

# 二阶导数型边缘检测算子边缘 定位误差的研究<sup>1)</sup>

许志祥

(上海科技大学无线电电子学系 201800)

## 摘 要

本文首先导入了离散的高斯-拉普拉斯(DLOG)及二项分布——拉普拉斯(LOB)两种二阶导数型边缘检测算子。由独立的高斯噪声所污染的数字边缘作为边缘图象模型。使用二阶导数型边缘检测算子对图象模型进行卷积后,用均方误差最小的准则对卷积后的图象进行平面拟合,并求出零交点作为图象的边缘点。推导了二阶导数型算子的边缘定位概率 $P_d$ 及假边缘检测概率 $P_f$ ,继而比较了两种二阶导数型边缘检测算子的性能。

**关键词:** 边缘检测算子,二阶导数的零交点,图象处理,计算机视觉。

## 一、前 言

在图象处理及计算机视觉的领域中,图象边缘的提取是最基本但也是最重要的研究课题之一。大多数边缘检测技术<sup>[1]</sup>使用了微分运算符或其变形形式去提取边缘。在使用二阶导数型算子对图象进行运算后应进行零交点检测以提取图象的边缘。

二阶导数型的边缘检测算子已有不少文献进行了论述,拉普拉斯型及二次方向导数型是最常见的两种。由于拉普拉斯的高通特性在检测出图象边缘的同时会将噪声也大量检测出来,因而 Marr 及 Hildreth 提出了有名的高斯-拉普拉斯边缘检测算法<sup>[2,3]</sup>,在对图象进行拉普拉斯运算前使用高斯分布的滤波器先对图象进行滤波,从而有效地提取了边缘减少了噪声。Haralick<sup>[4]</sup>提出了先对图象灰度值用一个曲面进行拟合,并沿着其梯度方向找出二阶方向导数的零交点作为边缘点,也得到了很好的检测效果。

评价一个边缘检测算子的优劣应视真正的边缘是否正确地被检测出来以及噪声是否有效地被抑制。文献[1,4,5]给出了边缘检测算子的评价准则。W. K. Pratt<sup>[1]</sup>采用了以优质系数评价边缘检测算子边缘定位的正确性。本文采用独立的高斯噪声所污染的无限长数字边缘作为边缘图象模型,用二阶导数型算子对此边缘图象进行运算,并求出零交点后即可计算出边缘定位概率及假边缘检测概率,用它们评价二阶导数型算子的优劣。由于二阶导数型算子对图象进行卷积后的输出在零交点处可近似认为是线性变化的,故使

本文于1991年3月13日收到。

1) 国家八六三高技术项目资助的课题。

用线性内插即可求出零交点<sup>[3]</sup>。本文提出了被检测点  $3 \times 3$  邻域 9 个点用最小均方误差进行平面拟合, 求出拟合平面和被检测点的关系, 从而确定该点是否为零交点的检测算法。文献 [5] 中采用了被检测点邻域 5 点进行平面拟合求出零交点, 由于拟合时点数较少, 噪声影响比较严重。

## 二、DLOG 算子及 LOB 算子

均值为零、标准差均为  $\sigma$  且相互独立的两个随机变量的二维高斯分布密度函数可表示为

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right], \quad (1)$$

对上式进行拉普拉斯运算  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$  并取负号得连续的高斯-拉普拉斯 (LOG) 函数

$$\nabla^2 p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left[2 - \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right] \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (2)$$

对(2)式进行离散化即得离散的高斯-拉普拉斯边缘检测算子 (DLOG 算子)

$$\nabla^2 G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left[2 - \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right] \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right], \quad (3)$$

式中  $x, y = -l, \dots, -1, 0, 1, \dots, l$ 。理论上这是无限长的滤波序列, 即  $l \rightarrow \infty$ 。  $\sigma$  是高斯分布的尺度空间常数。若将公式(2)的函数的正中心区域的直径称为  $W_G$ , 则可求得  $W_G = 2\sqrt{2}\sigma$ 。

当重复独立的贝努里试验中每次试验成功和失败的概率为  $p = q = 0.5$ , 则  $n$  次贝努里试验中  $k$  次成功的概率为

$$b(k; n, 0.5) = C_n^k / 2^n, \quad (4)$$

式中  $k = 0, 1, \dots, n$ , 且

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (5)$$

设  $k = \frac{n}{2} + x$ , 则一维二项分布滤波模板为

$$B(x) = b(k; n, 0.5) = C_{\frac{n}{2}+x}^n / 2^n, \quad (6)$$

式中  $x = -\frac{n}{2}, 1 - \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}$ 。此滤波模板以  $x = 0$  为中心点左右对称。

一维模板可以推广到二维的二项分布模板, 此时相互独立的  $n$  次贝努里试验  $k_1$  次成功与  $k_2$  次成功的联合概率为

$$b(k_1, k_2; n, 0.5) = C_{k_1}^{n_1} C_{k_2}^{n_2} / 2^{2n}. \quad (7)$$

设  $k_1 = \frac{n}{2} + x$  及  $k_2 = \frac{n}{2} + y$  得二维二项分布滤波模板:

$$B(x; y) = C_{\frac{n}{2}+x}^{n_1} C_{\frac{n}{2}+y}^{n_2} / 2^{2n}, \quad (8)$$

