第 18 卷 第 3 期 自动化学报 Vol. 18, No. 3
1992 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1992

n 中取相邻 k 系统可靠性及街灯照明系统维修策略

廖炯生
(中国空间技术研究院北京控制工程研究所，北京 100080)

摘要

本文从“n 中取相邻 k 坏(好)”系统的等效网络出发，提出统一采用工程界熟知的不交最小割(路)集法计算其可靠度，讨论了在 $k \leqslant n \leqslant 2k$ 条件下大型系统的简化计算，以及 n 中取相邻 2 坏的街灯照明系统的维修策略.

关键词: n 中取相邻 k 系统，可靠性，维修策略.

十年来国内外对 n 中取相邻 k 坏(好)系统(Consecutiue k-out-of-n: $F(G)$) 进行了大量研究[1-5]，但是尚未见到此类系统维修策略的研究资料. 此类系统可靠性计算主要采用了递推办法. 本文讨论采用不交最小割(路)集方法计算，和在 $k \leqslant n \leqslant 2k$ 条件下大

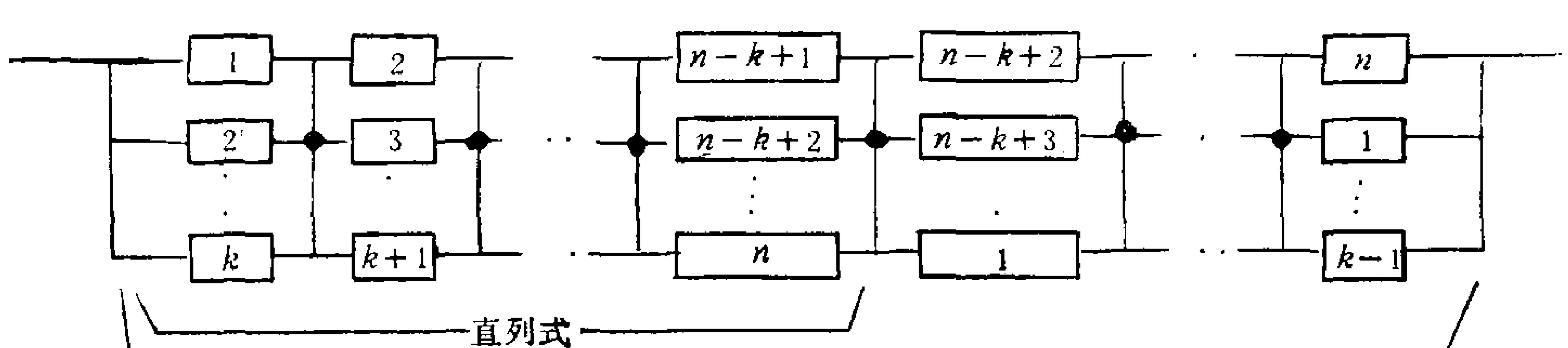

图 1 n 中取相邻 k 坏系统等效网络

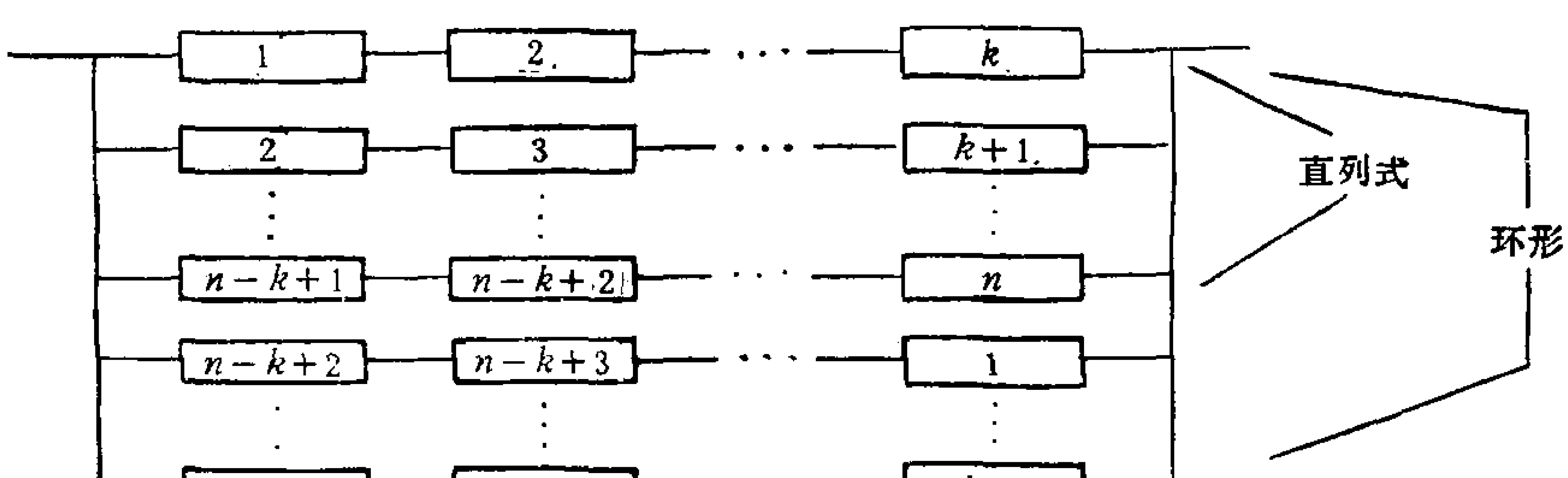

图 2 n 中取相邻 k 好系统等效网络

本文于 1991 年 6 月 20 日收到.

型系统的简化计算，并探讨了"n 中取相邻 2 坏"的街灯照明系统的维修策略.

1) n 中取相邻 k 坏系统显然等效于图 1 网络. 作为它的对偶, n 中取相邻 k 好系统显然等效于图 2 网络.

由图 1 (图 2) 可见:

