第18卷 第2期　　自 动 化 学 报　　Vol. 18, No. 2
1992 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1992

具有多种元件的 N 中取 K 容错系统及其可靠性[1)]

姚 增 起
(中国科学院自动化研究所，北京 100080)

摘　　要

本文提出了具有多种元件的 $\boldsymbol{N}$ 中取 $\boldsymbol{K}$ 容错系统的概念，指出：对于此类系统，当元件可靠度向量 $\boldsymbol{P}\in\Omega(\boldsymbol{P})$（可靠区域）时，通过增加元件数向量 $\boldsymbol{N}$，可以使系统达到任意可靠。这使得构造高可靠系统成为可能。本文结果对神经网络可靠性分析与设计有重要意义。

关键词：$\boldsymbol{N}$ 中取 $\boldsymbol{K}$ 容错系统，可靠性。

一、引　　言

容错是提高系统可靠性的基本方法。n 中取 k 容错系统是指，在 n 个相同元件中，只要有 k 个或 k 个以上元件正常工作，系统就能够正常工作。许多作者都对此系统作过研究[1,2]。本文作者在文献[1]中指出了此系统的一个重要性质，即当元件可靠度适当大时，可以通过增加元件个数 n，使系统达到任意可靠。然而，现有文献所涉及的系统只考虑单种元件。在实际应用中，许多系统的元件种类并非一种，而是多种。本文将对具有多种元件的 $\boldsymbol{N}$ 中取 $\boldsymbol{K}$ 容错系统及其可靠性进行分析。

二、定　　理

假定一个系统中有 m 种元件，第 i 种元件共有 n_i 个，其中有 k_i 个是正常工作的 $(0\leqslant k_i\leqslant n_i)$，单个第 i 种元件正常工作的概率，即可靠度为 $p_i, i=1, 2, \cdots, m$。记 $\boldsymbol{N}=(n_1,n_2,\cdots,n_m)$，$\boldsymbol{K}=(k_1,k_2,\cdots,k_m)$，$\boldsymbol{P}=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$。令 $u_i=k_i/n_i$，$i=1,2,\cdots,m$。因 $0\leqslant u_i\leqslant 1$，称 u_i 为 k_i 的归一化值，而 $\boldsymbol{U}=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 称为 $\boldsymbol{K}$ 的归一化向量。记 $\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots,0)$，$\boldsymbol{1}=(1,1,\cdots,1)$，则有 $\boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{U}\leqslant\boldsymbol{1}$。令 $A=\{\boldsymbol{U}: \boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{U}\leqslant\boldsymbol{1}\}$，则 A 是一个单位超立方体。

定义 1. 设 $\Omega(\boldsymbol{U})\subset A$ 是任意一个区域，如果当一个系统的归一化向量 $\boldsymbol{U}\in\Omega(\boldsymbol{U})$ 时这个系统是可靠的，则称此系统为 $\boldsymbol{N}$ 中取 $\boldsymbol{K}$ 容错系统，$\Omega(\boldsymbol{U})$ 称为此系统的可靠

本文于 1991 年 1 月 18 日收到。
1) 国家自然科学基金资助项目。

区域。

当 $m=1$ 时，若取 $\Omega(u)=[u_0,1]$，则此系统是一个单种元件的 n 中取 k 容错系统，在文献[1]中已对此情形进行了研究。

记 $\boldsymbol{N}$ 中取 $\boldsymbol{K}$ 容错系统的可靠度为 $R(\boldsymbol{P},\boldsymbol{N},\Omega)$ 以及

$$B(n,k,p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \tag{1}$$

由定义 1，有

$$R(\boldsymbol{P},\boldsymbol{N},\Omega)=\sum_{\text{对所有}}\cdots\sum_{\boldsymbol{U}\in\Omega}\prod_{i=1}^{m}B(n_i,k_i,p_i). \tag{2}$$

定理 1. 假定在 $\boldsymbol{N}$ 变化时 $\Omega(\boldsymbol{U})$ 的边界保持不变，则

$$\lim_{\boldsymbol{N}\to\infty}R(\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{N},\ \Omega)=\begin{cases}1, & \text{当 } \boldsymbol{P}\in\Omega(\boldsymbol{P}),\\ 0, & \text{当 } \boldsymbol{P}\bar{\in}\Omega(\boldsymbol{P}),\end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{N}\to\infty$ 表示对所有 $i=1,2,\cdots,m,n_i\to\infty$。