式中  $x, y = -\frac{n}{2}, 1 - \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}$ 。对(8)式求拉普拉斯可得

$$\nabla^2 B(x, y) = B(x, y) \left[ \frac{1 + 2x}{\frac{n}{2} + 1 + x} + \frac{1 - 2x}{\frac{n}{2} + 1 - x} + \frac{1 + 2y}{\frac{n}{2} + 1 + y} + \frac{1 - 2y}{\frac{n}{2} + 1 - y} \right], \quad (9)$$

$$\nabla^2 B \left[ \pm \left( \frac{n}{2} + 1 \right), y \right] = -B \left( \frac{n}{2}, y \right), \quad (10)$$

$$\nabla^2 B \left[ x, \pm \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \right] = -B \left( x, \frac{n}{2} \right), \quad (11)$$

$$\nabla^2 B \left[ \pm \left( \frac{n}{2} + 1 \right), \pm \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \right] = 0. \quad (12)$$

式(9)–(12)中  $x, y = -\frac{n}{2}, 1 - \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}$ 。由此即构成二项分布——拉普拉斯(LOB)边缘检测算子,其中  $n$  为 LOB 算子的尺度空间常数。

可以证明<sup>[6]</sup>,在二项分布的尺度空间常数  $n$  足够大时二项分布逼近高斯分布,且它们的尺度空间常数有如下关系:

$$\sigma = \sqrt{n} / 2. \quad (13)$$

为了研究方便,将 LOB 及 DLOG 算子统一书写成  $L(x, y)$ ;  $x, y = -l, \dots, l$ 。对于 LOB 算子,  $L(x, y) = \nabla^2 B(x, y)$ , 而  $l = \frac{n}{2} + 1$ 。对于符合(13)式关系的 DLOG 算子,  $L(x, y) = \nabla^2 G(x, y)$ , 若序列长度取成和相应的 LOB 算子同样的值,即  $l = 2\sigma^2 + 1$ , 计算证明序列截断后 DLOG 算子舍去的能量和总能量相比可以忽略不计。

