第18卷 第4期
1992年7月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 18, No. 4
July, 1992

短 文

# 改进的广义预测控制的稳定性分析

金元郁
(抚顺石油学院自动化所 113001)

**摘 要**

本文在广义预测控制(GPC)算法[1,2]的基础上提出了改进算法. 并对改进的算法[4]进行了稳定性分析,得到了简练的特征多项式,然后进一步证明其特征多项式中的参数可以直接用预测模型、被控对象模型和控制参数代替,不必另行计算. 其结论仍适用于原有的 GPC 算法[1,2,5]的稳定性分析.

**关键词:** 广义预测控制,稳定性,任意维输入任意维输出(ADIADO)系统.

## 一、前 言

GPC 算法建立在远程 (Long-range) 预测的基础上, 其结果是预测点多, 算法复杂,增加了稳定性分析的难度. 席裕庚老师利用内模原理分析了 SISO 系统 GPC 算法的稳定性和鲁棒性[8]. Kinnaert 利用状态方程与 CARIMA 模型的等价关系, 分析了 MIMO 系统的 GPC 算法的稳定性, 得出了简明的表达式,但其特征多项式中的参数需用状态方程参数计算,计算量大,给实际应用带来不便[5].

## 二、任意维输入任意维输出 (ADIADO) 系统的预测控制算法[3,4]

ADIADO 系统的 CARIMA 模型可以表示为

$$y(t+1)=\sum_{i=1}^{n} A_{1,i}y(t+1-i)+\sum_{i=0}^{m} B_{1,i}\Delta u(t-d-i)+\sum_{i=0}^{r} C_{1,i}e(t+1-i), \tag{2,1}$$

其中

本文于1991年4月3日收到.

$$y(t)=(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_N(t))^T,$$
$$\Delta u(t)=(\Delta u_1(t),\Delta u_2(t),\cdots,\Delta u_M(t))^T,$$
$$e(t)=(e_1(t),e_2(t),\cdots,e_R(t))^T,$$

$y(t)$ 和 $\Delta u(t)$ 分别是$N$维输出和$M$维输入向量，$e(t)$ 是$R$维，均值为零的独立的白噪声序列，$d+1$ 为系统的延迟． $A_{1,i}$、$B_{1,i}$ 和 $C_{1,i}$ 分别是 $N\times N$, $N\times M$ 和$N\times R$维矩阵．

由式(2,1)确定的最小方差预报器可表示成

$$y(t+k/t)=\sum_{i=1}^{n}A_{k,i}y(t+1-i)+\sum_{i=1}^{m}B_{k,i}\Delta u(t-d-i)$$
$$+\sum_{i=1}^{r}C_{k,i}e(t+1-i)+\sum_{i=0}^{k-1}B_{k-i,0}\Delta u(t-d+i), \tag{2,2}$$

其中未知参数可由以下的递推算式得出:

$$A_{k,i}=A_{1,i+k-1}+\sum_{j=1}^{k-1}A_{1,j}A_{k-j,i}, i=1,2,3,\cdots,n, \tag{2,3a}$$

$$B_{k,i}=B_{1\ i+k-1}+\sum_{j=1}^{k-1}A_{1,j}B_{k-j,i}, i=0,1,2,\cdots,m, \tag{2,3b}$$

$$C_{k,i}=C_{1,i+k-1}+\sum_{j=1}^{k-1}A_{1,j}C_{k-j,i}, i=0,1,2,\cdots,r \tag{2,3c}$$

或者

$$A_{k,i}=A_{k-1,i+1}+A_{k-1,1}A_{1,i}, i=1,2,3,\cdots,n, \tag{2,4a}$$
$$B_{k,i}=B_{k-1,i+1}+A_{k-1,1}B_{1,i}, i=0,1,2,\cdots,m, \tag{2,4b}$$
$$C_{k,i}=C_{k-1,i+1}+A_{k-1,1}C_{1,i}, i=0,1,2,\cdots,r. \tag{2,4c}$$

