

LQ 控制区段混合能矩阵的微分方程及其应用¹⁾

钟万颢

(大连理工大学工程力学研究所²⁾, 大连 116024)

钟翔翔

(纽约州立大学石溪分校, 应用数学系)

摘 要

本文根据计算结构力学与线性二次控制的对应关系, 提出了连续时间有限区段的混合能分块子矩阵 Q_2, G_2 及 Φ_2 , 推导出适用于 LQ 控制非定常课题的二区段连接的凝聚消元公式及这些子矩阵的微分方程, 可用级数展开求解这些方程。当 Δt 很小时, 这些分块子矩阵的高次近似可以大大加速里卡提代数方程算法的收敛性。

关键词: 区段混合能矩阵, LQ 控制。

一、引 言

里卡提方程的求解对于 LQ 控制问题来说是至关重要的^[1-4]。在文献[5,6]中, 分别提出了离散时间和连续时间情况下 LQ 控制代数里卡提方程的迭代求解方法, 并指出还可分别求解一个逆向时间的里卡提方程。同时又对于连续时间情况提出了当 Δt 选得非常小时不发生严重舍入误差的 2^N 类的算法。进而在文献[7]中发现, LQ 控制与结构力学中的串连式子结构的理论^[8], 以及柱形域椭圆型偏微分方程半解析法的理论与方法^[9], 是可以互相模拟的。这就给不同学科与最优控制互相渗透提供了条件与途径。

依照文献[7]中提出的一一对应关系, 本文模拟结构力学的方法, 首先推导了在非定常情况下其消元算法的公式。这些公式可以对定常时迭代算法的收敛解, 即代数里卡提方程的解提供了证明。对于连续时间有限区段具有的混合能的分块子矩阵 Q_2, G_2 及 Φ_2 , 可以由消元算法的公式, 建立其微分方程。常用的 Riccati 方程只是其中之一。本文可以求出在区段长 Δt 很小时这些分块子矩阵的级数展开式。对于 Δt 区段采用高次近似会加速里卡提方程的 2^N 算法的收敛性。

本文于 1989 年 11 月 17 日收到。

1) 本文系中国自然科学基金支持项目的一部分。

2) 上海交通大学工程力学系兼职教授。

二、不同区段耦合的消元公式

对于连续时间或离散时间的推演都是一样的,但用离散时间推演时,较易理解。因此以下先用离散时间系统说明。

每个区段的特性,在结构力学中总可用能量式来表征。为了与 LQ 控制问题相联结,以采用混合能量为宜。它由前端的刚度阵 Q , 后端的柔度阵 G , 以及交互阵 Φ 构成其混合能矩阵

$$M = \begin{bmatrix} \Phi & -G \\ Q & \Phi^t \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

所有的子矩阵其尺度都是 $n \times n$ 。一次拼装消元过程有 3 个区段。其中两个是参加拼装的,还有一个是拼装出的区段。第一个参加拼装的区段,其有关矩阵不给下标;第 2 个参加拼装的有关矩阵用下标 2 来标记;拼装成的矩阵,则加以下标 c 。每个区段有两个端面;一次拼接总共有 3 个端面,其中一个为拼接面,另二个为出口端面。拼接面上的向量 x 及 λ 不加下标;另二个出口端面分别用下标 k 及 f 来标记。这样拼装成的区段其端面为 k 及 f , k 是刚度阵端面, f 是柔度阵的端面,拼装成的区段,其混合能的算式为

$$V(x_k, \lambda_f) = \frac{1}{2} \lambda_f^t G_c \lambda_f - \lambda_f^t \Phi_c x_k - \frac{1}{2} x_k^t Q_c x_k, \quad (2.2)$$

$$\text{且} \quad \lambda_k^t \delta x_k + x_f^t \delta \lambda_f = -\delta V(x_k, \lambda_f). \quad (2.3)$$

现将 k 面与拼接面 r 之间的区段选为第一区段,而 r 与 f 之间的选为第二区段(如图 1)。将相应于这二个区段的全变分方程(2.3)相加,有

$$(\lambda_k^t \delta x_k + x^t \delta \lambda) + (\lambda^t \delta x + x_f^t \delta \lambda_f) = -\delta [V_1(x_k, \lambda) + V_2(x, \lambda_f)]$$

