

自适应 Kalman 滤波器及其应用¹⁾

邓自立

李北新

(黑龙江大学应用数学研究所, 哈尔滨 150080)

(东北输油管理局科研设计所)

摘 要

对于带未知噪声统计的单输出系统, 本文提出了一种新的自适应 Kalman 滤波器. 应用现代时间序列分析方法, 基于 ARMA 新息模型的滑动平均 (MA) 参数的在线辨识, 提出了稳态最优 Kalman 滤波器增益估计的一种新算法, 比 Mehra 的算法简单. 同时还提出了辨识滑动平均 (MA) 模型参数的一种新的自适应 Kalman 滤波算法. 此外, 给出了在雷达跟踪系统中的应用, 且仿真结果说明了本文算法的有效性.

关键词: 自适应 Kalman 滤波, 稳态滤波增益估计, ARMA 新息模型, 辨识, 雷达跟踪系统.

一、引 言

考虑单输出系统

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}w(t), \quad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(t) + v(t), \quad (2)$$

其中 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ 为 $n \times 1$ 状态向量, A 是已知的 $n \times n$ 矩阵, 设 A 是非异的. \mathbf{c} 和 \mathbf{h} 是已知的 $n \times 1$ 列向量, T 为转置号. $y(t)$ 是系统的标量输出 (单输出). 模型噪声 $w(t)$ 和观测噪声 $v(t)$ 是零均值、方差分别为 σ_w^2 和 σ_v^2 的独立的白噪声. 假定系统(1)和(2)是完全可观、完全可控的, 或 A 是稳定的, 这引出稳态 Kalman 滤波器存在.

自适应 Kalman 滤波的问题是: 当噪声方差 σ_w^2 和 σ_v^2 未知时, 求渐近最优稳态 Kalman 滤波器 $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$. 这归结为在线估计稳态 Kalman 滤波增益 K_f .

本文应用现代时间序列分析观点和新息分析方法^[1], 提出了单输出系统的一种新的自适应 Kalman 滤波器. 该方法的特点是从状态空间模型(1)和(2)出发引出观测过程的 ARMA 新息模型, 把自适应 Kalman 滤波器的设计归结为对 ARMA 新息模型的 MA 参数的在线估计. 为此, 提出了一种 MA 参数估计的自适应 Kalman 滤波新算法, 并给出了稳态最优 Kalman 滤波增益估计的一种新的递推算法, 它比流行的 Mehra 算法^[2]简单. 文中还给出了在雷达跟踪系统中估计飞行目标位置和速度问题的应用^[3], 同 Friedland^[3] 方法相比, 本文方法的优点是不要噪声统计 σ_w^2 和 σ_v^2 已知, 且不要求解稳态矩阵

本文于 1989 年 2 月 20 日收到.

1) 本课题得到黑龙江省自然科学基金资助.

Riccati 方程。仿真结果说明了本文新算法的有效性。

二、稳态 Kalman 滤波与 ARMA 新息模型

系统(1)和(2)式的稳态最优 Kalman 滤波器为^[1]

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t) = \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + K_f e(t), \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) = A\hat{\mathbf{x}}(t-1|t-1), \quad (4)$$

$$e(t) = y(t) - \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}(t|t-1). \quad (5)$$

相应的稳态 Kalman 预报方程为

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) = A\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + K_p e(t), \quad (6)$$

$$y(t) = \mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) + e(t), \quad (7)$$

其中稳态滤波增益 K_f 与稳态预报增益 K_p 有关系

$$AK_f = K_p. \quad (8)$$

稳态滤波器 (3)–(5) 式可化为如下形式:

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t) = \Phi \hat{\mathbf{x}}(t-1|t-1) + K_f y(t), \quad (9)$$

$$\Phi = (I_n - K_f \mathbf{h}^T)A, \quad (10)$$

其中 I_n 是 $n \times n$ 单位阵。引入单位滞后算子 q^{-1} , $q^{-1}x(t) = x(t-1)$, 则(6)式可改写为

$$(I_n - q^{-1}A)\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) = K_p e(t-1). \quad (11)$$