### 三、边缘检测定位误差的分析

如图 1(a) 所示在  $y = y_0$  处有一垂直数字边缘,此边缘图象可表示为

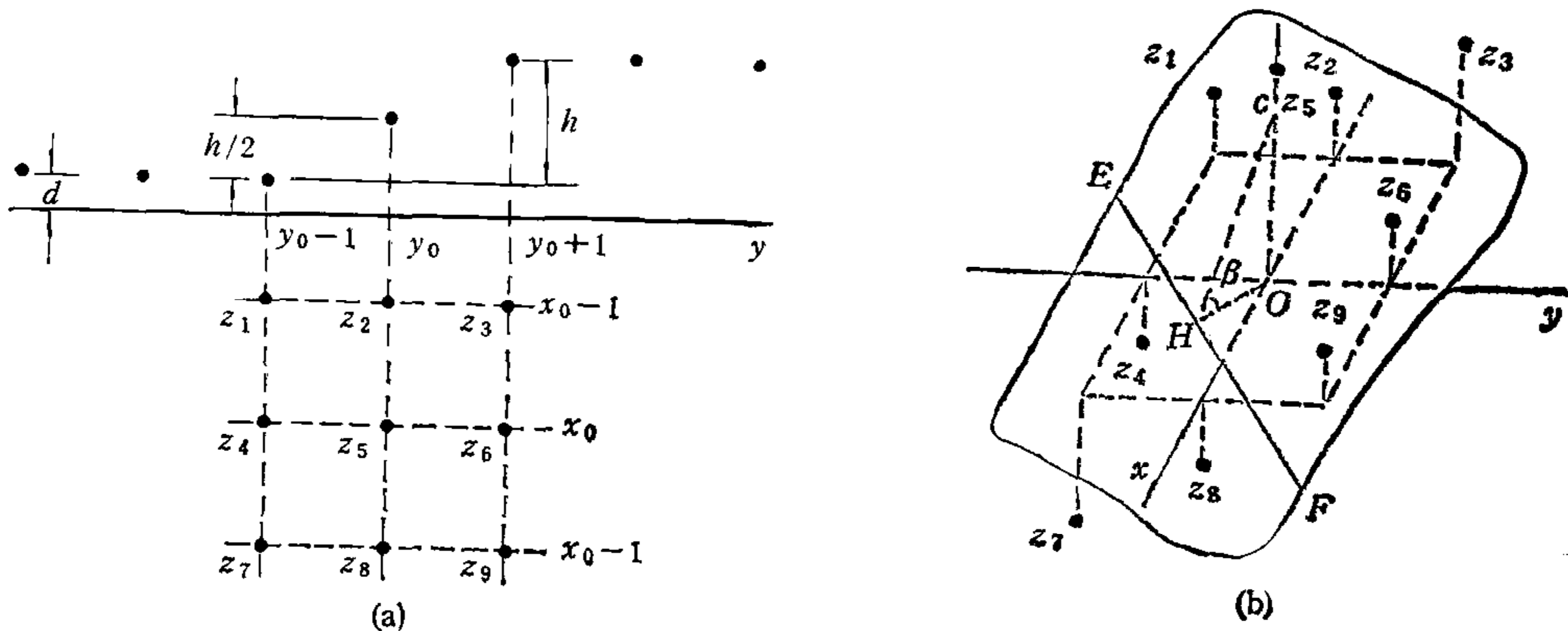


图 1 零交点检测算法

$$f'(x, y) = \begin{cases} d, & \text{当 } y < y_0 \text{ 及各种 } x \text{ 值,} \\ d + h/2, & \text{当 } y = y_0 \text{ 及各种 } x \text{ 值,} \\ d + h, & \text{当 } y > y_0 \text{ 及各种 } x \text{ 值.} \end{cases} \quad (14)$$

此图象被独立的高斯分布的噪声污染后表示为

$$f(x, y) = f'(x, y) + \sigma_N N(x, y). \quad (15)$$

式中  $N(x, y)$  是具有零均及单位方差的归一化高斯分布噪声, 各噪声之间及与信号之间是相互独立的,  $\sigma_N$  是噪声的标准差. 图象  $f(x, y)$  的信噪比定义为

$$\text{SNR} = h^2 / \sigma_N^2. \quad (16)$$

用边缘检测算子  $L(x, y)$  对图象  $f(x, y)$  进行卷积得

$$z(x, y) = \sum_{i=-l}^l \sum_{j=-l}^l L(i, j) f(x - i, y - j). \quad (17)$$

经卷积后的图象  $z(x, y)$  的零交点即为所检测的边缘点. 如图 1(a) 所示本文采用被检测点  $x_0, y_0$  附近  $3 \times 3$  邻域中 9 个  $z(x, y)$  值即  $z_1 - z_9$  来确定该点是否是零交点. 为计算方便, (如图 1(b) 所示) 把被检测点置于  $x = y = 0$  点处, 并在均方误差最小的意义下求出了  $z_1 - z_9$  的拟合平面  $\hat{z} = ax + by + c$ . 此拟合平面和  $xoy$  平面的交线  $EF$  离被检测点的距离  $OH$  (称为交距) 及拟合平面和  $xoy$  平面的斜率  $\text{tg}\beta$  作为确定被检测点是否为零交点的两个主要参数. 均方误差可表示为

$$\varepsilon^2 = E\{[z - (ax + by + c)]^2\}. \quad (18)$$

使均方误差  $\varepsilon^2$  对  $a, b$  及  $c$  分别求偏导并等于零即可解出拟合平面的参数  $a, b$  及  $c$ . 然后根据图 1(b) 的几何关系可求得

$$OH = \frac{2 \left| \sum_{i=1}^9 z_i \right|}{3 \sqrt{(z_7 + z_8 + z_9 - z_1 - z_2 - z_3)^2 + (z_3 + z_6 + z_9 - z_1 - z_4 - z_7)^2}}, \quad (19)$$

$$\text{tg}\beta = \frac{1}{6} \sqrt{(z_7 + z_8 + z_9 - z_1 - z_2 - z_3)^2 + (z_3 + z_6 + z_9 - z_1 - z_4 - z_7)^2}. \quad (20)$$

设置阈值  $TH$  和  $TS$ , 当交距  $OH \leq TH$  及斜率  $\text{tg}\beta > TS$  时被检测点接受为边缘点.

这里  $z_1 - z_9$  为 9 个随机变量, 为了计算边缘检测定位误差, 首先应计算随机向量  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3, \dots, z_9]^T$  的联合概率密度函数. 由于  $z(x, y)$  是高斯随机变量的线性组合, 故联合概率密度函数为多维的高斯分布函数, 可表示为

$$p(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^5 (|C|)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{m})^T C^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{m}) \right], \quad (21)$$

均值向量  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_9]^T$ , 协方差矩阵  $C = [c_{ij}]$ , 其中  $i = 1-9$  及  $j = 1-9$ .

根据高斯分布随机变量线性变换的性质<sup>[6]</sup>, 可求得均值向量各分量的值为

$$m_1 = m_4 = m_7 = h \sum_{i=-l}^l \sum_{j=-2}^l L(i, j) + \frac{h}{2} \sum_{i=-l}^l L(i, 1), \quad (22)$$

$$m_2 = m_5 = m_8 = h \sum_{i=-l}^l \sum_{j=1}^l L(i, j) + \frac{h}{2} \sum_{i=-l}^l L(i, 0), \quad (23)$$

$$m_3 = m_6 = m_9 = h \sum_{i=-l}^l \sum_{j=0}^l L(i, j) + \frac{h}{2} \sum_{i=-l}^l L(i, -1). \quad (24)$$