$x^t \delta \lambda + \lambda^t \delta x = \delta(\lambda^t x)$ 是一个全变分,因此展开后有

$$\begin{aligned} \lambda_k^t \delta x_k + x_f^t \delta \lambda_f = & -\delta \left[\lambda^t x + \frac{1}{2} \lambda^t G \lambda - \lambda^t \Phi x_k - \frac{1}{2} x_k^t Q x_k \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \lambda_f^t G_2 \lambda_f \lambda_f^t \Phi_2 x - \frac{1}{2} x^t Q_2 x \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

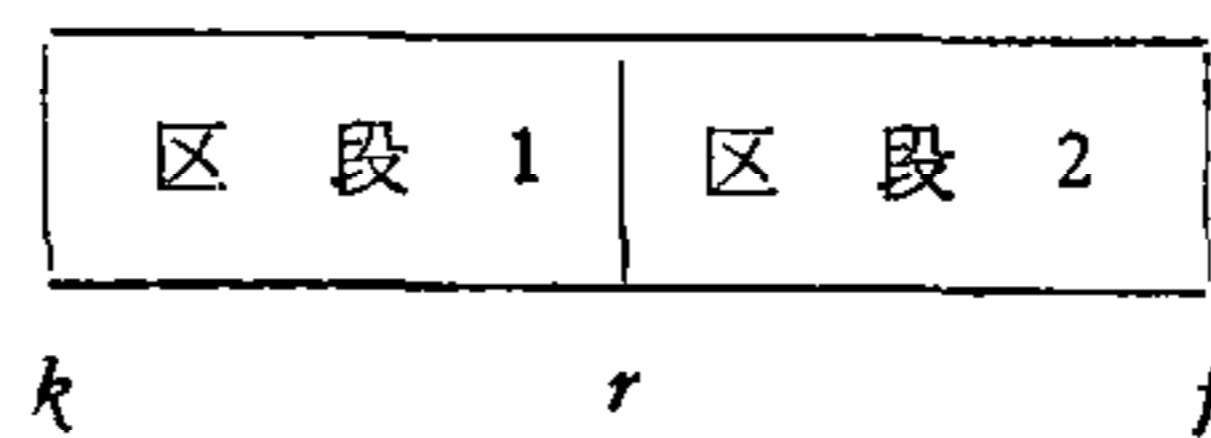


图 1

上式右方的 λ 与 x 不在左侧出现,因此成为内部变量,可以进行消元。将式(2.4)右侧对 λ 与 x 分别作偏微商为零,可列出对 x 与 λ 的联立方程

$$\begin{cases} Q_2 x - \lambda = -\Phi_2^t \lambda_f, \\ x + G \lambda = \Phi x_k. \end{cases} \quad (2.5)$$

由此解出

$$\left. \begin{aligned} x &= (I + Q_2 G)^{-1} \Phi x_k - (I + Q_2 G)^{-1} G \Phi_2^t \lambda_f, \\ \lambda &= (I + Q_2 G)^{-1} Q_2 \Phi x_k + (I + Q_2 G) \Phi_2^t \lambda_f. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

将(2.6)式代入(2.4)式右侧,经过一番矩阵代数的运算,得到对于 x_k 与 λ_f 的二次型。即

式(2.3)及(2.2)中的二次型混合能. 经过比较,就有凝聚而得的矩阵

$$Q_c = Q + \Phi'(Q_2^{-1} + G)^{-1}\Phi = Q + \Phi'(I + Q_2G)^{-1}Q_2\Phi, \quad (2.7)$$

$$G_c = G_2 + \Phi_2(G^{-1} + Q_2)^{-1}\Phi_2', \quad (2.8)$$

$$\Phi_c = \Phi_2(I + Q_2G)^{-1}\Phi. \quad (2.9)$$

三、区段混合能矩阵的微分方程

连续坐标的方程可写成为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Fx - G\lambda, & x_0 &= \text{已知} \\ \dot{\lambda} &= -Qx - F'\lambda, & \lambda &\rightarrow 0, \text{ 当 } t \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中

$$G = CR^{-1}C' \quad (3.2)$$

C 是输入矩阵,而 R 为控制向量的价值矩阵,皆为已知矩阵.如果是定常系统,则 Q, G, F 与时间 t 无关,否则它们可以是时间的函数.相应的变分原理为

$$\delta J = \delta \int_0^{\infty} [-\lambda' \dot{x} - V_d(x, \lambda)] dt = 0, \quad (3.3)$$

$$V_d(x, \lambda) = \frac{1}{2} \lambda' G \lambda - \lambda' F x - \frac{1}{2} x' Q x, \quad (3.4)$$

式中 V_d 是混合能密度.

