第18卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 18, No. 4
1992 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1992

短 文

不确定非线性系统的变结构鲁棒控制

谢 利 理
(西北工业大学 365 研究所,西安 710072)

摘　　要

本文利用几何方法研究了一类非线性系统的变结构控制问题，提出了具有不确定模态非线性系统的滑动模态控制器设计方法,并用简单算例说明了该设计方法的可行性.

关键词: 非线性系统,不确定性,变结构控制,滑动模态.

一、引　言

在非线性控制系统研究领域中,目前应用较多的还是微分几何方法,而反馈线性化作为一种最直观的方法,在某种程度上可以简化系统的控制设计问题,对于非线性系统变结构控制,同样也可以从反馈线性化出发进行研究. 文献[1]仅仅研究了确定性非线性系统的变结构控制问题,而文献[2]则在此基础上分析了不确定参数对滑动模态的影响，但没给出不确定模态存在情况下的变结构控制算法. 文献[3]在输入输出反馈线性化基础上，利用李雅普诺夫函数法研究了不确定非线性系统的鲁棒控制问题，给出了类似于变结构控制结构的控制算法,但这种算法不一定使系统存在滑动模态.

本文在上述研究成果基础上,考虑到系统中的不确定因素,给出一种新型的变结构鲁棒控制算法.

二、非线性最小相位系统

考虑多变量非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u, \\ y_i &= h_i(x), i = 1,2,\cdots,m, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x \in R^n$; $u \in R^m$; $y_i \in R, i = 1,2,\cdots,m$; $f(x)$, $G(x)$ 分别为 R^n 上 C^∞ 向量场和矩阵; $h_i(x), i = 1,2,\cdots,m$ 均为 R^n 上 C^∞ 函数;且 $f(0) = 0$, $h(0) = 0$.

定义 1. 对于非线性系统 (1)，如果在 x_0 点邻域 U 内存在一组正整数 $\rho_i(0 \leqslant \rho_i < \infty) i = 1,2,\cdots,m$ 使得对所有 $x \in U$ 有

本文于 1990 年 4 月 9 日收到.

$$L_G L_f^k h_i(x) = 0,\ \ k < \rho_i - 1,$$
$$L_G L_f^{\rho_i - 1} h_i(x) \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, m, \tag{2}$$

则称正整数 ρ_i 为输出 y_i 对应的特征数。

如果 $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_m = \rho \leqslant n$，那么由文献[4]可知一定存在 $n - \rho$ 个函数 $\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{n-\rho}$，使得 $h_1, L_f h_1, \cdots, L_f^{\rho_1 - 1} h_1, \cdots, h_m, L_f h_m, \cdots, L_f^{\rho_m - 1} h_m, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-\rho}$ 构成一个局部微分同坯

$$(\xi, \eta) = \Phi(x), \tag{3}$$

其中 $\xi = (\xi_1^T \xi_2^T \cdots \xi_m^T)^T$，$\xi_i = (h_i L_f h_i \cdots L_f^{\rho_i - 1} h_i)^T$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$，$\eta = (\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{n-\rho})^T$，并且在微分同坯(3)作用下，系统(1)变成

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{ik} = \xi_{i,k+1}, \\ \dot{\xi}_{i\rho_i} = L_f h_i[\Phi^{-1}(\xi, \eta)] + L_G L_f^{\rho_i - 1} h_i[\Phi^{-1}(\xi, \eta)]u, \\ \dot{\eta} = q(\xi, \eta), \\ y_i = \xi_{i1}. \end{cases} \tag{4}$$

定义 2. 子集 $L = \{(\xi, \eta) \in R^n, \xi = 0\}$ 上的动力学系统

$$\dot{\eta} = q(0, \eta), \tag{5}$$

称为系统(1)的零动力学。

定义 3. 如果系统(1)的零动力学(5)为渐近稳定，则系统 (1) 为非线性最小相位系统。

三、不确定非线性系统变结构控制

考虑不确定非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + [G(x) + \Delta G(x)]u, \tag{6}$$
$$y_i = h_i(x),\ \ i = 1, 2, \cdots, m,$$

其中 $\Delta f(x), \Delta G(x)$ 分别为系统及输入的不确定模态。

假设 1. 系统(6)的标称系统(1)为最小相位系统，其输出特征数为 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$，且 $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_m = \rho \leqslant n$，特征矩阵