注意到协方差矩阵  $C$  是对称矩阵, 即  $c_{kg} = c_{gk}$ ,  $C$  中各元素值可求得如下:

$$c_{kk} = \sigma_N^2 \sum_{i=-l}^l \sum_{j=-l}^l [L(i, j)]^2, \quad k = 1, 2, \dots, 9. \quad (25)$$

$$c_{k, k+1} = c_{g, g+3} = \sigma_N^2 \sum_{i=-l}^l \sum_{j=-l+1}^l L(i, j)L(i, j-1), \\ k = 1, 2, 4, 5, 7, 8; \quad g = 1, 2, \dots, 6. \quad (26)$$

$$c_{k, k+2} = c_{g, g+6} = \sigma_N^2 \sum_{i=-l}^l \sum_{j=-l+2}^l L(i, j)L(i, j-2), \\ k = 1, 4, 7; \quad g = 1, 2, 3. \quad (27)$$

$$c_{k, k+4} = c_{g, g+2} = \sigma_N^2 \sum_{i=-l+1}^l \sum_{j=-l+1}^l L(i, j)L(i-1, j-1), \\ k = 1, 2, 4, 5; \quad g = 2, 3, 5, 6. \quad (28)$$

$$c_{k, k+5} = c_{g, g+1} = c_{h, h+7} = \sigma_N^2 \sum_{i=-l+1}^l \sum_{j=-l+2}^l L(i, j)L(i-1, j-2), \\ k = 1, 2, 3, 4; \quad g = 3, 6; \quad h = 1, 2. \quad (29)$$

$$c_{19} = c_{37} = \sigma_N^2 \sum_{i=-l+2}^l \sum_{j=-l+2}^l L(i, j)L(i-2, j-2), \quad (30)$$

对于公式(14)及(15)所表示的在  $y = y_0$  及所有  $x$  上的已知数字边缘, 定义边缘定位概率  $P_d$  等于已知数字边缘位置上被检测到的边缘点数与已知数字边缘位置上实际存在的全部边缘点数之比. 对于给定的阈值  $TH$  和  $TS$ , 按照公式(19)及(20)计算出被检测点的交距  $OH$  和斜率  $\text{tg}\beta$ , 对满足交距  $OH \leq TH$  及斜率  $\text{tg}\beta > TS$  的一组  $\mathbf{z}$  值可求得边缘定位概率为

$$P_d = \int_{\mathbf{z}} p(\mathbf{z}) d\mathbf{z}. \quad (31)$$

若公式(14)中  $h = 0$ , 则公式(15)所表示的为理想无边界的噪声图象. 现定义假边缘检测概率  $P_f$  等于在一定的图象范围内被检测的假边缘点数与理想的无边界图象的总点数之比. 假边缘检测的概率密度函数  $p_f(\mathbf{z})$  是具有零均值、协方差矩阵  $C$  和上述相同的高斯密度函数. 在给定阈值  $TH$  和  $TS$  时, 对满足交距  $OH \leq TH$  及斜率  $\text{tg}\beta > TS$  的一组  $\mathbf{z}$  值可求出假边缘检测概率

$$P_f = \int_{\mathbf{z}} p_f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}. \quad (32)$$

#### 四、实验结果及讨论

图 2 中第一行为由式(32)计算出的  $P_f$  曲线, 第二行及第三行分别是  $\text{SNR} = 4$  及  $25$  时由式(31)计算出的  $P_d$  曲线. 每一个曲线图中有两条曲线, 较细的一条曲线及其下面较粗的一条曲线分别为使用 DLOG 算子及 LOB 算子的检测结果. 从左到右六组曲线图是分别使用  $n=2, 4, 6, 8, 16, 32$  的 LOB 算子及相应的  $\sigma=0.707, 1, 1.22, 1.414, 2, 2.828$  的 DLOG 算子的检测结果. 图中的 TSS 为归一化后的 TS 值, 实际的 TS 值应为