现在定义的区段由二个时刻 t_a 与 t_b 表征, $t_b > t_a$. 在 $t_a < t < t_b$ 之间认为(3.1)式中的微分方程已得到满足;而两端条件为

$$x_a = x(t_a), \quad \lambda_b = \lambda(t_b), \quad (3.5)$$

这里 x_a 与 λ_b 可以是任意向量.于是就有了区段的混合能

$$V(x_a, \lambda_b) = \int_{t_a}^{t_b} [\lambda' \dot{x} + V_d(x, \lambda)] dt \quad (3.6)$$

式中的 x 与 λ 应当满足(3.1)式的微分方程及(3.5)式的边界条件.

由于讨论的是线性系统,因此 $V(x_a, \lambda_b)$ 一定是一个二次型,因此可以写成

$$V(x_a, \lambda_b) = \frac{1}{2} \lambda_b' G_2 \lambda_b - \lambda_b' \Phi_2 x_a - \frac{1}{2} x_a' Q_2 x_a, \quad (3.7)$$

式中 Q_2, G_2, Φ_2 当然会与时间 t_a, t_b 有关.如果是定常系统,则它们只依赖于 $(t_b - t_a)$.

现在要分析 V 与混合能密度之间的关系,先从 b 端伸长一个时间段 Δt , 这相当于有了一个区段 $(t_b, t_b + \Delta t)$. 在 Δt 的区段,要写出其混合能,就需进行离散化处理^[6,7], Δt 区段的混合能 V_Δ 为

$$V_\Delta(x_b, \lambda_\Delta) = \frac{1}{2} \lambda_\Delta' G \Delta t \lambda_\Delta - \lambda_\Delta' (I + F \Delta t) x_b - \frac{1}{2} x_b' Q \Delta t x_b. \quad (3.8)$$

式(3.7)及(3.8)给出了二个相连区段的混合能,按上一节所述,可以作凝聚消元,得到区段 $(t_a, t_b + \Delta t)$ 的混合能.其公式为(2.7)~(2.9).但在使用时一定要注意对比取代(表1).

将表1取代运用于(2.7)式后,有

表 1

式(2.7)–(2.9)	Q_2	G_2	Φ_2	Q	G	Φ	Q_c	G_c	Φ_c
此处	$Q\Delta t$	$G\Delta t$	$I + F\Delta t$	$Q_2(t_a, t_b)$	$G_2(t_a, t_b)$	$\Phi_2(t_a, t_b)$	$Q_2(t_a, t_b + \Delta t)$	$G_2(t_a, t_b + \Delta t)$	$\Phi_2(t_a, t_b + \Delta t)$

$$\begin{aligned} Q_2(t_a, t_b + \Delta t) - Q_2(t_a, t_b) &= \Phi_2^T(I + QG_2\Delta t)^{-1}Q\Delta t\Phi_2 \\ &= \Phi_2^T Q\Phi_2\Delta t + O((\Delta t)^2). \end{aligned}$$

两边同除 Δt , 再令 $\Delta t \rightarrow 0$, 有

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t_b} = \Phi_2^T Q\Phi_2. \quad (3.9)$$

从(2.8)式又有

$$\begin{aligned} G_2(t_a, t_b + \Delta t) &= G\Delta t + (I + F\Delta t)G_2(I + QG_2\Delta t)^{-1}(I + F'\Delta t) \\ &= G_2(t_a, t_b) + (G + FG_2 + G_2F' - G_2QG_2)\Delta t + O((\Delta t)^2), \end{aligned}$$

上式当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 可导出

$$\frac{\partial G_2}{\partial t_b} = G + FG_2 + G_2F' - G_2QG_2. \quad (3.10)$$

从(2.9)式有

$$\begin{aligned} \Phi_2(t_a, t_b + \Delta t) &= (I + F\Delta t)(I + G_2Q\Delta t)^{-1}\Phi_2 \\ &= \Phi_2(t_a, t_b) + (F\Phi_2 - G_2Q\Phi_2)\Delta t + O((\Delta t)^2), \end{aligned}$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 有

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t_b} = (F - G_2Q)\Phi_2. \quad (3.11)$$

以上是从 b 端伸出 Δt 的区段; 从 a 端伸出时有取代(表 2).

