

# 滞后型控制系统的稳定性判据

田存生 张英林

(兰州大学电子与信息科学系, 兰州 730000)

## 摘 要

本文根据李雅普诺夫稳定性理论, 推导出滞后型控制系统  $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau)$  无条件稳定的充分条件. 并且证明所建立的稳定性代数判据, 不仅简明易用, 且能获得较大的稳定区域.

**关键词:** 时滞, 渐近稳定, 无条件稳定.

## 一、稳定性判据

记  $\phi: x(t)$  的初始函数且连续, 即

$$\phi(t) = x(t), \quad -\tau \leq t \leq 0.$$

$|\phi|$ : 定义为  $|\phi| \triangleq \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$ , 这里  $|\phi(\theta)|$  是  $\phi(\theta)$  在  $R^n$  上的任意范数.

$\text{Res}(X)$ : 表示矩阵  $X$  特征值的实部. 设时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) = f(t, \phi), \quad (1)$$

其中  $x(t) \in R^n$ ;  $A \in R^{n \times n}$ ;  $A_\tau \in R^{n \times n}$ ;  $\tau \in R^+$ .

关于系统(1)的稳定性, HALE 提出并证明了下面的理论<sup>[1]</sup>.

**引理 1.** 设  $f: R \times C \rightarrow R^n$  连续有界;  $u, v, w: R^+ \rightarrow R^+$  为连续非减函数; 对于  $s > 0$ ,  $u(s), v(s)$  均为正. 且  $u(0) = v(0) = 0$ . 如果存在一个连续函数  $V: R \times C \rightarrow R$  使得

$$\begin{aligned} u(|\phi(0)|) &\leq V(t, \phi) \leq v(|\phi|), \\ \dot{V}(t, \phi) &\leq -w(|\phi(0)|), \end{aligned}$$

则方程(1)的解  $x = 0$  是一致稳定的; 如果当  $s \rightarrow \infty$  时,  $u(s) \rightarrow \infty$ , 方程(1)的解是一致有界的; 若  $s > 0$  有  $w(s) > 0$ , 则解  $x = 0$  是一致渐近稳定的.

据此, 选用李雅普诺夫函数

$$V(\phi) = \phi^T(0)P\phi(0) + \int_{-\tau}^0 \phi^T(\theta)Q\phi(\theta)d\theta,$$

其中  $P, Q$  均为  $n \times n$  阶正定对称矩阵;  $T$  表示转置.

考虑到  $\dot{\phi}(0) = A\phi(0) + A_\tau\phi(-\tau)$ <sup>[1]</sup>, 沿着式(1)的解,  $V(\phi)$  的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi) = & \phi^T(0)[A^T P + P A + Q]\phi(0) + \phi^T(-\tau)A_r^T P \phi(0) \\ & + \phi^T(0)P A_r \phi(-\tau) - \phi^T(-\tau)Q \phi(-\tau). \end{aligned}$$

在上式的右边加,减  $\phi^T(0)P A_r Q^{-1}A_r^T P \phi(0)$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(\phi) = & \phi^T(0)(A^T P + P A + P A_r Q^{-1}A_r^T P + Q)\phi(0) \\ & - [\phi(-\tau) - Q^{-1}A_r^T P \phi(0)]^T Q [\phi(-\tau) - Q^{-1}A_r^T P \phi(0)] \\ \leq & \phi^T(0)(A^T P + P A + P A_r Q^{-1}A_r^T P + Q)\phi(0) \\ = & -\phi^T(0)W \phi(0). \end{aligned}$$

对  $V(\phi)$ , 由于  $P > 0$ ,  $Q > 0$ . 因此有实数  $r > 0$ ,  $k > 0$  使得

$$r|\phi(0)|^2 \leq V(\phi) \leq k|\phi|^2.$$

由引理1, 如果存在正定对称矩阵  $P, Q$  能使

$$-W = P A + A^T P + P A_r Q^{-1}A_r^T P + Q < 0 \quad (2)$$

成立. 则系统(1)的解  $x = 0$  是一致渐近稳定的. 因为  $P, Q$  与时滞  $\tau \geq 0$  无关, 所以也称系统(1)为无条件稳定.

