第18卷 第3期 自动化学报 Vol. 18, No. 3
1992年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1992

柔性制造系统的托盘优化[1)]

齐向东 陈文德
(中国科学院系统科学研究所,北京 100080)

摘 要

本文讨论 Job-Shop 型柔性制造系统的托盘优化问题,给出了求最小托盘数的算法,把托盘优化问题化成了求解线性整数规划问题.

关键词: 柔性制造系统,托盘优化,线性整数规划.

设一个 Job-Shop 型柔性制造系统 (FMS) 有 m 台机器, 加工 I 种工件, 第 $i(1\leqslant i\leqslant I)$ 种工件一批中有 p_i 个, 其托盘数为 t_i, 那么一批工件中工件总数为 $p \doteq \sum_{i=1}^{I} p_i$, 托盘总数为 $t=\sum_{i=1}^{I} t_i$, m 台机器和 p 个工件是系统的 $m+p$ 个资源. G. Cohen 等人用极大代数方法对 FMS 建模,所得模型为

$$\boldsymbol{y}(n)=\boldsymbol{u}(n)BA^*C, \tag{1}$$

其中 A,B,C 分别为 $N\times N$, $R\times N$, $N\times R$ 矩阵, 各矩阵的定义见文献[1], $N\leqslant m\times p$, $R=m+p$.

首先考虑一种简单的情形, 假设一批工件中每一种工件只有一个, 即假设 $p_i=1$, $i=1,2,\cdots,I$, 此时有 $p=I$. 令 $\boldsymbol{y}(n)=(y_1(n)\cdots y_m(n)y_{m+1}(n)\cdots y_{m+p}(n))$ 以及 $\boldsymbol{u}(n)=(u_1(n)\cdots u_m(n)u_{m+1}(n)\cdots u_{m+p}(n))$,那么

$$u_j(n)=\begin{cases}k_j y_j(n-1), & 1\leqslant j\leqslant m,\\ k_j y_j(n-t_j), & m+1\leqslant j\leqslant m+p,\end{cases} \tag{2}$$

其中 k_j 表示资源 j 两批之间的转换时间, $k_j \neq \varepsilon$, $j=1,\cdots,m+p$. 设 $t_1,\cdots t_p$ 中一共有 J 个不相等的, 分别记为 $s_1,s_2,\cdots,s_J$ 且 $s_1<s_2<\cdots<s_J$. 定义 J 个反馈阵 K_1, $K_2,\cdots K_J$ 如下: $K_j(1\leqslant j\leqslant J)$ 中非对角线上的元素为 $(K_j)_{il}=\varepsilon(i\neq l)$, 对角线上的元素为 $(K_j)_{ii}=\varepsilon$, $1\leqslant i\leqslant m$, 以及

$$(K_j)_{m+i\,m+i}=\begin{cases}k_{m+i}, & \text{如果 } t_i=s_j\\ \varepsilon, & \text{其它}\end{cases} \tag{3}$$

所以 K_j 可以写为

本文于1991年4月7日收到.

1) 中国科学院管理、决策与信息系统开放实验室资助课题.

$$K_j = \begin{pmatrix} \phi & \phi \\ \phi & K_{jj} \end{pmatrix},$$

其中 K_{jj} 是 $p \times p$ 矩阵．再定义反馈阵 K_0 为：K_0 的非对角线上的元素为 $(K)_{ij}=\varepsilon(i \neq j)$，$K$ 的对角线上的元素为

$$(K_0)_{ii} = \begin{cases} k_i, & 1 \leqslant i \leqslant m \\ \varepsilon, & 其它. \end{cases} \tag{4}$$

所以 K_0 可以写成

$$K_0 = \begin{pmatrix} K_{00} & \phi \\ \phi & \phi \end{pmatrix}, \quad 其中\ K_{00} = \begin{pmatrix} k_1 & \varepsilon \cdots \varepsilon \\ \varepsilon & k_2 \cdots \varepsilon \\ \cdots & \\ \varepsilon & \varepsilon \cdots k_m \end{pmatrix}.$$

这样(2)式可以改写为

$$\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{y}(n-1)K_0 \oplus \boldsymbol{y}(n-s_1)K_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{y}(n-s_J)K_J, \tag{5}$$

由式(1)和(5)可得

$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{y}(n-1)K_0BA^*C \oplus \boldsymbol{y}(n-s_1)K_1BA^*C \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{y}(n-s_J)K_JBA^*C. \tag{6}$$