表 2

式(2.7)–(2.9)	Q_2	G_2	Φ_2	Q	G	Φ	Q_c	G_c	Φ_c
此处	$Q_2(t_a, t_b)$	G_2	Φ_2	$Q\Delta t$	$G\Delta t$	$I + F\Delta t$	$Q_2(t_a - \Delta t, t_b)$	$G_2(t_a - \Delta t, t_b)$	$\Phi_2(t_a - \Delta t, t_b)$

将这一套取代运用于式(2.7)–(2.9), 经类同推导有

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t_a} = -(Q + F'Q_2 + Q_2F - Q_2GQ_2), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial t_a} = -\Phi_2G\Phi_2^T, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t_a} = -\Phi_2(F - GQ_2). \quad (3.14)$$

以上(3.12)式就是里卡提微分方程^[4], 它的解与边界条件有关, 可以写为

$$\text{当 } t_a = t_b \text{ 时, } Q_2 = 0, \Phi_2 = I, G_2 = 0. \quad (3.15)$$

因为要求 $t_a < t_b$, 所以是逆时间积分的。

对于式(3.9)—(3.11)是顺时间积分. 边界条件为

$$\text{当 } t_a = t_b \text{ 时, } Q_2 = 0, \Phi_2 = I, G_2 = 0.$$

就是(3.15)式.

以上方程并不要求系统是定常的. 下面就考虑定常系统. 此时 Q_2, G_2 及 Φ_2 只与 $(t_b - t_a)$ 有关. 因为只有一个独立变量, 可写成

$$t = t_b - t_a; \text{ 而 } Q_2 = Q_2(t), \text{ 等} \quad (3.16)$$

边界条件仍可以用(3.15)式, 而微分方程则成为

$$\frac{dQ_2}{dt} = \Phi_2' Q \Phi_2 = Q + F' Q_2 + Q_2 F - Q_2 G Q_2, \quad (3.17)$$

$$\frac{dG_2}{dt} = \Phi_2 G \Phi_2' = G + F G_2 + G_2 F' - G_2 Q G_2, \quad (3.18)$$

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = (F - G_2 Q) \Phi_2 = \Phi_2 (F - G Q_2). \quad (3.19)$$

四、代数里卡提方程的迭代求解

作为区段混合能矩阵的微分方程的一个应用, 本文用 2^N 迭代法求解代数里卡提方程. 迭代公式和算法与文献[6]一样. 问题是在于迭代的初始出发点.

离散时间控制的初始出发点是自然有的. 但是连续时间控制时, 只能人为地选定一个 Δt , 然后进行迭代. 在文献[6]中, 选定 Δt 之后, 相应地选用

$$Q' = Q \Delta t, \quad G' = G \Delta t, \quad \Phi' = F \Delta t, \quad (4.1)$$

这里 $\Phi = I + \Phi'$. 但计算时保存的是 Φ' . 在选出了这个初始态之后, 文献[6]中已有一套行之有效的迭代算法, 本文仍旧用这套算法. 问题是式(4.1)的初始状态虽然是可行的, 但只有一次近似项. 如果希望计算结果比较准确, 必须将 Δt 选得非常小, 例如选用 $\Delta t = 1e^{-7}$. 虽然文献[6]中的算法已对于舍入误差作了仔细考虑, 可保计算结果仍然可靠, 但是迭代次数却不可避免会要增加. 大体说来, 10^{-3} 相当于 2^{10} , 要多做 10 次迭代.