直列系统有 $n-k+1$ 条最小割(路)集 $\{i,i+1,\cdots,i+k-1\}$, $i=\overline{1,n-k+1}$; 环形系统有 n 条最小割(路)集 $\{j,j+1,\cdots,j+k-1\}$, $j=\overline{1,n}$. 和一般网络的最小割(路)集需用专门的算法和程序来寻找不同，它们都是有规则排列的. 等效网络的失效(成功)概率可用现成的最小割(路)集不交化算法和程序来计算.

在组成单元可靠性对应相同的条件下，直列系统可靠性恒高(图 2 是恒低)于环形系统.

2) 在 $k\leqslant n\leqslant 2k$ 条件下,直列式 n 中取相邻 k 坏系统不可靠度

$$Q=\prod_{i=1}^{k}q_i+\sum_{i=1}^{n-k}\left(\bar{q}_i\prod_{j=i+1}^{i+k}q_j\right). \tag{1}$$

对偶地，直列式 n 中取相邻 k 好系统可靠度

$$R=\prod_{i=1}^{k}p_i+\sum_{i=1}^{n-k}\left(\bar{p}_i\prod_{j=i+1}^{i+k}p_j\right), \tag{2}$$

$p_i(q_i)$ 为第 i 单元可靠度(不可靠度).

下面证明(2)式

当 $k=1$, $n=1$, $R=p_1$, 显然;

$n=2$, $R=p_1+\bar{p}_1p_2=p_1+p_2-p_1p_2$, 即并联系统;

当 $k=2$, $n=2$, $R=p_1p_2$, 即串联系统;

$n=3$, 用不交布尔代数方法求最小路集 p_1p_2、p_2p_3 的不交和

$$R=p_1p_2+\bar{p}_1p_2p_3,$$

即(2)式;

$n=4$, 同理 $R=p_1p_2+\bar{p}_1p_2p_3+\bar{p}_2p_3p_4$, 即(2)式;设 $k=m$ 时(2)成立 $(m\leqslant n\leqslant 2m)$

$$R=\prod_{i=1}^{m}p_i+\sum_{i=1}^{n-m}\left(\bar{p}_i\prod_{j=i+1}^{i+m}p_j\right)$$