$$TS = \frac{\sigma_N}{2\pi\sigma^4} TSS. \tag{33}$$

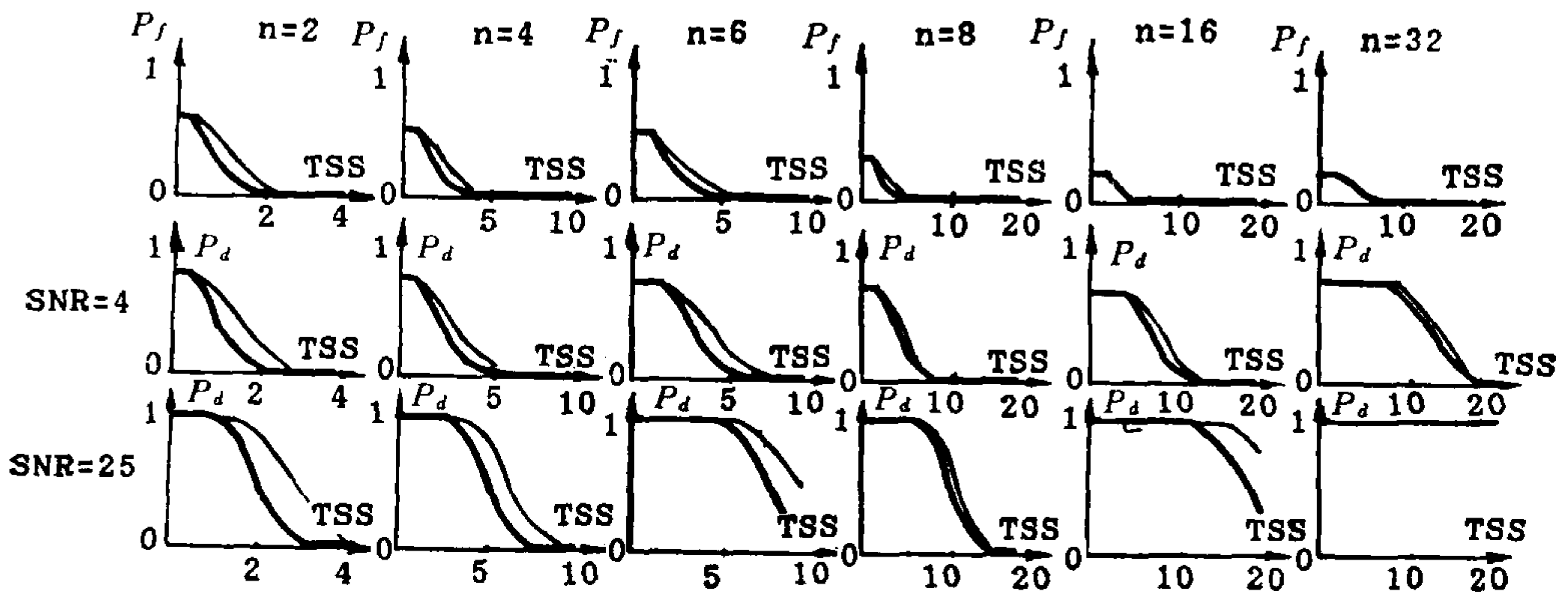


图 2 两种算子的  $P_d$  及  $P_f$  曲线 ( $TH = 0.5$ )

式中  $\sigma_N$  为高斯噪声标准差,  $\sigma$  为 DLOG 的尺度空间常数, 对于 LOB 算子式(33)中的  $\sigma = \sqrt{n}/2$ . 图 3 为利用两种算子对  $SNR = 25$  的独立高斯噪声污染的数字边缘图象的检测结果. 图中第四行为近似最佳的检测结果, 即选择  $TS$  值使检测出的边缘尽可能完整而噪声尽可能少.