本文选择一个比一次近似为好的初始状态. 例如选用高次近似. 由于上一节建立了微分方程式(3.17)—(3.19), 可用于寻求当 t 很小时的级数展开式, 代替(4.1)式时对于 Δt 区段的一次近似, 即可选用高次近似. 在(4.1)式的基础上, 展开为

$$\begin{aligned} Q_2 &= Q t + \mathbf{q}_2 t^2 + \mathbf{q}_3 t^3 + \cdots; \quad G_2 = G t + \mathbf{g}_2 t^2 + \mathbf{g}_3 t^3 + \cdots, \\ \Phi_2 &= I + F t + \varphi_2 t^2 + \varphi_3 t^3 + \cdots. \end{aligned} \quad (4.2)$$

将上式代入式(3.17)—(3.19)中得

$$\left. \begin{aligned} Q + 2\mathbf{q}_2 t + 3\mathbf{q}_3 t^2 &= (I + F t + \varphi_2 t^2)' Q (I + F t + \varphi_2 t^2) + O(t^3) \\ G + 2\mathbf{g}_2 t + 3\mathbf{g}_3 t^2 &= (I + F t + \varphi_2 t^2) G (I + F' t + \varphi_2' t^2) + O(t^3) \\ F + 2\varphi_2 t + 3\varphi_3 t^2 &= (F - G Q t - \mathbf{g}_2 Q t^2) (I + F t + \varphi_2 t^2) + O(t^3) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

t^0 的项自动抵消, t^1 的系数相等给出

$$\mathbf{q}_2 = \frac{1}{2} (F' Q + Q F), \quad \mathbf{g}_2 = \frac{1}{2} (F G + G F'), \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} (F^2 - G Q). \quad (4.4)$$

再将 t^2 的系数相等有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_3 &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (Ft^2Q + GF^2) + F'QF - QGQ \right], \\ \mathbf{g}_3 &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (F^2G + GF^2t) + FGF' - GQG \right], \\ \boldsymbol{\varphi}_3 &= \frac{1}{3} [F\boldsymbol{\varphi}_2 - GQF - \mathbf{g}_2Q] = \left[\frac{1}{2} (F^3 - GF'Q) - FGQ - GQF \right] / 3 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

等等。还可以计算更高次的。如用另一套方程,结果相同。

计算时,例如用二次近似的初态,则

$$\left. \begin{aligned} Q^1 &= \left[Q + \frac{1}{2} (F'Q + QF) \cdot \Delta t \right] \Delta t, \\ G^1 &= \left[G + \frac{1}{2} (FG + GF') \Delta t \right] \Delta t, \\ \Phi^1 &= \left[F + \frac{1}{2} (F^2 - GQ) \Delta t \right] \Delta t. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

这是因为初始区段长为 Δt , 因此式(4.2)中的 t 为 Δt 。

五、对连续时间代数里卡提方程的数例

如上一节所述,迭代算法已在文献[6]中提出,所不同的是初始状态的选定由(4.1)式的一次近似改成为(4.6)式的二次近似。本文计算是在 IBM-PC/AT 兼容机上执行的。采用单精度实型数说明,即一切实型数皆为 `real*4`。按十进制来说,其有效位数在 7 位左右。编译器用 MS-Pascal 3.20 版本。这里给出一个例题的原始数据,用不同的初始态(4.1)式的一次近似及(4.6)式的二次近似,对相同的 $\Delta t = 0.01$; 以及 $\Delta t = 0.000001$, 作一次近似计算的结果以供比较(表 3、表 4)。 $\Delta t = 0.01$ 的二次近似初态几乎与 $\Delta t = 10^{-6}$ 的初态一次近似相同。可见效果是显著的。

表 3

$Q =$	1.0;				
	0.0;	0.0;	0.0;		
	0.0;	0.0;	0.0;	0.0;	0.0;
$G =$	0.0;				
	0.0;	0.0;	0.0;		
	0.0;	0.0;	0.0;	0.0;	0.09;
$F_i =$	-0.2;	0.5;	0.0;	0.0;	0.0;
	0.0;	0.0;	-0.14286;	857.142E-3;	0.0;
	0.0;	0.0;	0.0;	0.0;	-0.1;