则当 $k=m+1$ 时，等效网络中每一条最小路集由相邻 $m+1$ 个单元组成. 应用不交布尔代数方法,考虑 $(n+1)$ 中取相邻 $(m+1)$ 好系统可靠度

$$R=\prod_{i=1}^{m+1}p_i+\sum_{i=1}^{n-m}\left(\bar{p}_i\prod_{j=i+1}^{i+m+1}p_j\right)=\prod_{i=1}^{m+1}p_i+\sum_{i=1}^{(n+1)-(m+1)}\left(\bar{p}_i\prod_{j=i+1}^{i+(m+1)}p_j\right),$$

再考虑 $(n+2)$ 中取 $(m+2)$ 好系统可靠度

$$\begin{aligned}R&=\prod_{i=1}^{m+1}p_i+\sum_{i=1}^{n-m}\left(\bar{p}_i\prod_{j=i+1}^{i+m+1}p_j\right)+\bar{p}_{n-m+1}\prod_{j=n-m+2}^{n+2}p_j\\&=\prod_{i=1}^{m+1}p_i+\sum_{i=1}^{n-m+1}\left(\bar{p}_i\prod_{j=i+1}^{i+m+1}p_j\right)=\prod_{i=1}^{(m+1)}p_i+\sum_{i=1}^{(n+2)-(m+1)}\left(\bar{p}_i\prod_{j=i+1}^{i+(m+1)}p_j\right),\end{aligned}$$

故(2)式成立(当 $(m+1)\leqslant(n+2)\leqslant 2(m+1)$).

当各 p_i (q_i) 相同,则有

$$Q = q^k[1+(n-k)\bar{q}],\quad R = p^k[1+(n-k)\bar{p}]. \tag{1′),(2′}$$

式(1),(2)或(1′),(2′)可用于大型系统简化计算.

例. 64K MOS 存贮器要求相邻 32K 位正常就可以保证 16 位计算机工作，这是一个 $n=2k$ 的大型 n 中取相邻 k 好系统. 设存贮单元寿命相互独立且失效率同为 0.64 非特/每组 (16 位),则"(4096 组)中取相邻(2048 组)好"系统可靠度由(2′)式算得 $R = 0.99602872$ (任务时间 8 年).

3) 街灯照明系统维修策略. 街灯更换是可靠性研究的古老问题之一，最近文献[6]从模糊数学观点作了讨论.由于灯管照度交叉覆盖,相邻失效灯管少于 k 时系统可降级使用. $k=2$ 或 3 算系统失效存在一定程度的模糊性. 现取 $k=2$ 来讨论 n 中取相邻 2 坏系统维修策略. 其等效网络中每一"环节"由 2 支灯并联，注意到相邻两环节中含有一支相同的灯，并非完全独立，这一情况造成了应用更新过程理论严格分析其维修策略的困难.

现取工程近似,只对相邻 2 灯失效的环节作事后更换;根据系统定义，对于非相邻失效的灯概不考虑其失效,它将在周期 $lT(l=1,2,\cdots)$ 被成批更换，或在相邻环节失效作事后更换时被实际更换. 下面据此进行分析.

设所有灯管寿命独立同分布

$$G(t) = 1-(1+t)e^{-t}, \tag{3}$$

等效网络每一环节失效分布为

$$F(t) = [G(t)]^2, \tag{4}$$

$$F'(t) = 2(t\cdot e^{-t} - te^{-t} - t^2e^{-2t}). \tag{5}$$

由文献[7],更新寿命分布为 $F(t)$ 的更新函数

$$M(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F^{(i)}(t), \tag{6}$$

其中 $F^{(i)}(t)$ 是 $F(t)$ 的 i 重卷积.

用 Laplace-Stieltjes 变换和 Laplace 变换法

$$\mathscr{L}_s[F(t)] = \mathscr{L}[F'(t)] = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{4}{(s+2)^3}, \tag{7}$$

$$\mathscr{L}_s[M(t)] = \frac{\mathscr{L}_s[F(t)]}{1-\mathscr{L}_s[F(t)]} = \frac{6s+8}{s(s^4+8s^3+25s^2+38s+22)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+s_1)^2} + \frac{C}{(s+s_2)^2}, \tag{8}$$

$A = 1.822481$, $B = -0.012429$, $C = -1.810053$,

$s_1 = 1.327892965$, $s_2 = 3.30570268$

因为 $\mathscr{L}_s[M(t)] = \mathscr{L}[M'(t)]$, 记 $M'(t) \triangleq m(t)$.