在 $t$ 时刻及 $t$ 时刻后的输入恒等于 $u(t-1)$ 的假设下，在 $t$ 时刻由最小方差预报器(2,2)预测的 $t+k$ 时刻的输出定义为 $y_m(t+k)$，则有

$$y_m(t+k)=\sum_{i=1}^{n}A_{k,i}y(t+1-i)+\sum_{i=1}^{m}B_{k,i}\Delta u(t-d-i)$$
$$+\sum_{i=1}^{r}C_{k,i}e(t+1-i)+\sum_{i=0}^{k-1}B_{k-i,0}\Delta u(t-d+i/t), \tag{2,5}$$

其中

$$\Delta u(t+i/t)=\begin{cases}0_{M\times 1}, & \text{当 } i\geqslant 0 \text{ 时},\\ \Delta u(t+i), & \text{当 } i<0 \text{ 时},\end{cases}$$

这样，$y_m(t+k)$ 完全由 $t$ 时刻的已知信息确定． $y_m(t+k)$ 也可由递推公式计算[4]．

比较式(2,2)和式(2,5)，得

$$y(t+k/t)=y_m(t+k), \text{当 } k<d+1 \text{ 时}, \tag{2,6}$$

$$y(t+k/t)=y_m(t+k)+\sum_{i=d}^{k-1}B_{k-i,0}\Delta u(t-d+i), \text{当 } k\geqslant d+1 \text{ 时}. \tag{2,7}$$

由式(2,7)，得

$$y = y_m + Gu, \tag{2,8}$$

其中

$$y = (y^T(t+d+1/t), y^T(t+d+2/t), \cdots, y^T(t+p/t))^T,$$
$$y_m = (y_m^T(t+d+1), y_m^T(t+d+2), \cdots, y_m^T(t+p))^T,$$
$$u = (\Delta u^T(t), \Delta u^T(t+1), \cdots, \Delta u^T(t+p-d-1))^T,$$

$$G = \begin{bmatrix} B_{1,0} & & & 0 \\ B_{2,0} & B_{1,0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ B_{p-d,0} & B_{p-d-1,0} & \cdots & B_{1,0} \end{bmatrix}. \tag{2,9}$$

分别设参考轨迹向量与目标函数为

$$y_r = (y_r^T(t+d+1), y_r^T(t+d+2), \cdots, y_r^T(t+p))^T,$$
$$J = \min\{(y_r - y)^T(y_r - y) + \beta^2 u^T u\}, \tag{2,10}$$

其中 $\beta^2$ 为加权项.

利用式(2,8),极小化式(2,10)中的 $J$, 得

$$u = (G^T G + \beta^2 I)^{-1} G^T (y_r - y_m). \tag{2,11}$$

设 $g^T$ 为 $(G^T G + \beta^2 I)^{-1} G^T$ 的前$M$行组成的矩阵,则 $t$ 时刻的输入(控制), 由下式得出:

$$u(t) = u(t-1) + g^T(y_r - y_m). \tag{2,12}$$

# 三、稳定性分析(I)

首先,在时滞参数 $d$ 和柔化系数 $\alpha$ 都等于零的条件下(此时的情况与 Kinnaert 进行稳定性分析时的情形相同)进行分析.

式(2,1)可表示成

$$y(t) = \sum_{i=1}^{s} A_i y(t-i) + \sum_{i=0}^{s-1} B_i \Delta u(t-1-d-i) + \sum_{i=0}^{s} C_i e(t-i), \tag{3,1}$$

其中 $s = \max\{n, m+1, r\}$,

$$A_i = \begin{cases} A_{1,i}, & 当\ i \leqslant n\ 时, \\ 0_{N\times N}, & 当\ i > n\ 时, \end{cases} \tag{3,2a}$$

$$B_i = \begin{cases} B_{1,i}, & 当\ i \leqslant m\ 时, \\ 0_{N\times M}, & 当\ i > m\ 时, \end{cases} \tag{3,2b}$$

$$C_i = \begin{cases} C_{1,i}, & 当\ i \leqslant r\ 时, \\ 0_{N\times K}, & 当\ i > r\ 时, \end{cases} \tag{3,2c}$$