把机器资源与工件资源分开，令 $\boldsymbol{y}(n) = (\boldsymbol{y}_M(n)\ \ \boldsymbol{y}_p(n))$及 $\boldsymbol{u}(n) = (\boldsymbol{u}_m(n)\ \ \boldsymbol{u}_p(n))$，并且 BA^*C 也相应地分块为 $BA^*C = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$，则有

$$K_0BA^*C = \begin{pmatrix} K_{00}M_1 \\ \phi \end{pmatrix}, \quad K_jBA^*C = \begin{pmatrix} \phi \\ K_{jj}M_2 \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,\cdots,J$$

再令 $\boldsymbol{z}(n) = (\boldsymbol{y}_m(n)\boldsymbol{y}_p(n)\boldsymbol{y}_p(n-1)\cdots\boldsymbol{y}_p(n-s_J+1))$，则(6)式变为

$$\boldsymbol{z}(n) = \boldsymbol{z}(n-1)H. \tag{7}$$

其中H是下面的 $(m+p\cdot s_J)\times(m+p\cdot s_J)$ 方阵：

$$H = \begin{pmatrix} K_{00}M_1 & \phi\cdots\phi & \phi & \phi\cdots\phi \\ \phi & E\cdots\phi & \phi & \phi\cdots\phi \\ \cdots\cdots & & & \\ \phi & \phi\cdots E & \phi & \phi\cdots\phi \\ K_{11}M_2 & \phi\cdots\phi & E & \phi\cdots\phi \\ \phi & \phi\cdots\phi & \phi & E\cdots\phi \\ \cdots\cdots & & & \\ \phi & \phi\cdots\phi & \phi & \phi\cdots E \\ K_{JJ}M_2 & \phi\cdots\phi & \phi & \phi\cdots\phi \end{pmatrix}, \tag{8}$$

当 $t_i=1, i=1,2,\cdots,p$ 时，有 $H = KBA^*C$，其中

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & \varepsilon \cdots \varepsilon \\ \varepsilon & k_2 \cdots \varepsilon \\ \cdots & \\ \varepsilon & \varepsilon \cdots k_{m+p} \end{pmatrix}.$$

令

$$KBA^*C = \begin{pmatrix} D_M & D_{MP} \\ D_{PM} & D_P \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中 D_M 对应机器，D_P 对应工件。

定理 1. 设式(9)中 D_M 的最大特征值为 λ_0，则存在 $t_1^*,t_2^*,\cdots,t_p^*$，使得当 $t_1 \geqslant t_1^*$，$t_2 \geqslant t_2^*,\cdots,t_p \geqslant t_p^*$ 时，系统(7)式的周期为 λ_0。

证明. 图 $G(H)$ 可以看作是从图 $G(KBA^*C)$ 变化而来的. 从 $G(KBA^*C)$ 变到 $G(H)$，所有回路都保留，各回路权重不变，只是长度增加了，并且没有产生新的回路. 设 α 是 $G(KBA^*C)$ 中的一条回路，其权重为 $\omega(\alpha)$，长度为 $l(\alpha)$，那么 α 的平均权重为

$$\varpi(\alpha)=\frac{\omega(\alpha)}{l(\alpha)}. \tag{10}$$

设 α 上所有与工件对应的点为 $m+i_1,m+i_2,\cdots,m+i_{\beta(\alpha)}$，$(1 \leqslant \beta_{(\alpha)} \leqslant p)$，那么在 $G(H)$ 中 α 变为 α_1，α_1 的权重仍为 $\omega(\alpha)$，但其长度变成了 $l(\alpha)+(t_{i_1}-1)+\cdots+(t_{i_{\beta(\alpha)}}-1)$，所以 α_1 的平均权重为

$$\varpi(\alpha_1)=\frac{\omega(\alpha)}{l(\alpha)+(t_{i_1}-1)+\cdots+(t_{i_{\beta(\alpha)}}-1)}, \tag{11}$$

因为 $l(\alpha)+(t_{i_1}-1)+\cdots+(t_{i_{\beta(\alpha)}}-1) \geqslant l(\alpha)$，所以 $\varpi(\alpha_1) \leqslant \varpi(\alpha)$. 当托盘数 $t_{i_1},\cdots t_{i_{\beta(\alpha)}}$ 增加时，$\varpi(\alpha_1)$ 随之减小，当 $t_{i_1},\cdots,t_{i_{\beta(\alpha)}}$ 增加到足够大时，必有

$$\varpi(\alpha_1) \leqslant \lambda_0. \tag{12}$$

对所有的 α 都如此处理，那么必存在 $t_1^*,\cdots,t_p^*$，使得当 $t \geqslant t_1^*,\cdots,t_p \geqslant t_p^*$ 时，$G(H)$ 中所有的回路 α_1 都满足(12)式，此时 $G(H)$ 的最大回路平均权重等于 λ_0. 因为 H 是周期矩阵，周期为 λ_0，所以当 $t_1 \geqslant t_1^*,\cdots,t_p \geqslant t_p^*$ 时，系统(7)式的周期也为 λ_0. 定理 1 证毕.