应用矩阵求逆的 Fadeeva 公式^[1,4]

$$(I_n - q^{-1}A)^{-1} = F(q^{-1})/A(q^{-1}), \quad (12)$$

$$A(q^{-1}) = \det(I_n - q^{-1}A) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n}, \quad (13)$$

$$F(q^{-1}) = \text{adj}(I_n - q^{-1}A) = F_0 + F_1 q^{-1} + \cdots + F_{n-1} q^{-(n-1)}, \quad (14)$$

其中系数 a_i 和系数阵 F_i 可递推计算为

$$a_k = -\frac{1}{k} \text{tr}(AF_{k-1}), \quad k = 1, 2, \cdots, n, \quad (15)$$

$$F_k = AF_{k-1} + a_k I_n, \quad F_0 = I_n, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1, \quad (16)$$

其中 tr 为矩阵的迹。为简单计, 这里假定(12)式中分子与分母无公因式, 即矩阵 A 的特征多项式等于其最小多项式。注意, 由 A 为非异的假定引出 $a_n = (-1)^n \det A \neq 0$ 。由(12)式有恒等式

$$A(q^{-1})I_n = F(q^{-1})(I_n - q^{-1}A) = (I_n - q^{-1}A)F(q^{-1}). \quad (17)$$

对(11)式两边左乘以 $F(q^{-1})$, 并利用(17)式有

$$A(q^{-1})\hat{\mathbf{x}}(t|t-1) = F(q^{-1})K_p e(t-1). \quad (18)$$

再将(18)式两边左乘以 \mathbf{h}^T , 有

$$A(q^{-1})\mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) = \mathbf{h}^T F(q^{-1})K_p e(t-1). \quad (19)$$

由(7)式有 $\mathbf{h}^T \hat{\mathbf{x}}(t|t-1) = y(t) - e(t)$, 代入(19)式有

$$A(q^{-1})y(t) = \mathbf{h}^T F(q^{-1})K_p e(t-1) + A(q^{-1})e(t). \quad (20)$$

将(20)式右边合并有稳态 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(t) = D(q^{-1})e(t), \quad (21)$$

其中 $e(t)$ 是由(5)式定义的稳态 Kalman 滤波的新息过程,它是带零均值的白噪声^[1],且

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + \cdots + d_nq^{-n}, \quad (22)$$

$$d_i = \mathbf{h}^T F_{i-1} K_p + a_i. \quad (23)$$

由(23)式引出稳态预报增益 K_p 为

$$K_p = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T \\ \mathbf{h}^T F_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}^T F_{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 - a_1 \\ d_2 - a_2 \\ \vdots \\ d_n - a_n \end{bmatrix}. \quad (24)$$

因而由(8)式有稳态滤波增益为

$$K_f = G(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{a}), \quad (25)$$

其中

$$G = A^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h}^T \\ \mathbf{h}^T F_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}^T F_{n-1} \end{bmatrix}^{-1}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \quad (26)$$

式中 G 和 \mathbf{a} 可由已知的 A 和 \mathbf{h} 来计算,但 $\boldsymbol{\theta}$ 是未知的. 这样,求稳态滤波增益 K_f 归结为求 ARMA 新息模型(21)式中的 MA 参数向量 $\boldsymbol{\theta}$.

现在讨论 MA 参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的可辨识性. 因为 $e(t)$ 是稳态 Kalman 滤波器的新息过程,这引出 $D(q^{-1})$ 是稳定的,即 $D(x)$ 的零点在单位圆外. 使(21)式的 $D(x)$ 的零点在单位圆外的 $\boldsymbol{\theta}$ 是唯一的^[5],因而 $\boldsymbol{\theta}$ 是可辨识的,即 $D(q^{-1})$ 是可辨识的.事实上,在初始时刻 $t_0 = 0$ 取稳态滤波器(9)式的两个不同初值 $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(0|0)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}^{(2)}(0|0)$,由 Kalman 滤波稳定性^[6,7],当 $t \rightarrow \infty$ 时,有 $[\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t|t) - \hat{\mathbf{x}}^{(2)}(t|t)] \rightarrow 0$,因而由(4)式有当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$[\hat{\mathbf{x}}^{(1)}(t|t-1) - \hat{\mathbf{x}}^{(2)}(t|t-1)] \rightarrow 0.$$

于是,由(5)式稳态滤波器的相应的新息过程 $e^{(1)}(t)$ 和 $e^{(2)}(t)$ 有

$$[e^{(1)}(t) - e^{(2)}(t)] \rightarrow 0. \quad (27)$$

因为稳态 Kalman 滤波器的新息过程 $e^{(1)}(t)$ 和 $e^{(2)}(t)$ 均满足 ARMA 新息模型(21)式,于是有差分方程

$$D(q^{-1})[e^{(1)}(t) - e^{(2)}(t)] = 0. \quad (28)$$

由齐次差分方程(28)式的解的解析表达式知^[5], (27)式引出多项式 $D(q^{-1})$ 是稳定的.