如果令式(2)中的  $P = I$  或  $P = Q = I$ , 可得到一些简单的稳定性判据. 且计算方便. 在实际工程中确定稳定性时, 有其实用价值, 不足之处是能确定的稳定性区域小些. 为此, 本文讨论了矩阵方程(2)式的原结构形式. 显然, 如果存在实数  $m > 1$ ,  $Q = Q^T > 0$  使得

$$P A + A^T P + P A_r Q^{-1}A_r^T P + mQ = 0 \quad (3)$$

的解  $P$  满足  $P = P^T > 0$ , 则由(2)式得

$$-W = -mQ + Q = -(m-1)Q < 0.$$

对于方程(3), 有

**定理.** 矩阵方程式(3)存在正定对称矩阵解  $P$ , 且满足  $\text{Res}(A + A_r Q^{-1}A_r^T P) < 0$  的充分必要条件是: 由(3)式的系数矩阵构成的  $2n$  阶矩阵

$$Z = \begin{bmatrix} A & A_r Q^{-1}A_r^T \\ -mQ & -A^T \end{bmatrix}.$$

当  $\text{Res}(A) < 0$  时, 满足  $\text{Res}(Z) \neq 0$ .

证明见附录.

据此可得到

**稳定性判据 1.** 设  $\text{Res}(A) < 0$ . 如果存在对称矩阵  $Q > 0$ , 且实数  $m > 1$ , 使得

$$Z = \begin{bmatrix} A & A_r Q^{-1}A_r^T \\ -mQ & -A^T \end{bmatrix}, \quad (4)$$

满足  $\text{Res}(Z) \neq 0$ , 则系统(1)式的解  $x = 0$  是无条件稳定的.

**稳定性判据 2.** 如果  $\text{Res}(A) < 0$ , 且有实数  $m > 1$ , 使得

$$Z = \begin{bmatrix} A & A_r A_r^T \\ -mI & -A^T \end{bmatrix}. \quad (5)$$

满足  $\text{Res}(Z) \neq 0$ , 则系统(1)式的解  $x = 0$  是无条件稳定的.

令(4)式中的  $Q = I$ , 即得(5)式.

为了方便稳定性判据的应用, 分析矩阵  $Z$  的特征多项式  $f(s) = |sI - Z|$ . 由文献

[2]引理 5.3.1,  $f(s)$  的一般形式为

$$f(s) = f(-s) = a_{2n}s^{2n} + a_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + a_2s^2 + a_0.$$

由于  $f(s) = 0$  只能有  $2n$  个特征根, 所以若  $f(s) = 0$  有  $n$  个正实部的根, 就必有  $n$  个负实部的根, 即  $\text{Res}(Z) \neq 0$ .

根据 Routh 判据<sup>[3]</sup>, 对  $f(s)$  所构成的 Routh 阵列, 若表中第一列元素不完全同号, 且符号改变的次数正好是  $n$  次, 则方程  $f(s) = f(-s) = 0$  有  $n$  个正实部的根和  $n$  个负实部的根. 即

$$\text{Res}[f(s)] \neq 0 \text{ 或 } \text{Res}(Z) \neq 0.$$

## 二、应用举例

设系统为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t - \tau),$$

试求其无条件稳定的条件.

解: 显然  $\text{Res}(A) < 0$ , 取  $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}$  则

$$\begin{aligned} f(s) = |sI - Z| &= s^4 - \left[ 25 + \left( 5 + \frac{q_{11}}{q_{22}} \right) ma^2 \right] s^2 \\ &+ 4m^2a^4 - \left( 73 + 9 \frac{q_{11}}{q_{22}} \right) ma^2 + 144 = 0. \end{aligned}$$

若要  $\text{Res}[f(s)] \neq 0$ , 必须有

$$4m^2a^4 - \left( 73 + 9 \frac{q_{11}}{q_{22}} \right) ma^2 + 144 > 0,$$

取  $q_{22} = 1, q_{11} = 0.01, m = 1.01$ , 可得该系统无条件稳定的充分条件是:  $|a| < 1.4913$ ;

文献[4]获得的稳定条件:  $|a| < 1.3592$ ;

文献[5]获得的稳定的充要条件:  $|a| < 1.5$ .