由式(3,1)得

$$x(t+1/t) = Ax(t/t-1) + B\Delta u(t-d) + K_s e(t), \tag{3,3a}$$
$$y(t) = Cx(t/t-1) + C_0 e(t), \tag{3,3b}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & I \\ A_2 & & \\ \vdots & & \\ A_s & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{N_s\times N_s},\quad B=\begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{s-1} \end{bmatrix}_{N_s\times M},C=[I,0\cdots0]_{N\times N_s}. \tag{3,4}$$

$d=0$ 时,由式(3,3)得到的预测模型为

$$y=Hu+Fx(t/t-1)+EK_se(t), \tag{3,5}$$

其中

$$H=\begin{bmatrix} CB & & & 0 \\ CAB & CB & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ CA^{p-1}B & CA^{p-2}B & \cdots & CB \end{bmatrix}_{Np\times Mp},\quad F=\begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^p \end{bmatrix}_{Np\times N_s}$$

$$E=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{p-1} \end{bmatrix}_{Np\times N_s} \tag{3,6}$$

$p$ 为预测长度,$y$ 和 $u$ 分别为目标函数表达式(2,10)中的 $y$ 和 $u(d=0)$.

极小化目标函数表达式(2,10)中的 $J$,利用式(3,5),得

$$u=(H^TH+\beta^2I)^{-1}H^T(y_r-Fx(t/t-1)-Ek_se(t)). \tag{3,7}$$

设 $h^T$ 是由 $(H^TH+\beta^2I)^{-1}H^T$ 的前$M$行组成的矩阵,则 $t$ 时刻的输入增量 $\Delta u(t)$ 由下式得出

$$\Delta u(t)=h^T(y_r-Fx(t/t-1)-Ek_se(t)). \tag{3,8}$$

由式(3,8)和式(3,3)得闭环系统($d=0$)的特征多项式为

$$\det(qI-A+Bh^TF). \tag{3,9}$$

式(3,9)与 Kinnaert 得出的结论[5]具有相同的形式,但$F$和 $h^T$ 的计算量大.下面证明$F$和 $h^T$ 的参数可直接由预测模型参数得出.

**命题** 1. 当 $d=0$ 时,闭环系统多项式(3,9)中的 $h^T$ 相等于输入(控制)计算式(2,12)中的 $g^T$.

证明. 等式(3,5)右边第一项 $Hu$ 中的变量为将来的输入值,后二项由 $t$ 时刻的已知信息完全确定,而式(3,5)和式(2,8)都是同一模型的最小方差预报器,两者完全相同.而且将来的输入值之间独立,它们与过去的信息计算出来的任何值独立,由此得出 $Gu$ 与 $Hu$ 相等,进而得出 $G=H$; $g^T=h^T$.

**定义 1.** 设有一组矩阵序列 $A_1,A_2,A_3,\cdots$, 其中 $A_i(i=1,2,3,\cdots)$ 均为$N\times N$维矩阵.

设有矩阵的连续乘积 $A_mA_n\cdots A_qA_r$, 其中矩阵下标 $m,n,\cdots,q,r$ 是自然数. 若 $m+n+\cdots+q+r=k$, 则称 $A_mA_n\cdots A_qA_r$ 为矩阵集合 $\{A_i,i=1,2,3,\cdots\}$ 的 $k$ 阶矩阵连乘(简称 $k$ 阶连乘).两个连乘之间,若其矩阵下标的排列顺序相同,则称它们是相同连乘,否则称不同连乘.

**定义 2.** 若矩阵和的表达式同时满足下列条件,则称为集合 $\{A_i,i=1,2,3,\cdots\}$ 的 $k$ 阶矩阵连乘和.

1°. 它是集合 $\{A_i, i = 1,2,3,\cdots\}$ 的 $k$ 阶矩阵连乘的和，其中的每一个 $k$ 阶连乘称为元素.