三、MA 新息模型辨识的自适应滤波算法

在(21)式中, $A(q^{-1})$ 是已知的,其中系数 a_i 可通过(15)式计算. 因此置辅助输出

$$z(t) = A(q^{-1})y(t), \quad (29)$$

则 ARMA 新息模型(21)式化为 MA 新息模型

$$z(t) = D(q^{-1})e(t). \quad (30)$$

它的未知 MA 参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 有动态方程

$$\boldsymbol{\theta}(t+1) = \boldsymbol{\theta}(t). \quad (31)$$

把(30)式看成 $\boldsymbol{\theta}(t)$ 的观测方程

$$z(t) = \phi^T(t)\theta(t) + e(t), \quad (32)$$

其中 $\phi^T(t) = (e(t-1), \dots, e(t-n))$ 。但由于白噪声 $e(t-i)$ 的值是未知的, 因此可用其估值 $\hat{e}(t-i)$ 近似代替它, 并将观测模型误差补偿到观测噪声 $e(t)$ 中去。为此, 引入虚拟噪声 $e^*(t)$ 为

$$e^*(t) = e(t) + \text{观测模型误差项}. \quad (33)$$

则观测方程(32)式化为伪观测方程

$$z(t) = \hat{\phi}^T(t)\theta(t) + e^*(t), \quad (34)$$

其中 $\hat{\phi}^T(t) = (\hat{e}(t-1), \dots, \hat{e}(t-n))$ 。虽然稳态新息 $e(t)$ 是零均值白噪声, 但虚拟噪声 $e^*(t)$ 由(33)式显然带有未知时变均值 $r(t)$ 和未知时变方差 $\sigma^2(t)$, 用以补偿观测模型误差, 且可近似视 $e^*(t)$ 为白噪声。

对系统(31)和(34)式, 应用作者提出的带未知时变噪声统计系统自适应 Kalman 滤波有^[1]

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K_{\theta}(t+1)\varepsilon(t+1), \quad (35)$$

$$\varepsilon(t+1) = z(t+1) - \hat{\phi}^T(t+1)\hat{\theta}(t) - \hat{f}(t), \quad (36)$$

$$K_{\theta}(t+1) = P(t)\hat{\phi}(t+1)/(\hat{\phi}^T(t+1)P(t)\hat{\phi}(t+1) + \hat{\sigma}^2(t)), \quad (37)$$

$$P(t+1) = [I_n - K_{\theta}(t+1)\hat{\phi}^T(t+1)]P(t), \quad (38)$$

其中 $\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t|t)$ 是在时刻 t 时 θ 的滤波估值, 且噪声统计自适应估值器为^[1]

$$\hat{f}(t+1) = (1 - b_t)\hat{f}(t) + b_t[z(t+1) - \hat{\phi}^T(t+1)\hat{\theta}(t)], \quad (39)$$

$$\hat{\sigma}^2(t+1) = (1 - b_t)\hat{\sigma}^2(t) + b_t[(I_n - \hat{\phi}^T(t+1)K_{\theta}(t+1))\varepsilon(t+1)\varepsilon^T(t+1) +$$

$$(I_n - \hat{\phi}^T(t+1)K_{\theta}(t+1))^T + \hat{\phi}^T(t+1)P(t+1)\hat{\phi}(t+1)], \quad (40)$$

其中 $b_t = (1 - b)/(1 - b^{t+1})$, $0 < b < 1$, b 叫遗忘因子, 初值为

$$\hat{\theta}(0) = \theta_0, P(0) = P_0; \hat{f}(0) = r_0, \hat{\sigma}^2(0) = \sigma_0^2. \quad (41)$$