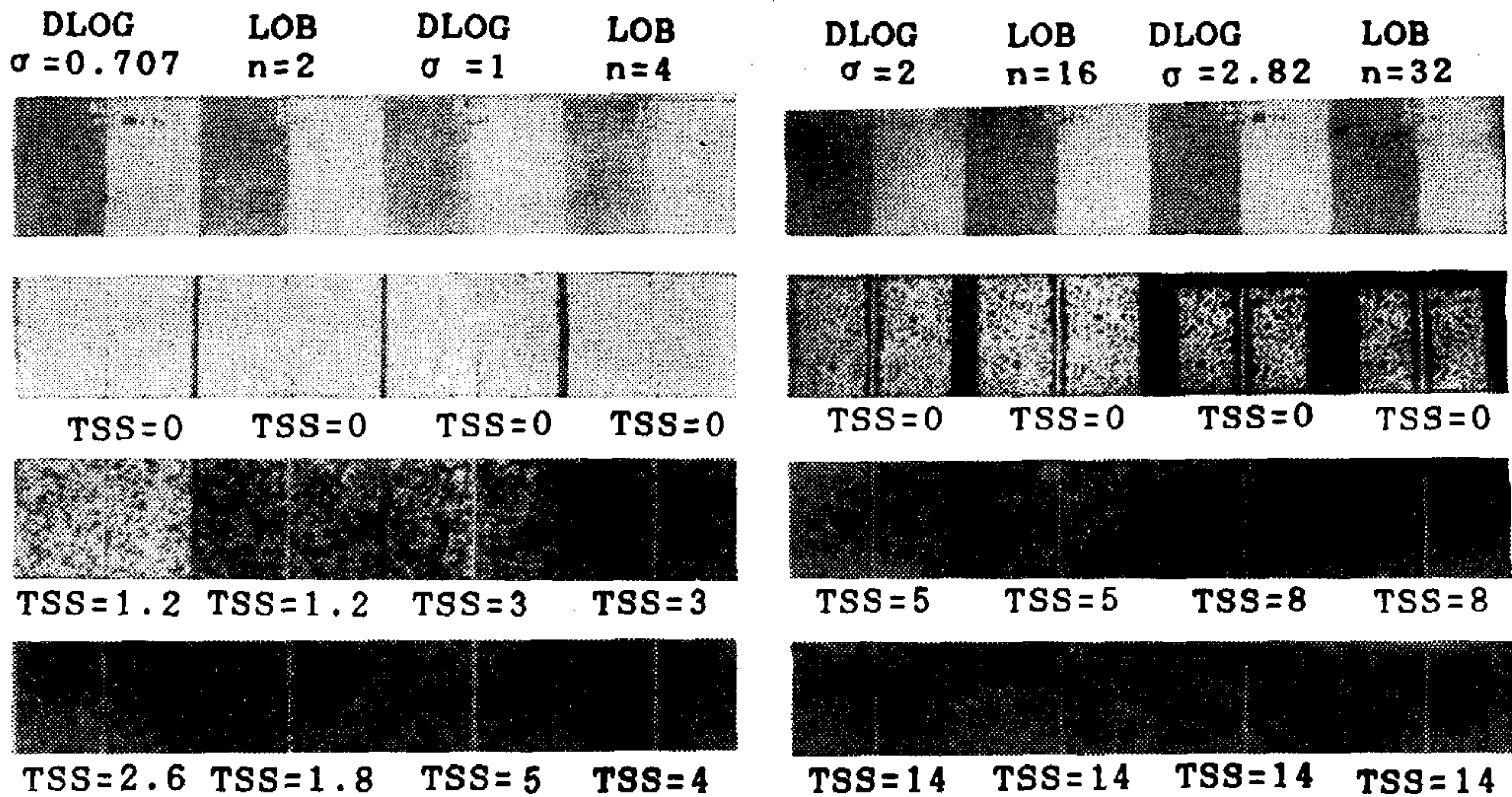


图 3 对  $SNR = 25$  数字边缘图象检测结果 ( $TH = 0.5$ )

由图 2 可知当  $TS$  从零增加时,  $P_d$  曲线有一段近似平坦段, 若  $TS$  选择在平坦段上则能检测出尽可能多的边缘点.  $TS$  的正确选择是应使  $P_d$  值尽可能大,  $P_f$  尽可能小. 图 3 中  $\sigma = 2$  的 DLOG 算子及  $n = 16$  的 LOB 算子的检测结果中当  $TSS$  取 14 时就能把边缘完整地检测出来而噪声被全部消除掉.

若算子的尺度空间常数较小时,  $P_d$  的平坦段很短或几乎没有, 此时选择  $TS$  值应使  $P_d$  尽可能大的情况下使  $P_d/P_f$  也尽可能大. 图 3 中  $\sigma = 0.707$  的 DLOG 算子及  $n = 2$

的 LOB 算子在 TSS 分别取 2.6 及 1.8 时即得到这样的检测结果。

从图 2 还可看出，对于同样大小的算子当图象信噪比 SNR 减小时  $P_d$  曲线的平坦段随之减小，当算子的尺寸增大时， $P_d$  的平坦段随着增大。因此当 SNR 较小时选择尺度空间常数较大的算子仍能得到较好的检测结果。