2°. 集合 $\{A_i, i = 1,2,3,\cdots\}$ 的任意的 $k$ 阶连乘必须是它的一个元素.

3°. 它的任意两个元素之间无相同连乘.

**引理 1.** 任何集合 $\{A_i, i = 1,2,3,\cdots\}$ 的 $k$ 阶连乘和都是相同的.

**引理 2.** 式(3,5)中的 $F$ 可由如下等式表示:

$$F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^p \end{bmatrix}_{Np\times Ns} = \begin{bmatrix} F_1 & I & 0 \cdots 0 \\ F_2 & F_1 & I \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ F_p & F_{p-1} & F_{p-2} \cdots \end{bmatrix}_{Np\times Ns} \tag{3,10}$$

其中

$$F_1 = A_1;\ F_k = A_k + \sum_{j=1}^{k-1} F_{k-j}A_j, j = 2,3,4,\cdots;\ A_j = 0,\ \text{当}\ j > s\ \text{时}. \tag{3,11}$$

**引理 3.** 式(3.10)中的 $F_k$ 是集合 $\{A_i, i = 1,2,3,\cdots\}$ 的 $k$ 阶连乘和.

**引理 4.** 若定义

$$D_1 = A_1; D_k = A_k + \sum_{j=1}^{k-1} A_j D_{k-j}, k = 2,3,4,\cdots, \tag{3,12}$$

则 $D_f$ 是集合 $\{A_i, i = 1,2,3,\cdots\}$ 的 $f$ 阶连乘和.

**命题 2.** 式(3,11)中的 $F_k$ 与式(2,3)中的 $A_{k,1}$ 相等,即 $F_k = A_{k,1}, k = 1,2,3,\cdots$.

证明. 由引理 3 和 4 知 $F_k$ 和 $D_k$ 都是集合 $\{A_i, i = 1,2,3,\cdots\}$ 的 $k$ 阶连乘和. 由引理 1 可知:

$$F_k = D_k. \tag{3,13}$$

利用式(3,2a),式(3,12)可表示成

$$D_1 = A_{1,1};\quad B_k = A_{1,k} + \sum_{j=1}^{k-1} A_{1,j} D_{k-j}, k = 2,3,4\cdots. \tag{3,14}$$

比较式(3,14)和式(2,3a)中 $i = 1$ 时的等式,得

$$D_k = A_{k,1}, k = 1,2,3,\cdots. \tag{3,15}$$

由式(3.15)和式(3.13),得

$$F_k = A_{k,1}, k = 1,2,3,\cdots. \tag{3,16}$$

证毕

本节的稳定性证明结果可概述如下:

$d = 0$ 时闭环系统的特征方程为 $\det(qI - A + Bh^TF)$.

其中 $q$ 为超前算子, $I$ 为 $Ns \times Ns$ 维单位矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \\ A_{1,2} & \\ \vdots & \\ A_{1,s} & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}_{Ns\times Ns} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,0} \\ B_{1,1} \\ \vdots \\ B_{1,s-1} \end{bmatrix}_{Ns\times M}$$

$$F=\begin{bmatrix} A_{1,1} & I & 0\cdots 0 \\ A_{2,1} & A_{1,1} & I\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ A_{p,1} & A_{p-1,1} & A_{p-2,1}\cdots \end{bmatrix}_{N_p\times N_s}$$

矩阵$A$、$B$和$F$由被控对象的模型参数和预测模型参数(也可以在式(2,3a)中令$i=1$后递推计算得出)直接得出；$s=\max\{n,m+1,r\}$($n,m,r$的意义参看式(2,1))；$h^T$相当于控制算式(2,12)中的$g^T$，是$M\times N_p$维矩阵。

## 四、稳定性分析(II)

本节中进一步分析时滞参数$d$不等于零时的情形。为了便于同前一节的结果相比较，本节中的预测长度$p'$选为$p'=p+d$，其中$p$为前一节中的预测长度。此时的输出"预测点数为$p$，同前一节的情形相同。因闭环特征多项式与噪声参数无关，本节将在无噪声的情况下进行分析。