表 4

delt = 0.0100000000	eps = 0.0000001000	初始态用二次近似			
S =					
1.7441;	0.8290;	1.2775;	0.6719;	1.8332;	
1.2775;	1.0227;	2.3166;	1.5558;	5.3863;	
1.8332;	1.7689;	5.3863;	4.8052;	27.2104;	
Fi*S + S*Fi =					
-0.6977;	0.2917;	0.8885;	0.7927;	4.4891;	
0.8885;	0.8573;	2.6108;	2.3294;	13.1906;	
4.4891;	4.3317;	13.1906;	11.7679;	66.6361;	
Q - S*G*S =					
0.6975;	-0.2919;	-0.8887;	-0.7928;	-4.4895;	
-0.8887;	-0.8575;	-2.6111;	-2.3294;	-13.1907;	
-4.4895;	-4.3320;	-13.1907;	-11.7677;	-66.6366;	
delt = 0.0100000000	eps = 0.0000001000	初始态用一次近似			
S =					
1.7532;	0.8355;	1.2901;	0.6788;	1.8501;	
1.2901;	1.0383;	2.3601;	1.5860;	5.4807;	
1.8501;	1.7936;	5.4807;	4.8892;	27.5735;	
delt = 0.0000010000	eps = 0.0000010000	初始态用一次近似			
S =					
1.7441;	0.8290;	1.2775;	0.6718;	1.8329;	
1.2775;	1.0227;	2.3164;	1.5557;	5.3859;	
1.8329;	1.7686;	5.3859;	4.8052;	27.2103;	

本文得到大连理工大学工程力学研究所博士生邓子辰同志的大力帮助,在此表示衷心地感谢。

参 考 文 献

- [1] Stengel, R. F., Stochastic Optimal Control, Theory and Application, John Wiley and Sons., 1986.
- [2] Borrie, J. A., Modern Control Systems. Prentice-Hall, 1986.
- [3] Johnson, H. A. Grimble, M. J. Recent Trends in Linear Optimum Quadratic Multivariable Control System Design. IEE Proc-D, 1987.
- [4] 解学书,最优控制理论与应用,清华大学出版社,1986年.
- [5] 钟万勰,定常离散 LQ 控制问题的里卡提代数方程的迭代求解,自动化学报待发表.
- [6] Zhong Wanxie, Zhong Xiangxiang, Elliptic Partial Differential Equations and Optimal Control, Numerical Method for Partial Differential Equations, (1992), (2)
- [7] 钟万勰、钟翔翔,计算结构力学、最优控制及偏微分方程半解析法,计算结构力学及其应用,1990,(1),1—15.
- [8] 钟万勰、林家浩、裘春航,相同子结构串的本征对问题及展开解法,力学学报,(1991),(1),72—81.
- [9] 钟万勰、钟翔翔,柱形域椭圆型偏微分方程的横向本征函数的解法,数值计算与计算机应用待发表.
- [10] 钟万勰、杨再石,连续时间 LQ 控制主要本征对的算法,应用数学和力学,(1991),(1),45—50.

ON DIFFERENTIAL EQUATION OF THE INTERVAL MIXED ENERGY SUBMATRICES OF LQ CONTROL AND ITS APPLICATION

ZHONG WANXIE

(Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology 116024)

ZHONG XIANGXIANG

(Dept. of Applied Mathematics, State University of New York at Stone Brook)

ABSTRACT

Based on the corresponding relation between LQ control and computational structural mechanics, the interval mixed energy matrices Q_2 , G_2 and Φ_2 are put forward in this paper. Then, the formulas for the condensation algorithm of the LQ control problem are derived. From the condensation formulas, the differential equations for these matrices are introduced. The Riccati equation is one of them. These equations are solved by the series expansion method when Δt is very small. Using the higher approximation of the very small interval, Δt , one can speed up the iterative solution of the algebraic Riccati equation.

Key words: Interval mixed energy submatrices; LQ control.



钟万勰 男, 1934年4月出生, 1956年毕业于同济大学, 后到中科院力学所工作, 1962年至今在大连理工大学工程力学研究所任所长, 1978年由讲师破格提为教授, 1981年为首批博士生导师, 1985年开始带博士后。现任中国力学学会常务理事, 国际计算力学 (IACM) 执行理事, 中国计算力学委员会主任委员, 在国内外发表论文一百五十余篇, 专著四本。多项成果获科学大会奖、国家自然科学基金、国家教委及辽宁省奖励。



钟翔翔 1985年在华东化工学院应用数学专业毕业, 1988年获计算机科学硕士学位, 现为纽约州立大学应用数学系博士研究生。主要兴趣在应用数学, 计算机图像, 程序系统等方面。