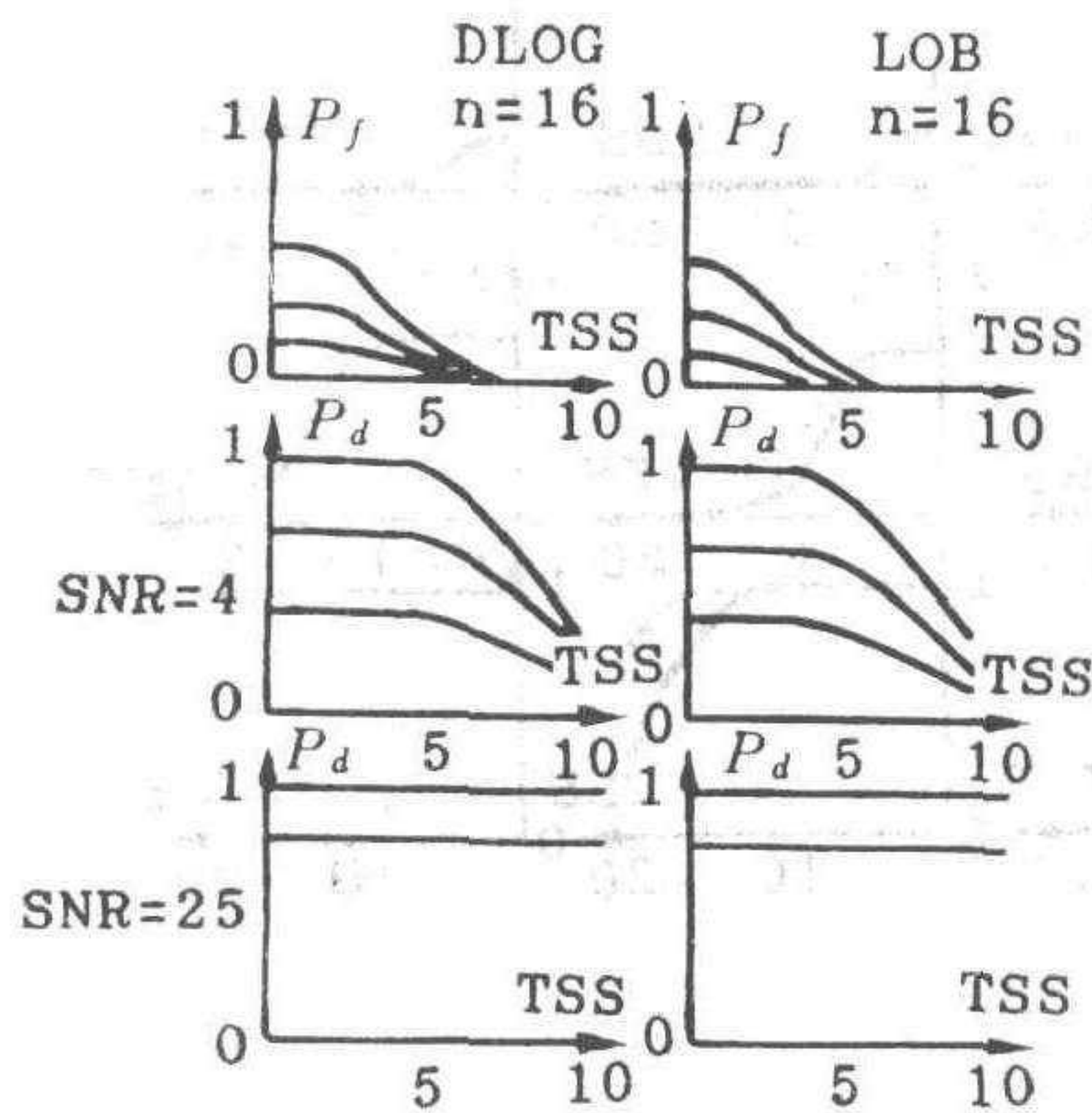


图4  $TH=0.25, 0.5$  及  $1$  时的  $P_d$  及  $P_f$  曲线

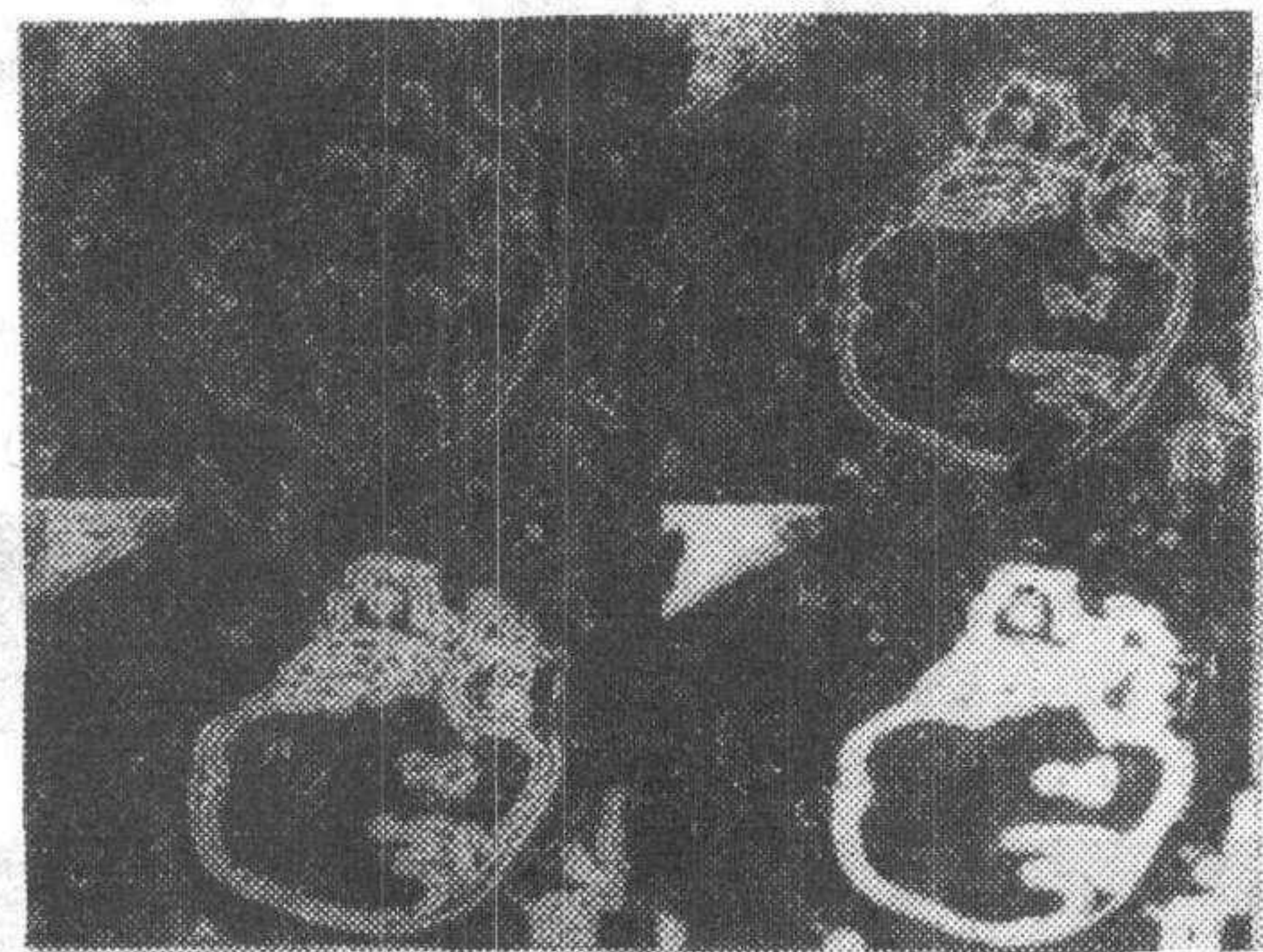
对于一幅实际的图象，图象各部分的对比度是不同的，因而信噪比也不同。为了提取出图象某部分的边缘，必须先估算出这部分的信噪比，从而选择适当的检测阈值  $TS$ 。