则由 Laplace 逆变换得

$$m(t) = A + Bte^{-s_1 t} + Cte^{-s_2 t}, \tag{9}$$

$$M(t) = At - D + (E+Ft)e^{-s_1 t} + (G+Ht)e^{-s_2 t}, \tag{10}$$

$D = 0.1727877$, $E = 0.0070487$, $F = 0.0093599$, $G = 0.165639$, $H = 0.547555$.

令 $C(T)$ 表示当计划更换时间间隔为 T 时,一个环节经长期运行后单位时间的期望损失

$$C(T) = [c_f M(T) + c_p]/T. \tag{11}$$

其中 $M(T)$ 为期望事后更换次数, c_f 为一环节事后更换损失, c_p 为一环节预防更换损失. 直列系统等效网络有 $n-1$ 环节串联(环形则有 n 环节),所以系统损失为

$$C'(T) = [(n-1)M(T)c_f + c_b]/T, \tag{12}$$

其中 c_b 为系统预防性更换损失.

令 $\mathrm{d}C'(T)/\mathrm{d}T = 0$,

等价于
$$Tm(T) - M(T) = c_b/[(n-1)c_f], \tag{13}$$

以式(9)、(10)代入

$$\begin{aligned} D - (E + FT - BT^2)e^{-s_1 T} - (G + HT - CT^2)e^{-s_2 T} \\ = c_b/[(n-1)c_f]. \end{aligned} \tag{13'}$$

因为 $m(t)$ 连续严格单调递增, $M(t)$ 连续严格单调递降,故上式左端(记为 $h(T)$) 连续严格单调递增. 若 $c_b/[(n-1)c_f] < h(\infty) = D$, 则存在唯一有限解 T^*, 它满足方程式(13),使系统损失最小

$$C'(T^*) = [(n-1)c_f M(T^*) + c_b]/T^*, \tag{14}$$

设 $c_b/[(n-1)c_f] = 0.15 < D$, 用数值法解方程 (13′) 得唯一解

$$T^* = 1.83141.$$

相应有 $M(T^*) = 3.16977$, $C'(T^*) = 1.812697(n-1)c_f$, 若

$$c_b/[(n-1)c_f] \geqslant h(\infty) = D,$$

则 $T^* = \infty$; 最小损失为 $C'(T^*) = C'(\infty) = 1.822481(n-1)c_f$.

两种情形下的最小损失相差不多,说明对于 n 中取相邻 2 坏的街灯系统来说,重要的只是在发生相邻 2 灯失效时作事后更换.

本文曾与曹晋华研究员讨论,附此致谢.

参 考 文 献

[1] Kontoleon, J. M., *IEEE Trans. on Rel.*, **29** (1980), 436—437.
[2] Chiang, D. T. and Niu S. C., IEEE Trans. on Rel., **30** (1981), 87—89.
[3] 廖炯生,科学通报, (1985),(24),1862—1865.
[4] 阎春宁,史定华,自动化学报, **14**(1988),(4),311—318
[5] Kuo, W. et al., *IEEE Trans. on Rel.*, **39** (1990), 244—253
[6] 蔡开元等, Fuzzy Sets and Systems, **37** (1990), 161—172.
[7] 曹晋华,程侃,可靠性数学引论,科学出版社, 1986.

RELIABILITY OF CONSECUTIVE-k-OUT-OF-n:F/G SYSTEMS AND A MAINTAINENCE STRATEGY FOR STREET LAMP SYSTEMS

LIAO JIONGSHENG

(*Beijing Institute of Control Engineering, Chinese Academy of Space Technology* 100080)

ABSTRACT

Based on the equivalent network of consecutive-k-out-of-n:F/G systems, the approach of disjoint minimum cut sets (path sets) is presented for computing the reliability of these systems, and the simplification of reliability computations for large systems on the condition $k \leqslant n \leqslant 2k$ is discussed. Finally, a maintenence strategy for street lamp systems is explored in this article.

Key words: Consecutive-k-out-of-n:F/G; reliability; maintainence strategy.