由定理 1 可知，λ_0 是系统(7)式的最小周期，当托盘数足够多时，可使系统(7)式的周期为 λ_0，再增加托盘，(7)式的周期不再变化. 托盘优化问题就是求使系统(7)式的周期等于 λ_0 的最小托盘总数. 根据定理 1 的证明，托盘优化问题最终可以化成一个整数规划问题，目标是使 $t=t_1+\cdots+t_l$ 达到最小，约束条件是(12)式.

托盘优化算法步骤

第一步. 求(9)式中 D_m 的最大特征值，记为 λ_0；

第二步. 找出图 $G(KBA^*C)$ 中平均权重大于 λ_0 的所有回路，记这些回路的集合为 V；

第三步. a) 如果 $V=\phi$ (ϕ 是空集)，那么托盘优化的最优解为 $t_i^*=1$，$i=1,2,\cdots,l$. b) 如果 $V \neq \phi$，则解下面的线性整数规划问题:

$$\begin{aligned}
&\min\ t_1+t_2+\cdots+t_l,\\
&s.t.\ t_i \geqslant 1, i=1,2,\cdots,l,\\
&\qquad t_{i_1}+t_{i_2}+\cdots+t_{i_{\beta(\alpha)}} \geqslant \frac{\omega(\alpha)}{\lambda_0}-l(\alpha)+\beta(\alpha)
\end{aligned} \tag{13}$$

对所有 $\alpha \in V$.

设(13)式的最优解为 $t_1^*,\cdots,t_p^*$，则 $t_1^*,\cdots t_p^*$ 就是托盘优化问题的最优解.

以上假定了每种工件一批中只有一个，去掉此假定，仍有类似定理 1 的结论以及托盘优化算法，这里不再讨论.

例. 设一个 FMS 有 2 台机器，一批中有 2 个工件，加工时间与加工次序如下：

	J_1	J_2
M_1	1	2
M_2	5	

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{I}(1,1) \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"'] & \mathrm{II}(12) \\
\mathrm{III}(21) &
\end{tikzcd}
$$

那么有

$$
A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon \end{pmatrix}.
$$

令 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$，则

$$
KBA^*C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 \\ \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon \\ 3 & 6 & 6 & 3 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{pmatrix},
$$

其中与(9)式对应地有 $D_M = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ \varepsilon & 5 \end{pmatrix}$.

第一步. D_M 的最大特征值为 $\lambda_0 = 5$；

第二步. $G(KBA^*C)$中只有一条回路的平均权重大于 5，此回路是工件 J_1 形成的自回路$(3\to 3)\triangleq \alpha$，且 $\omega(\alpha) = 6$，$l(\alpha) = 1$，所以 $\bar{\omega}(\alpha) = 6$，$\beta(\alpha) = 1$；

第三步. 求解整数规划问题

$$
\begin{aligned}
&\min\ t_1 + t_2, \\
&\text{s.t. } t_1 \geqslant 1,\ t_2 \geqslant 1, \\
&\qquad t_1 \geqslant \frac{6}{5} - 1 + 1,
\end{aligned}
$$

得最优解为 $t_1^* = 2$，$t_2^* = 1$. 此时

$$
H = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.
$$

可见H是周期等于 5 的周期矩阵.

参　考　文　献

[1] Cohen, G. et al. A Linear-System-Theoretic View of Discrete-Event Process and its Use for Performane Evaluation in Manufacturing, *IEEE, Trans.*, **AC-30** (1985), (3), 210—220.

[2] Chen Wende, Qi Xiangdong, Deng Shuhui, The Eigen-Problem and Period Analysis of Discrete-Event Dynamic Systems, *System Science and Mathematical Science*, **3**(1990), (3).

PALLET OPTIMIZATION OF FLEXIBLE MANUFACTURING SYSTEMS

Qi Xiangdong Chen Wende

(Institute of Systems Science, Academia Sinica Beijing, 100080, *P. R. China)*

Abstract

In this paper, the problem of pallet optimization of a flexible manufacturing system is investigated. An algorithm of pallet optimization is provided. It is shown that the problem of pallet optimization can be reduced to an integer linear programming problem.

Key words: flexible manufacturing system; pallet optimization; integer linear programming.