由(33)式有 $e(t)$ 的估值 $\hat{e}(t)$, 可按式计算:

$$\hat{e}(t) = z(t) - \hat{\phi}^T(t)\hat{\theta}(t). \quad (42)$$

Panuska 给出了另一种自适应 Kalman 滤波算法辨识 ARMA 模型参数^[8]。由于 $D(q^{-1})$ 的稳定性要求, 应用上述算法(35)~(42)式应保证参数估值 $\hat{\theta}(t)$ 使 $\hat{D}(q^{-1})$ 是稳定的。这一条件也被 Panuska 算法所要求。

四、自适应 Kalman 滤波器

在(25)式中代入 MA 参数估值 $\hat{\theta}(t)$, 可得到在时刻 t 的稳态滤波增益估计

$$\hat{K}_f(t) = G(\hat{\theta}(t) - a). \quad (43)$$

由 θ 的递推估值算法(35)~(42), 有 $\hat{K}_f(t)$ 的递推算法

$$\hat{K}_f(t+1) = \hat{K}_f(t) + G(\hat{\theta}(t+1) - \hat{\theta}(t)). \quad (44)$$

于是由(9)式有自适应 Kalman 滤波器为

$$\hat{x}(t|t) = \hat{\Phi}(t)\hat{x}(t-1|t-1) + \hat{K}_f(t)y(t), \quad (45)$$

其中由(10)式有

$$\hat{\Phi}(t) = (I_n - \hat{K}_f(t)h^T)A. \quad (46)$$

假如当 $t \rightarrow \infty$ 时, MA 参数估计是一致的, 即 $\hat{\theta}(t) \rightarrow \theta$, 则由(25)和(43)式有

$\hat{K}_f(t) \rightarrow K_f$, 从而自适应滤波器(45)式将渐近于稳态最优 Kalman 滤波器(9)式。

五、应用于自适应雷达跟踪系统

考虑雷达跟踪系统^[2]

$$x(t+1) = x(t) + v(t) \cdot T + \frac{1}{2} a(t) \cdot T^2, \quad (47)$$

$$v(t+1) = v(t) + a(t) \cdot T, \quad y(t) = x(t) + \xi(t), \quad (48), (49)$$

其中 T 为采样周期, $x(t)$, $v(t)$ 和 $a(t)$ 分别为在时刻 tT 飞行目标的位置、速度和加速度. $y(t)$ 是位置的观测信号, $\xi(t)$ 是观测噪声, $a(t)$ 和 $\xi(t)$ 是零均值、方差各为 σ_a^2 和 σ_ξ^2 的正态白噪声。

