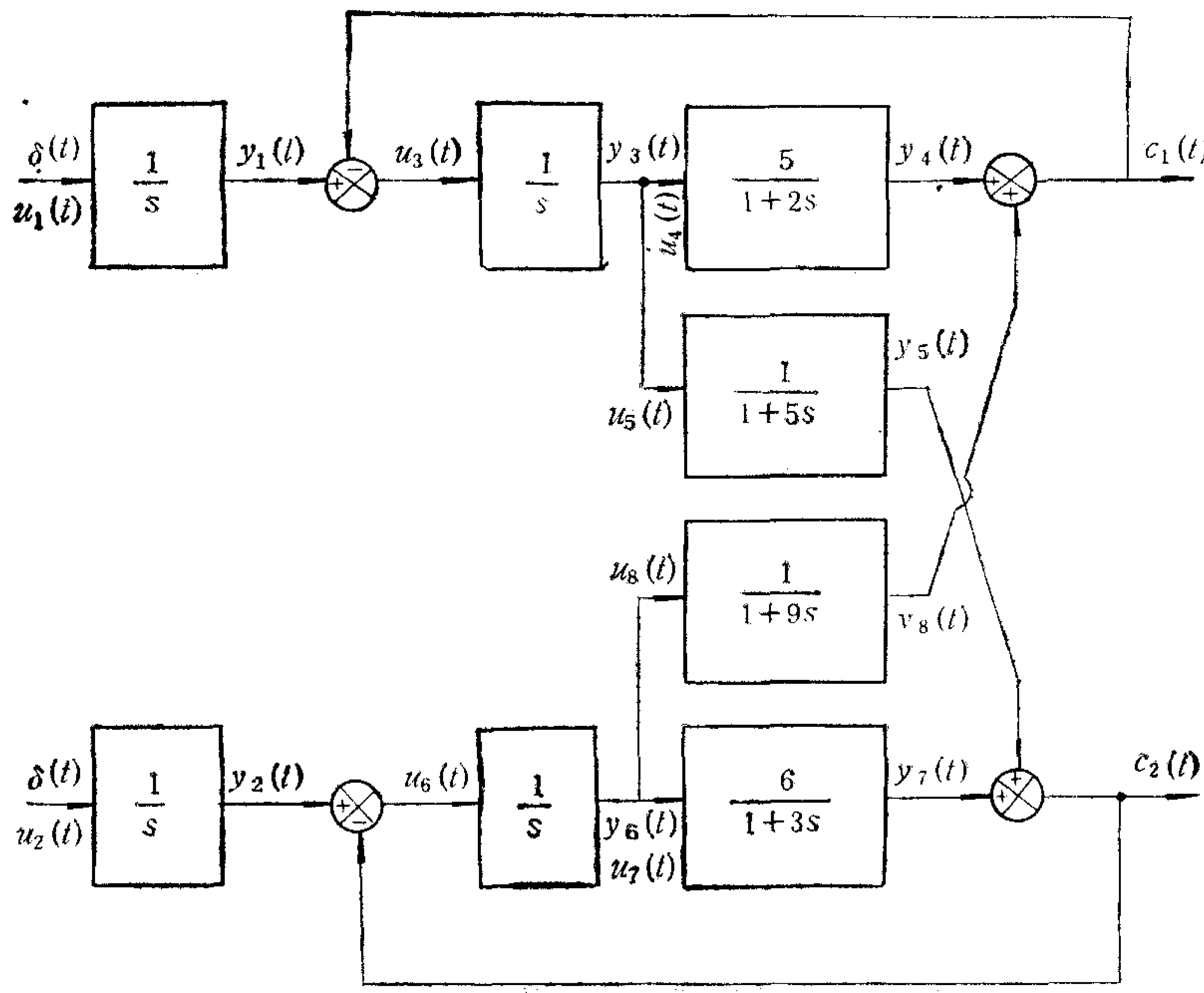


图 2　两输入两输出系统实例

$$D=\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & \text{\huge 0} & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & \text{\huge 0} & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$W=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad W_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

计算结果如下：

$$\begin{aligned} c_1(t)=y_4(t)+y_8(t)=&-1.136e^{-0.24076t}\cos 1.57074t-0.211e^{-0.24076t}\sin 1.57074t \\ &+0.135e^{-0.177092t}\cos 1.39337t+0.056e^{-0.177092t}\sin 1.39337t \\ &+0.003e^{-0.10674t}+0.999 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(t)=y_5(t)+y_7(t)=&-0.324e^{-0.24076t}\cos 1.57074t-0.279e^{-0.24076}\sin 1.57074t \\ &+0.002e^{-0.20199t}-0.677e^{-0.177092t}\cos 1.39337t+0.172e^{-0.177092t}\sin 1.39337t \\ &+0.001e^{-0.10674t}+0.999 \end{aligned}$$

($y_1(t)$, $\cdots$, $y_8(t)$ 的结果略)

五、结 束 语

本文用一次分式建立多变量控制系统的数学模型，并推导出求解瞬态响应模式的计算公式．根据这些公式编写出计算机通用程序，经过大量例题的应用，证明结果正确，使用方便，收敛性好，计算速度快．特别是能看出各环节的瞬态响应模式，因而有利于直观地分析系统的动态特性，这对于系统的设计是很有帮助的．

参 考 文 献

[1] Davison, E. J. and Wang, S. H., Properties and Calculation of Transmission Zeros of Linear Multivariable Systems, *IEEE Trans.*, **AC-10**(1974), 6, 643—658.

A METHOD TO OBTAIN THE PATTERNS OF THE TRANSIENT RESPONSE OF A MULTIVARIABLE CONTROL SYSTEM

HUANG YONGXUAN

(*Dept. of Information and Control, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

ABSTRACT

This paper presents a method for obtaining the transient response of a multivariable control system described by a block diagramm. By using this method, the transient response of the system subjected to any kind of inputs or disturbances can be expressed as an analytical function of time.

Key words: Multivariable control system; pattern; transient response.