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{\rho_1 - 1} h_1 \cdots L_{g_m} L_f^{\rho_1 - 1} h_1 \\ \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \\ L_{g_1} L_f^{\rho_m - 1} h_m \cdots L_{g_m} L_f^{\rho_m - 1} h_m \end{bmatrix} \tag{7}$$

非奇异。

假设 2. 对不确定模态 $\Delta f(x), \Delta G(x)$，存在函数向量 $\Delta f^*(x)$ 及函数矩阵$\Delta G^*(x)$，使得

$$\Delta f(x) = G(x) \cdot \Delta f^*(x),$$
$$\Delta G(x) = G(x) \cdot \Delta G^*(x). \tag{8}$$

在假设 1—3 条件下，系统(6)经微分同坯(3)及反馈控制

$$u(x) = -\beta^{-1}(x)[\alpha(x) - v], \tag{9}$$

可变换成

$$
\begin{aligned}
&\dot{\xi}_{ik} = \xi_{i,k+1}, k = 1,2,\cdots,\rho_i - 1, \\
&\dot{\xi}_{\rho} = v + \delta_1(\xi,\eta) + \delta_2(\xi,\eta)v, \\
&\dot{\eta} = q(\xi,\eta), \\
&y_i = \xi_{i1}, i = 1,2,\cdots,m,
\end{aligned} \tag{10}
$$

其中 $\alpha(x) = (L_f^{\rho_1}h_1, L_f^{\rho_2}h_2, \cdots, L_f^{\rho_m}h_m)^T$， $\xi_\rho = (\xi_{1\rho_1}\xi_{2\rho_2}\cdots\xi_{m\rho_m})^T$，

$$\delta_1(\xi,\eta) = \beta(x)\Delta f^*(x) + \beta(x)\Delta G^*(x)\beta^{-1}(x)\alpha(x)\,|_{x=\Phi^{-1}(\xi,\eta)},$$

$$\delta_2(\xi,\eta) = \beta(x)\Delta G^*(x)\beta^{-1}(x)\,|_{x=\Phi^{-1}(\xi,\eta)}.$$

假设 3. 对所有 $(\xi,\eta)\in\Phi(R^n)$，δ_1,δ_2 有界，并记

$$\varepsilon_1 = \sup_{(\xi,\eta)\in\Phi(R^n)} \|\delta_1(\xi,\eta)\|, \tag{11}$$

$$\varepsilon_2 = \sup_{(\xi,\eta)\in\Phi(R^n)} \|\delta_2(\xi,\eta)\|. \tag{12}$$

为了实现系统输出调节问题，选取如下滑动超平面

$$s(\xi) = (s_1(\xi_1)s_2(\xi_2)\cdots s_m(\xi_m))^T = 0, \tag{13}$$

其中 $s_i(\xi_i) = c_i\xi_i = \xi_{i\rho_i} + c_{i,\rho_i-1}\xi_{i\rho_i-1} + \cdots + c_{i1}\xi_{i1}$，$c_i = (c_{i1}c_{i2}\cdots c_{i,\rho_i-1}1)$ 为下面 Hurwitz 多项式系数.

$$\lambda^{\rho_i-1} + c_{i\rho_i-1}\lambda^{\rho_i-1} + \cdots + c_{i2}\lambda + c_{i1}, i = 1,2,\cdots,m.$$

定理 1. 对于非线性系统(6)，如果假设 1—3 条件成立，并且 $\varepsilon_2 < 1$，控制规律由下式给出

$$v = -k_1 s - k_2 \mathrm{sgn}(s) - C\xi, \tag{14}$$

其中 $\mathrm{sgn}(s) = (\mathrm{sgn}(s_1)\mathrm{sgn}(s_2)\cdots\mathrm{sgn}(s_m))^T$， $C = \mathrm{diag}(c_1c_2\cdots c_m)$，那么一定存在正常数 k_1^*, k_2^*，使得对所有 $k_1 > k_1^*$，$k_2 > k_2^*$，系统存在渐近稳定的滑动模态运动，并且各通道的输出 $y_i \to 0 (t\to\infty)$.

四、算例与仿真

考虑如下二阶时变参数系统

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2, \\
\dot{x}_2 = [1 + a(t)]\sin x_2 + [1 + b(t)]u,
\end{cases}
$$

$$y = x_1,$$

其中参数 $a(t), b(t)$ 时变有界，并且 $|a(t)| < 0.3, |b(t)| < 0.2$.