假设方差 σ_a^2 和 σ_ξ^2 未知, 问题是求飞行目标位置和速度的自适应 Kalman 滤波器。

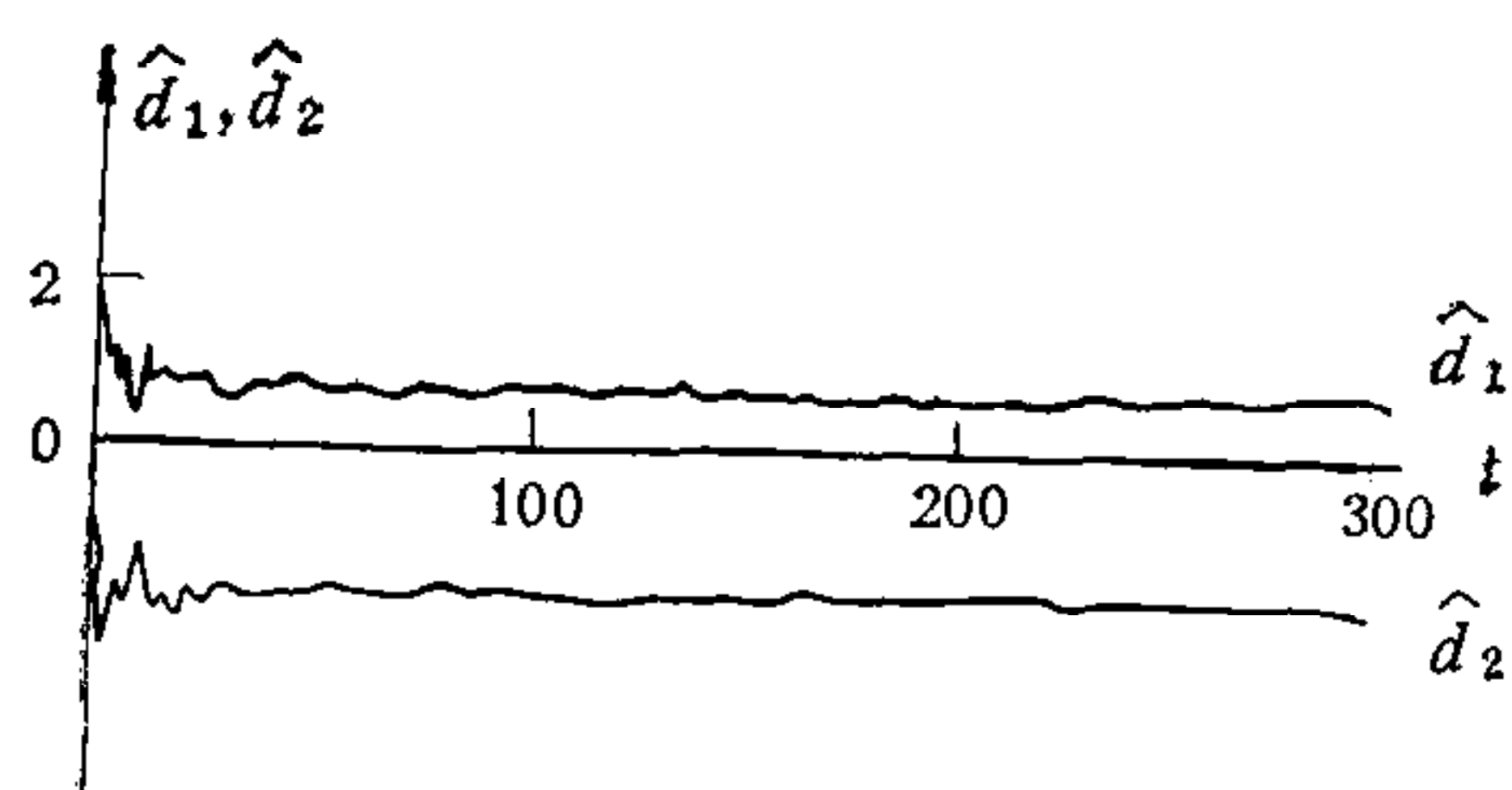


图1 MA 参数 d_1, d_2 的辨识

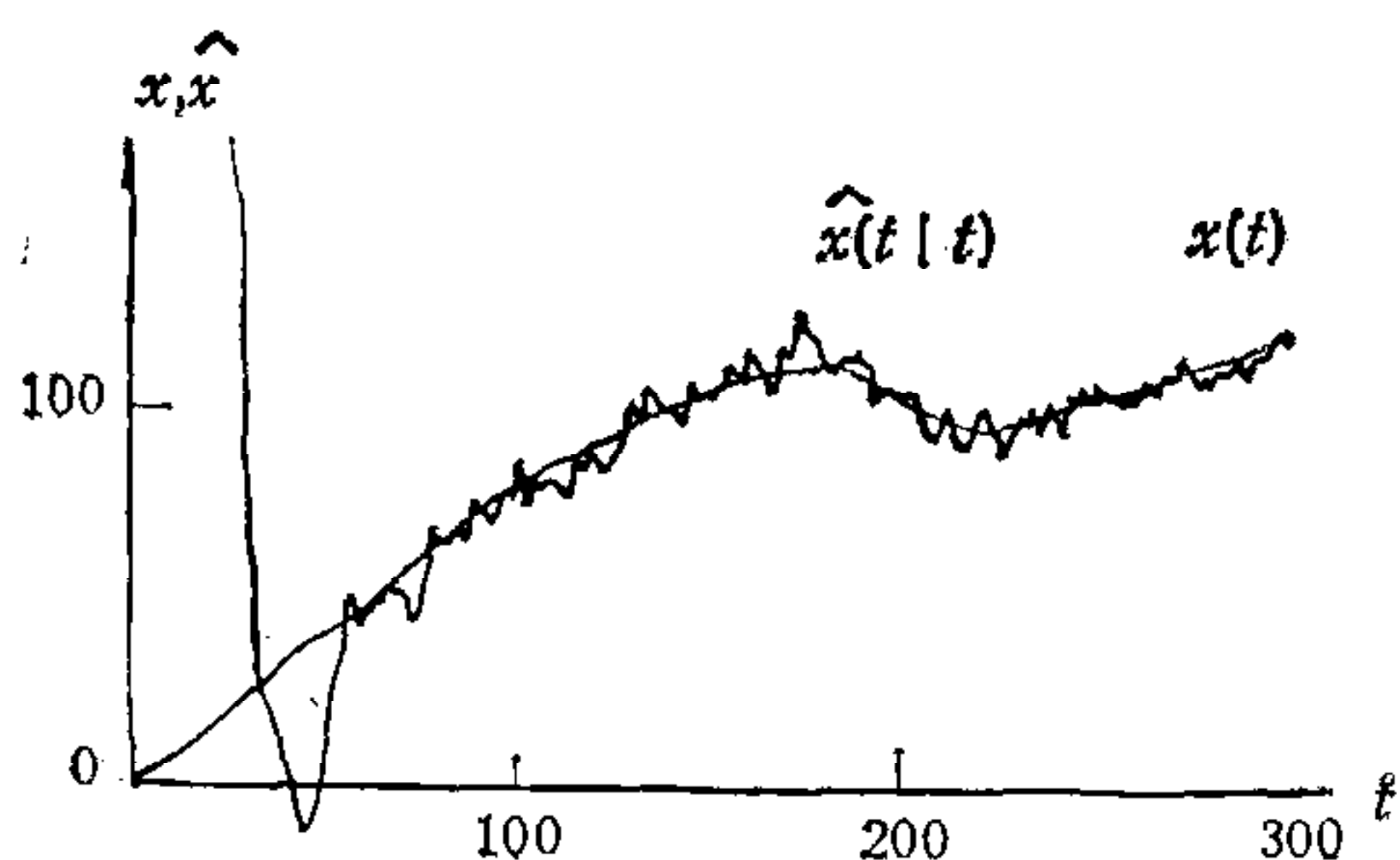


图2 位置 $x(t)$ 及其自适应 Kalman 滤波 $\hat{x}(t|t)$

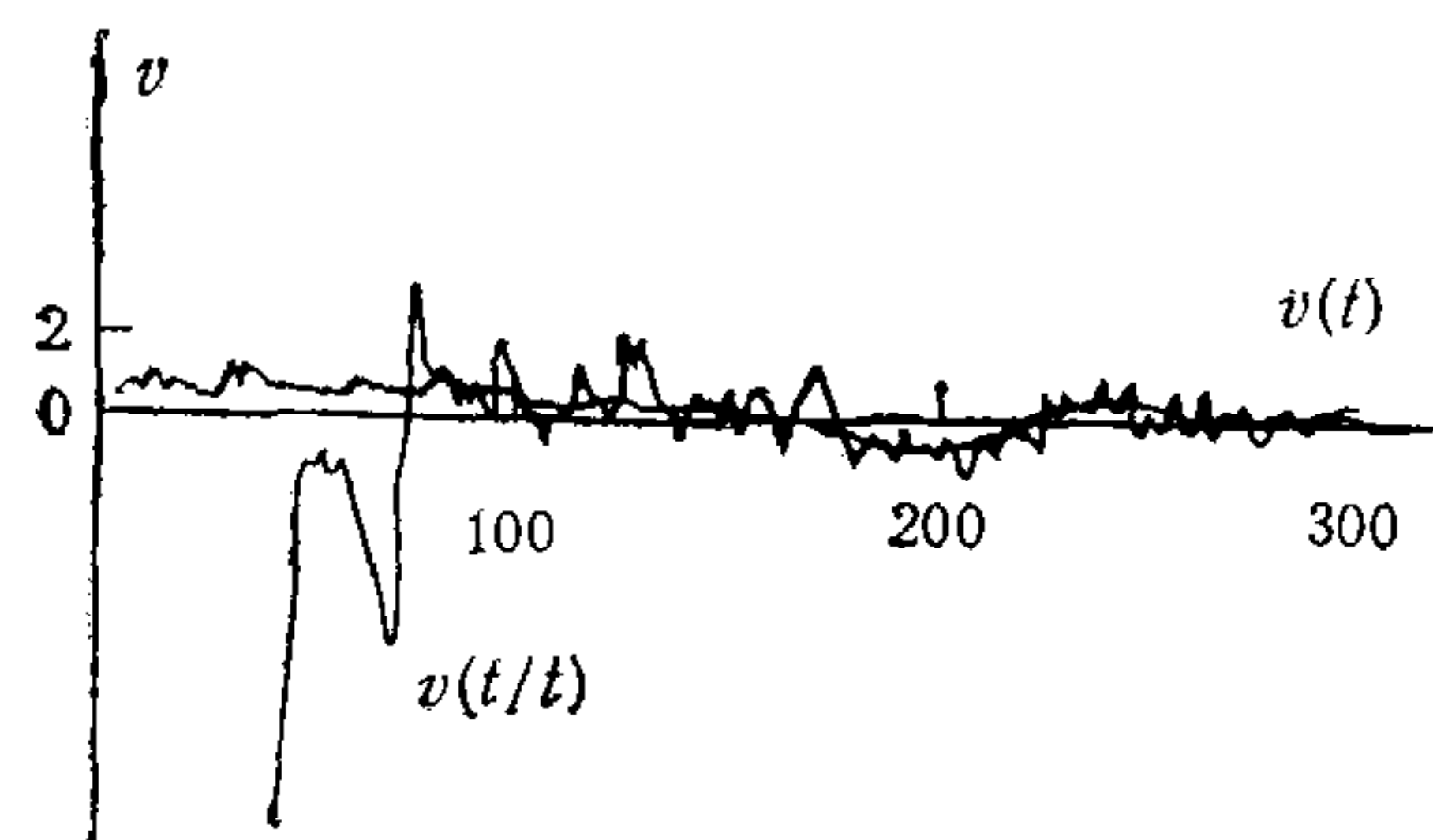


图3 速度 $v(t)$ 及其自适应 Kalman 滤波 $\hat{v}(t|t)$

引入状态变量 $\mathbf{x}(t) = (x(t), v(t))^T$, 则

系统(47)–(49)式的状态空间模型为

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}a(t), \quad (50)$$

$$y(t) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(t) + \xi(t). \quad (51)$$

易知它是完全可观、完全可控的, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^T = (1, 0). \quad (52)$$

显然 A 是非异的. 易知新息模型 (21) 式化为