由式(3,3)得

$$x(t+d+1)=Ax(t+d)+B\Delta u(t), \tag{4,1a}$$

$$y(t+d)=Cx(t+d). \tag{4,1b}$$

由式(4,1)得预测模型

$$y=Hu+Fx(t+d), \tag{4,2}$$

其中$y,H,u$和$F$的表达式同前一节。

极小化目标函数表达式(2,10)中的$J$，利用式(4,2)得

$$u=(H^TH+\beta^2I)^{-1}H^T(y_r-Fx(t+d)). \tag{4,3}$$

设$h^T$是由$(H^TH+\beta^2I)^{-1}H^T$的前$M$行组成的矩阵，则$t$时刻的输入增量

$$\Delta u(t)=h^T(y_r-Fx(t+d)). \tag{4,4}$$

若柔化系数$\alpha=0$，则由式(4,4)和式(4,1)得闭环系统的特征方程为

$$\det(q^d(qI-A+Bh^TF). \tag{4,5}$$

## 结 论

比较式(4,5)和式(3,9)可知：式(4,5)中增加的极点都在原点上。也就是说，$\alpha=0$，而且在预测点数相同的条件下，文献[4]中提出的控制算法的稳定性同时滞参数$d$无关。这是因为$t$时刻的输入对于消除$t+1$时刻到$t+d$时刻的预测误差(参考轨迹同最优预测值之间的误差)无能为力，文献[4]中提出的目标函数中没有包含这部分误差的平方之和。其结果是用文献[4]中提出的算式计算输入时不受这部分误差的干扰。

上述结论从理论上保证了文献[4]中提出的算法可以对大滞后系统进行有效的控制。若柔化系数$\alpha$不等于零，则其特征方程同参考轨迹的参数有关，表达式繁杂一些，但理论推导不难(推导略)。

## 参 考 文 献

[1] Clarke, D. W., et al., Generalized Predictive Control-Part I, The Basic Algorithm, **Automatica**,

No. 2, 137—148.
[2] Clarke, D. W., et al., Generalized Predictive Control——Part II, Extensions and Interpretations, **Automatica**, **23** (1987), 149—160.
[3] 金元郁、顾兴源，改进的广义预测控制算法，信息与控制，**19**(1990)，2，8—14.
[4] 金元郁、顾兴源，改进的多变量广义预测控制，信息与控制，**19**(1990)，6，20—23.
[5] Kinnaert, M., Generalized Predictive Control of Multivariable Linear Systems, Proceedings of the 26th IEEE CDC, Los Angeles, CA, (1987), 1247—1248.
[6] Kinnaert, M., Adaptive Control Multiple-Input Multiple-Output Linear Systems, **Automatica**, **29** (1988), 4, 9—16.
[7] Kinnaert, M., Adaptive Generalized Predictive Control for MIMO Systems, **Int. J. Control**, **50** (1989), 167—172.
[8] 席裕庚等，广义预测控制若干问题研究，1989 中国自动化学会第 3 届过程控制论文集，清华大学出版社，(1991)，1—8.

# STABILITY ANALYSIS OF MODIFIED GENERALIZED PREDICTIVE CONTROL

JIN YUANYU

(*Automation Centre, Fushun Petroleum Institute* 113001)

ABSTRACT

D. W. Clarke proposed a Generalized Predictive Control (GPC) algorithm in [1,2]. we have propossed a modified control algorithm [3,4]. In this paper, the stability of modified control algorithm [4] is analyzed. The characteristic polynomial of the loop system is simply expressed, its parameters are directly obtained from predictive model parameters requiring no further computation. Its conclusions are still suitable to the analysis of the original GPC algorithm [1,2,5].

**Key words :** Generalized Predictive Control (GPC); stability; Arbitrary-Dimension Input Arbitrary-Dimension Output (ADIADO) system.