定理 1 的成立比较明显。由于第 i 种元件都是相同的，当 $\boldsymbol{U}\in\Omega(\boldsymbol{U})$ 时，等于说，对第 i 种元件进行了 n_i 次试验，有 k_i 次是正常的。由概率的古典定义，每个第 i 种元件的可靠度为 $p_i\approx k_i/n_i=u_i$，n_i 越大，此式越准确。当 $n_i\to\infty$ 时，$p_i=k_i/n_i$，即 $p_i=\lim\limits_{n_i\to\infty}u_i$，$\boldsymbol{P}=\lim\limits_{\boldsymbol{N}\to\infty}\boldsymbol{U}$。当 $\boldsymbol{P}\in\Omega(\boldsymbol{P})$ 时，从概率上讲有 $\boldsymbol{U}\in\Omega(\boldsymbol{U})$，此时系统完全可靠，系统可靠度为 1。反之系统完全不可靠，系统可靠度为 0。

例 1. 当 $m=1$ 时，取 $\Omega(u)=[u_0,1]$，由(2)式，有

$$R(p,n,\Omega)=\sum_{\text{对所有 } u\in\Omega}B(n,k,\ p)=\sum_{k=u_0n}^{n}B(n,k,p).$$

由定理 1，

$$\lim_{n\to\infty}R(p,n,\Omega)=\begin{cases}1, & \text{当 } u_0\leqslant p\leqslant 1,\\ 0, & \text{当 } 0\leqslant p<u_0,\end{cases}$$
$$=I(p-u_0).$$

其中 $I(p-u_0)$ 为单位阶跃函数。

这与文献[1]中的结果是一致的(基本可靠系统性质 4)

例 2. 设 $m=2$，取 $\Omega(\boldsymbol{U})=\{\boldsymbol{U}:-5u_1+2u_2+1\geqslant 0,\ u_1-5u_2+2\geqslant 0\}$，则 $\Omega(\boldsymbol{U})$ 可表示在图 1 中。由定理 1，若将图 1 中的 $\boldsymbol{U}$ 换为 $\boldsymbol{P}$，则当 $\boldsymbol{P}$ 处于图 1 中的阴影区时，可以通过增加 $\boldsymbol{N}$，使此系统的可靠度接近于 1。