$$(1 - q^{-1})^2 y(t) = (1 + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2}) e(t). \quad (53)$$

在仿真中, 取 $T=1$, $a(t)$ 是正态 $N(0, 0.1)$ 的白噪声, $\xi(t)$ 是正态 $N(0, 8)$ 的白噪声. 应用本文提出的自适应滤波算法(35)–(42)式估计 MA 参数 d_1 和 d_2 , 取初值为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = (0.1, 0)^T$, $P(0) = 10^3 I_2$, $\hat{r}(0) = 0.001$, $\hat{\sigma}^2(0) = 2$, 遗忘因子 $b = 0.985$, 递推 $t = 300$ 次, 仿真结果如图 1 所示, 相应的位置和速度的自适应 Kalman 滤波估值及它们的真实值如图 2 和图 3 所示. 由此可看到自适应 Kalman 滤波器具有良好的跟踪性能。

参 考 文 献

[1] 邓自立、郭一新, 现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制, 知识出版社, 1989.

- [2] Mehra, R. K., On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-15** (1970), 175—184.
- [3] Friedland, D., Optimum Steady-state Position and Velocity Estimation Using Noisy Sampled Position Data, *IEEE Trans. Aerospace Electr. Syst.*, **AES-9** (1973), 906—911.
- [4] 须田信英等, 自动控制中的矩阵理论, 科学出版社, 1979.
- [5] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M., *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, 1976.
- [6] 中国科学院数学研究所概率组编著, 离散时间系统滤波的数学方法, 国防工业出版社, 1975.
- [7] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, Inc., 1979.
- [8] Panuska, V., A New Form of the Extended Kalman Filter for Parameter Estimation in Linear Systems with Correlated Noise, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-25** (1980), 229—235.