图 4 左面一列及右面一列分别为  $\sigma = 2$  的 DLOG 算子及  $n = 16$  的 LOB 算子的  $P_d$  及  $P_f$  曲线。每一个曲线图中从上到下的三条曲线分别是  $TH = 1, 0.5$  及  $0.25$  时的  $P_d$  及  $P_f$  曲线。随着  $TH$  的减小  $P_d$  将明显减小，这意味着  $TH$  太小将使边缘不连续。当图象的 SNR 足够大时（如图 4 中

SNR = 25），对于  $TSS \leq 10$  及  $TH = 0.5$  或  $TH = 1$  时  $P_d$  值近似等于 1。图 5(b) 中左上、右上、左下及右下四幅图象是  $TS = 2$  及  $TH$  分别为  $0.25, 0.5, 1$  及  $5$  时用  $n = 8$  的 LOB 算子对图 5(a) 头象的检测结果。从检测结果可以看出，若所选择的  $TH$  太小（如  $TH \leq 0.25$ ），则实际边缘点将被丢失。若  $TH$  选得太大（如  $TH \geq 1$ ），则边缘变粗且噪声点加大。因此一般情况下， $TH = 0.5$  是有效地检测出边缘的较佳选择。



(a)



(b)

图 5  $TH$  为不同值时对头象的检测结果

无论从  $P_d$  及  $P_f$  曲线，还是从数字边缘图象的边缘检测结果可以看出，LOB 及 DLOG 这两种算子的检测结果是很相似的，当尺度空间常数足够大时两种结果更趋一致。

### 结 论

本文采用独立的高斯噪声所污染的数字边缘图象对边缘检测算子的性能进行定量分析，导出了边缘定位概率及假边缘检测概率。并对 LOB 算子及 DLOG 算子进行了研究。在不同的信噪比、不同的算子尺度空间常数及不同的零交点检测阈值  $TS$  及  $TH$  时

计算出了一组  $P_d$  及  $P_f$  曲线。根据这些曲线可以对于一定信噪比的图象去选择较合理的边缘检测参数,以得到较优的边缘检测效果。

本文的实验结果证实了 LOB 及 DLOG 这两种二阶导数型边缘检测算子都是较优的算子,通过曲线比较可知 LOB 算子可以看成模拟的 LOG 算子的离散实现。

在本文的工作中,王积杰同志做了许多实验工作,在此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Pratt, W. K., Digital Image Processing, New York: Wiley, 1978.
- [ 2 ] Marr, D. and Hildreth, E., Theory of Edge Detection, Proc. Roy. Soc. London, **B207**(1980), 187—217.
- [ 3 ] Hildreth, E., The Detection of Intensity Changes by Computer and Biological Vision Systems. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, **22**(1983), 1—27.
- [ 4 ] Haralick, R. M., Digital Step Edges from Zero Crossing of Second Directional Derivatives, *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell.*, **PAMI-6**(1984), 1, 58—68.
- [ 5 ] Xu, Zhixiang, A Further Study on Error Probabilities of Laplacian-gaussian Edge Detection, Proc. Eighth Int. Conf. on Pattern Recognition, Paris, France, Oct. 1986, 601—603.
- [ 6 ] 吴立德等,概率论,人民教育出版社,1979.

## A STUDY ON EDGE LOCATION ERROR OF SECOND DERIVATIVE EDGE DETECTION OPERATORS

XU ZHIXIANG

(Shanghai University of Science and Technology, 201800)

### Abstract

Two edge detection operators of second derivative model, the discrete Laplacian of Gaussian (DLOG) and Laplacian of binomial distribution (LOB) operators are introduced in this paper. A digital edge contaminated by an independent Gaussian noise is used as an edge image model. After convolving the image model with the edge detection operators of second derivative model, a plane fitting in the least squares sense is used to detect the zero crossing points as edge points. The Probabilities  $P_d$  of edge location and the Probabilities  $P_f$  of false edge detection are derived to compare the performances of various edge detection operators of second derivative model.

**Key words:** Edge detection operator; zero crossing of second derivative; image processing; computer vision.



**许志祥** 上海科技大学副教授,无线电电子学系电视与图象信息教研室主任。1983年至1985年美国匹兹堡大学电气工程系访问学者。IEEE高级会员。现从事图象处理、计算机视觉及电视技术方向的教学和科研工作。发表过论著三本、论文三十篇。