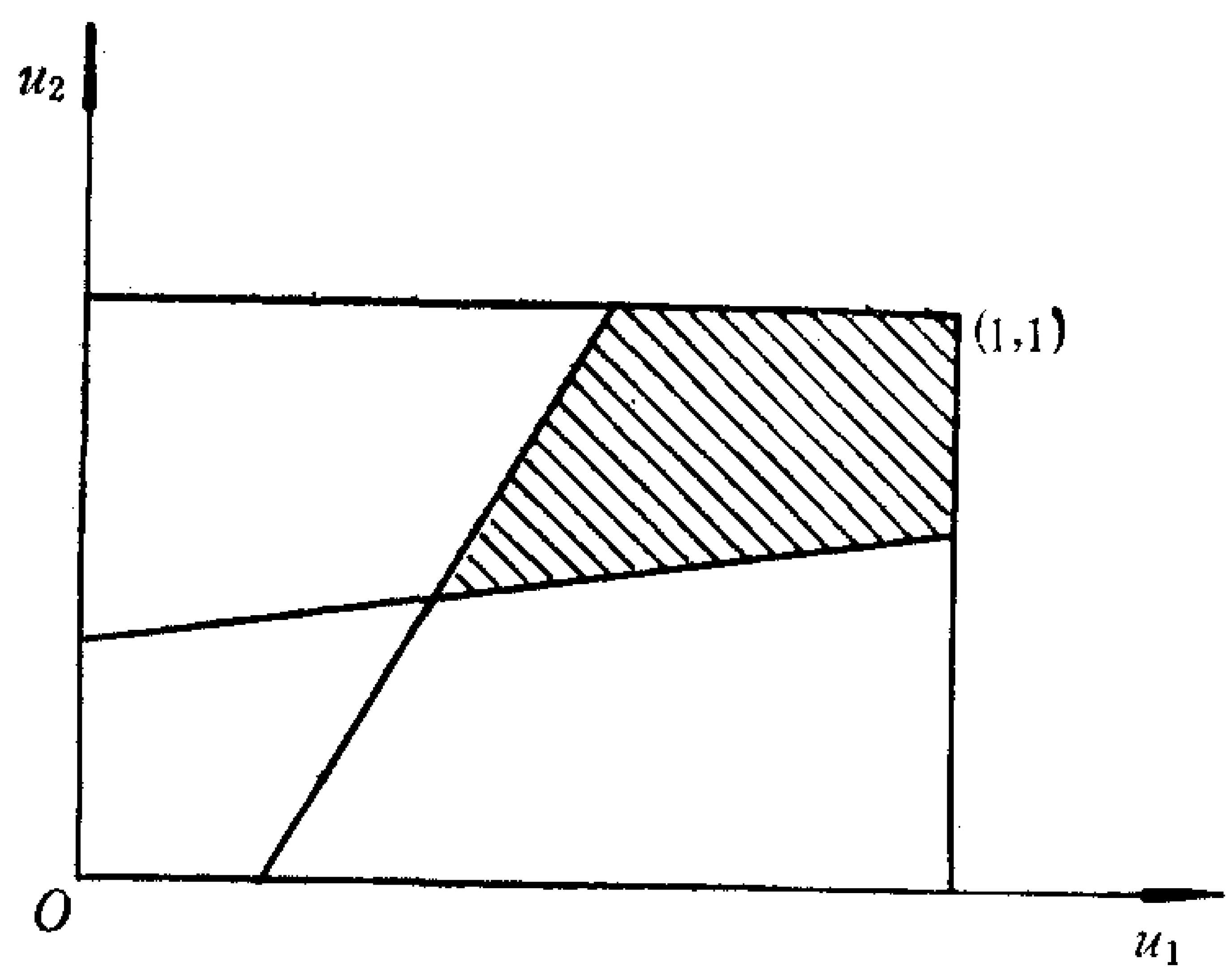

图 1

三、讨 论

定理 1 的意义在于，对 $\boldsymbol{N}$ 中取 $\boldsymbol{K}$ 容错系统，只要它的元件可靠度向量 $\boldsymbol{P}\in\Omega(\boldsymbol{P})$，就可以通过增加系统中的元件个数，使其可

靠度任意接近于 1，也就是说，使系统任意可靠，而 $\Omega(\boldsymbol{P})$ 又是非常容易决定的.另外，由于当 $\boldsymbol{P}\bar{\in}\Omega(\boldsymbol{P})$ 时，系统可靠度接近于 0，在设计时一定要给元件可靠度 $\boldsymbol{P}$ 留有一定裕量，以免由于元件可靠度的退化造成 $\boldsymbol{P}$ 超出 $\Omega(\boldsymbol{P})$ 而使系统失效. 对于一般的工程系统，增加元件个数会受到体积、重量、费用等因素的限制. 目前，VLSI 技术及神经网络理论发展迅速，使得上述限制因素不再成为障碍，因而实现接近于人脑可靠性的系统已成为可能. 根据与定理 1 相同的原理，作者已在文献[1]和另外一篇文章中给出了用 BP（反向传播）神经网络实现高可靠系统的例子，本文不再赘述.

参　考　文　献

[1] 姚增起，用不可靠元件构造可靠系统及其神经网络实现，自动化学报，**16**(1990)，5，429—435.

[2] 曹晋华，程侃，可靠性数学引论，科学出版社，1986 年.

A *K*-OUT-OF-*N* FAULT TOLERANT SYSTEM WITH VARIOUS COMPONENTS AND ITS RELIABILITY

YAO ZENGQI

(*Institute of Automation, Academia Sinica,* 100080)

ABSTRACT

In this paper, the $\boldsymbol{K}$-out-of-$\boldsymbol{N}$ fault tolerant system with various components is proposed. We have proven that the system can be made arbitrarily reliable by increasing its component number vector $\boldsymbol{N}$ when component reliability vector $\boldsymbol{P}\in\Omega(\boldsymbol{P})$ (reliable region). This makes it possible to construct highly reliable systems. The result of the paper is useful to the reliability analysis and design of artificial neural networks.

Key words: $\boldsymbol{K}$-out-of-$\boldsymbol{N}$ fault tolerant system; reliability.