事实上, 若取  $q_{22} \gg q_{11} > 0, m \rightarrow 1$ , 就有  $|a| < 1.5$ .

## 附 录

引理 2<sup>[2]</sup>. 对任意正定对称矩阵  $Q$ , 方程

$$XA + A^T X = -Q,$$

存在正定对称矩阵解  $X$  的充分必要条件是

$$\text{Res}(A) < 0.$$

以下证明本文提出的定理.

必要性. 设  $P = P^T > 0$ . 由定理 5.3.1<sup>[2]</sup>,  $A + A_r Q^{-1} A_r^T P$  的特征值也是  $Z$  的特征值, 而  $Z$  的特征值又是对虚轴, 实轴对称的. 所以  $\text{Res}(A + A_r Q^{-1} A_r^T P) < 0$  说明  $\text{Res}(Z) \neq 0$ . 同时将方程(3)式记为

$$PA + A^T P = -[Q + PA_r Q^{-1} A_r^T P].$$

这里将方程(3)式中的  $m > 1$  暂作  $m = 1$  来记,并不影响讨论结果. 而  $Q = Q^T > 0$ ,  $P = P^T > 0$ , 则由引理 2 得:  $\text{Res}(A) < 0$ .

充分性. 设  $\text{Res}(Z) \neq 0$ , 则  $Z$  的若唐标准形可表示为  $\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix}$ , 其中  $\text{Res}(J) < 0$ ,  $\text{Res}(\tilde{J}) > 0$ . 记

$\begin{bmatrix} T & M \\ W & N \end{bmatrix}$  为变换矩阵, 即

$$\begin{bmatrix} T & M \\ W & N \end{bmatrix}^{-1} Z \begin{bmatrix} T & M \\ W & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix},$$

或  $Z \begin{bmatrix} T \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ W \end{bmatrix} J,$

且  $\begin{bmatrix} T \\ W \end{bmatrix}$  的列向量是线性独立的. 由定理 5.3.12<sup>[2]</sup>, 当满足  $\text{Res}(Z) \neq 0$ ,  $\text{Res}(A) < 0$  及  $A_r Q^{-1} A_r^T = B B^T$  时,  $T$  必为可逆阵. 根据定理 5.3.1<sup>[2]</sup>,  $P = W T^{-1}$  是方程(3)式的一个解. 由于  $\text{Res}(Z) \neq 0$ , 则  $\text{Res}(A + A_r Q^{-1} A_r^T P) < 0$ , 根据定理 5.3.4<sup>[2]</sup>, 这个解是实对称的, 据引理 2  $\text{Res}(A) < 0$ , 此解又是正定对称的. 证毕.

### 参 考 文 献

- [1] HALE, J. K., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, (1977), 14 and 105—107.
- [2] 韩京清等编著, *线性系统理论代数基础*, 辽宁科技出版社, (1979).
- [3] (美)本杰明 C. 郭, *自动控制系统*, 张一中译, 水利电力出版社, (1983), 271—278.
- [4] A. HMAMED<sup>+</sup>, *Int. J. Contr.*, **43**(1986), 2, 460—461.
- [5] 张作元, *科学通报*, **31**(1986), (23), 1768—1771.

## THE STABILITY CRITERION OF TIME DELAY CONTROL SYSTEM

TIAN CUNSHENG ZHANG YINGLIN

(Dept. of Electronics and Information Science, Lanzhou University, Lanzhou 730000)

### ABSTRACT

In this paper, the sufficient conditions, in the sense of Liapunov, of delay-independent stability of the delay control system  $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_r x(t - \tau)$  are obtained. The example presented shows that this stability criterion not only is concise and easy to use, but also can obtain some extension of the stable region.

**Key words:** Time-delay; asymptotic stability; delay-independent stability.