根据前面内容，如果取切换函数 $s(x) = cx_1 + x_2, c > 0$，则控制规律最终为

$$u = -\sin x_2 - k_1 s - k_2 \mathrm{sgn}(s) - cx_2,$$

$$k_1 > \frac{c\varepsilon_2 + \left(c^2\varepsilon_2 + \dfrac{1}{2c}\right)^2}{1 - \varepsilon_2}, \quad k_2 > \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_2}.$$

如果取 $c = 2$，则 $k_1 > 1.88$，$k_2 > 0.625$，仿真结果如图 1—2 所示.

由仿真结果可看出，当系统存在不确定模态时，采用变结构鲁棒控制规律，系统具有

较强的鲁棒性。

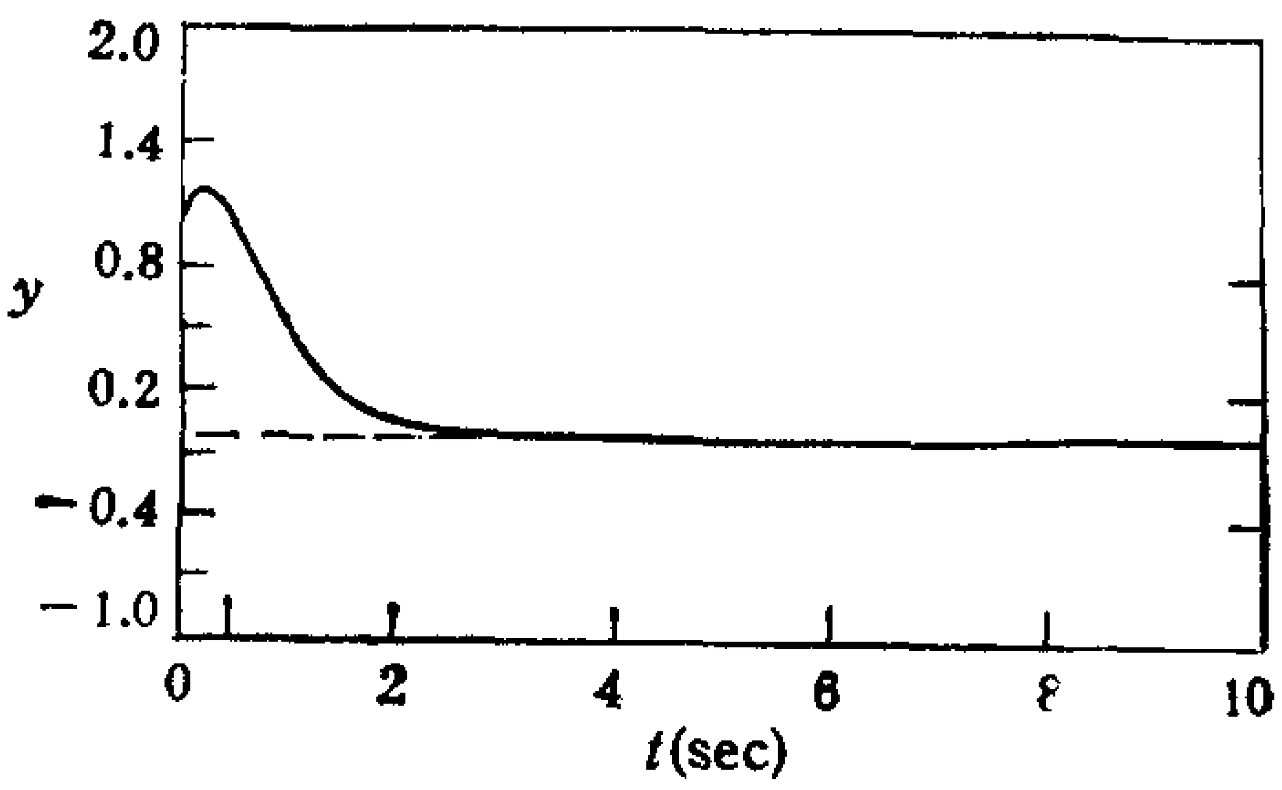

图 1　系统输出轨线

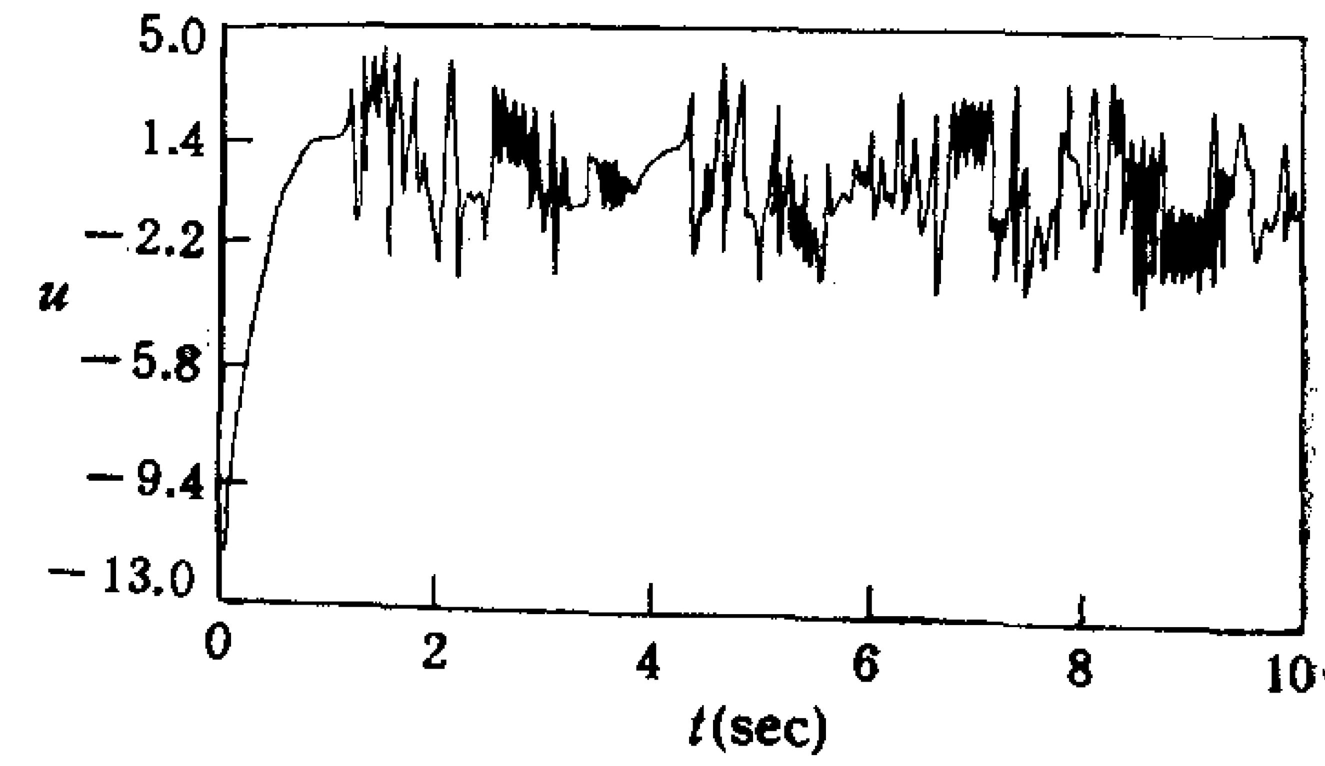

图 2　控制规律曲线

五、结 束 语

本文讨论了不确定非线性系统的变结构控制问题，提出了具有滑动模态的变结构鲁棒控制算法，该算法有效地解决了一类不确定非线性系统的输出调节问题，利用本文设计方法所得到的控制器，对具有未确定模态的非线性系统有较强的鲁棒性。

参 考 文 献

[1] Fernandez, B. R. and Hedrick, J. K., Control of Multivariable Nonlinear Systems by the Sliding Mode Method, *Int. J. Control*, **46**(1987), 1019—1040.

[2] Li, D. and Slotine, J. —J. E., On Sliding Control for Multi-input Multioutput Nonlinear Systems, Proc. of the American Control Conference, (1987), 270—279.

[3] Kravaris, G. and Palanki, S., A Lyapunov Approach for Robust Nonlinear State Feedback Synthesis, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **33**(1988), 1188—1191.

[4] Isidori, A., Nonlinear Control Systems, An Introduction, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 71, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg; Tokyo, (1985).

VARIABLE STRUCTURE ROBUST CONTROL FOR A CLASS OF UNCERTAIN NONLINEAR SYSTEMS

Xie Lili

(365 *Institute of Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072)

Abstract

The problem of variable structure control for a class of nonlinear systems is studied with a geometrical approach in this paper. A design method of sliding mode controller is proposed for uncertain nonlinear systems, and an illustrative example is given to show that the scheme is effective.

Key words: Nonlinear system; uncertainty; variable structure control; sliding mode.