AN ADAPTIVE KALMAN FILTER AND ITS APPLICATION

DENG ZILI

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, 150080)

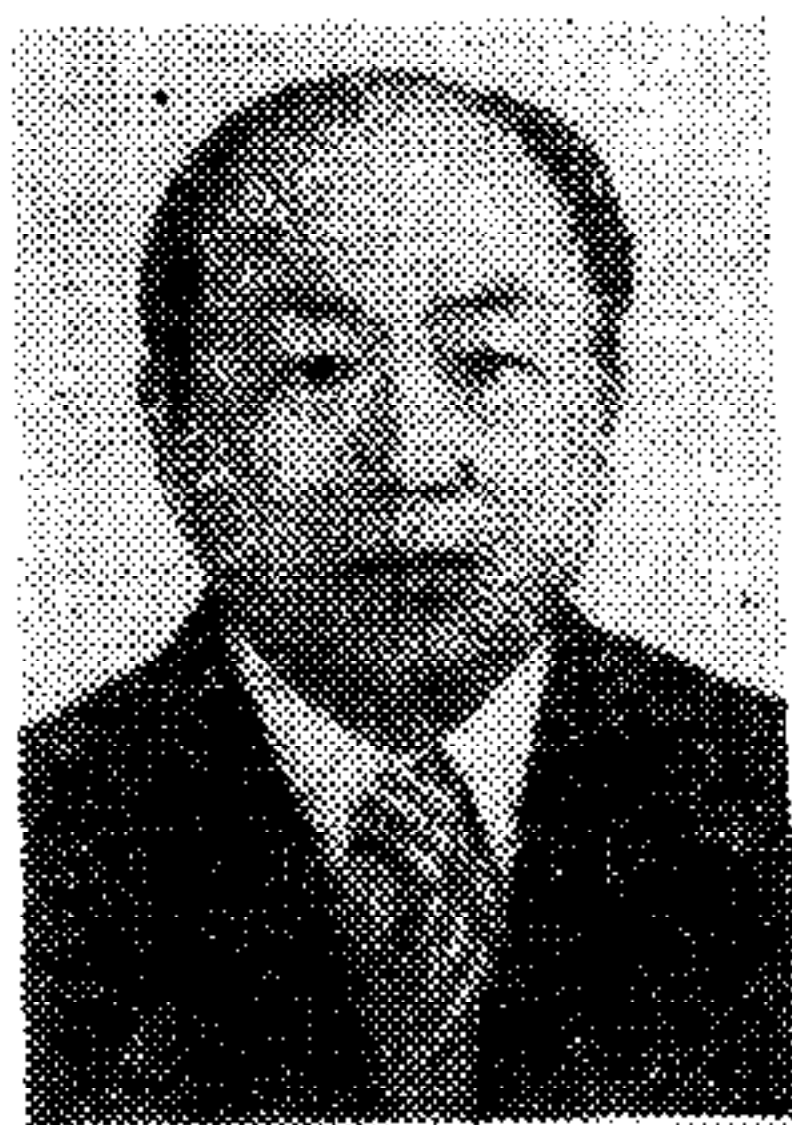
LI BEIXIN

(Institute of Science Research and Design, Northeast Management Centre of Carrying Crude Oil)

ABSTRACT

A new adaptive Kalman filter is presented for the single output system with unknown noise statistics. By a time series analysis, a new and simpler estimation algorithm for the gain of the steady-state optimal Kalman filter is given. A new adaptive Kalman filtering algorithm is also given for identifying the parameters of moving average (MA) model. An application to a radar tracking system is given to show the usefulness of the proposed new algorithms.

Key words: Adaptive Kalman filtering; steady-state Kalman filter gain estimation; AR-MA innovation model; identification; radar tracking system.



邓自立 1938 年生于哈尔滨。1962 年毕业于黑龙江大学数学系。现任黑龙江大学应用数学研究所教授。长期从事控制理论的教学和科研工作。主要学术方向为现代时间序列分析和状态估计理论。出版了两部专著, 曾获省级、国家级科技进步奖, 发表论文 90 余篇。



李北新 1962 年生于哈尔滨。1984 年毕业于沈阳大学自控系, 1989 年毕业于黑龙江大学应用数学研究所, 获工学硕士学位。现在东北输油管理局科研所工作。近年来主要从事自适应、自校正卡尔曼滤波及其对输油管道泄漏诊断问题的应用研究。