第18卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 18, No. 4
1992 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1992

短 文

# LQ 逆问题研究

李人厚
（西安交通大学信控系，710049）
谢宋和 朱荣华
（郑州轻工业学院控制系，450002）

**摘 要**

本文研究了线性定常系统 LQ 逆问题解的存在性问题，给出了逆问题解的参数化公式，得到了加权矩阵 $Q$ 与开环、闭环特征多项式系数之间的解析关系。只要给定一组稳定的闭环极点，即可确定与之对应的 $Q$ 阵。

**关键词**：LQ 逆问题，加权矩阵，特征多项式。

## 一、前 言

所谓 LQ 逆问题[1]指的是：对于已知的线性系统 $(A, B)$，给定状态反馈增益 $F$ 使 $(A-BF)$ 具有指定的稳定极点，求加权矩阵 $Q$ 和 $R$，使 $F$ 成为系统 $(A, B)$ 对应于二次型性能指标

$$J=\int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u})\mathrm{d}t, \tag{1}$$

或

$$J=\sum_{k=0}^{\infty}[\boldsymbol{x}^T(k)Q\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}^T(k)R\boldsymbol{u}(k)] \tag{2}$$

的最优反馈增益矩阵。具体而言，LQ 逆问题包括两个主要内容：首先，给定的 $A$ 和 $B$ 以及 $F$ 满足什么条件，逆问题有解，即存在 $Q\geqslant 0$，$R>0$；其次，若解存在，如何确定 $Q$ 和 $R$。

本文研究了 LQ 逆问题解的存在性和非唯一性问题，提出了一种确定 $Q$ 和 $R$ 的新方法——参数化方法。这种方法是一种解析方法，不必求解 Riccati 方程，非常简单。

---

本文于1990年12月27日。

## 二、连续系统 LQ 逆问题研究

由最优控制理论知[2]：使性能指标(1)极小的最优控制规律为

$$u = -Fx,\ F = R^{-1}B^TP, \tag{3}$$

且 $P$ 为矩阵代数 Riccati 方程

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \tag{4}$$

的实对称非负定解.

令

$$P_0(s) = \det(sI_n - A) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_{oi}) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i, \quad a_n = 1,$$

$$P_c(s) = \det(sI_n - A + BF) = \prod_{i=1}^{n}(s - \lambda_{ci}) = \sum_{i=0}^{n} b_i s^i,\ b_n = 1.$$

**定理 1.** 若 $\lambda_{oi}, \lambda_{ci}(i = 1,2,\cdots,n)$ 分别是系统的开环极点和最优闭环极点，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ci}^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^2, \qquad \prod_{i=1}^{n}|\lambda_{ci}| \geqslant \prod_{i=1}^{n}|\lambda_{0i}|. \tag{5}$$

定理 1 说明，只有当预先指定的稳定闭环极点满足(5)式时，其对应的状态反馈才有可能构成最优系统. 换句话说，(5)式是 LQ 逆问题解存在的必要条件，它为选择合适的稳定闭环极点提供了一个重要的理论依据(证明见附录).

**定理 2.** 使闭环系统具有指定的稳定极点 $\lambda_{ci}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的加权矩阵 $Q$ 可以参数化表示为

$$Q = -(A^TT_2 + T_2S)T_1^{-1}, \tag{6}$$

式中 $S$ 是一个特征值为 $\lambda_{ci}$ 的实数矩阵，且参数阵 $T_1$ 和 $T_2$ 满足以下条件：

1) $T_1$ 是非奇异阵·

2) $T_1$ 和 $T_2$ 满足矩阵方程

$$AT_1 - T_1S = BR^{-1}B^TT_2\ (R > 0); \tag{7}$$

3) (6)式定义的 $Q \geqslant 0$.

**定理 3.** 对于单输入可控系统 $(A, b)$ 而言，使对应的闭环系统具有指定的稳定极点 $\lambda_{ci}$ 的加权矩阵 $Q$ 可以表示为

$$Q = C^T\bar{Q}C\ (R = 1), \tag{8}$$

式中 $C$ 是可控标准形变换矩阵，$\bar{Q}_{ij} = b_{i-1}b_{j-1} - a_{i-1}a_{j-1} - t_{j,i-1} - t_{i,j-1}$，且 $t_{i,j} = t_{j,i}$，当 $i$ 或 $j \leqslant 0$ 时，$t_{i,j} = 0$；当 $0 < i$ 和 $j < n$ 时，$t_{i,j}$ 为自由参数；当 $i$ 或 $j = n$ 时，有

$$t_{n,i} = t_{i,n} = b_{i-1} - a_{i-1},\ (i = 1,2,\cdots,n).$$

**定理 4.** 对于单输入可控系统 $(A,b)$ 来说，LQ 逆问题的解存在的充分条件是

$$b_{i-1}^2 - a_{i-1}^2 + 2\sum_{m=1}^{i}(-1)^m(b_{i-m-1}b_{i+m-1} - a_{i-m-1}a_{i+m-1}) \geqslant 0, \tag{9}$$

式中 $i = 1, 2,\cdots, n$，且当 $j > n$ 时，$a_j = 0$，$b_j = 0$.

以上定理的证明见附录.

## 三、离散系统 LQ 逆问题研究

对于离散系统$(A,B)$而言，使性能指标(2)极小的最优控制为

$$\boldsymbol{u}(k)=-F\boldsymbol{x}(k),\quad F=(R+B^TPB)^{-1}B^TPA, \tag{10}$$

式中 $P$ 为代数 Riccati 方程

$$P=A^TPA-A^TPB(R+B^TPB)^{-1}B^TPA+Q \tag{11}$$

的实对称非负定解．令

$$P_0(z)=\det(zI_n-A)=\prod_{i=1}^{n}(z-\lambda_{oi})=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i,\ a_n=1,$$

$$P_c(z)=\det(zI_n-A+BF)=\prod_{i=1}^{n}(z-\lambda_{ci})=\sum_{i=0}^{n}b_iz^i,\ b_n=1.$$

**定理 5.** 如果 $\lambda_{oi}$, $\lambda_{ci}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是系统 $(A,B)$ 的开环极点和对应的最优闭环极点，则有下述不等式成立：

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_{oi}\Big/\prod_{i=1}^{n}\lambda_{ci}\geqslant 1,\ 0<\prod_{i=1}^{n}\lambda_{oi}\lambda_{ci}\leqslant 1. \tag{12}$$

显然，对于指定的稳定极点 $\lambda_{ci}$，它必须满足不等式(12)，其对应的状态反馈才有可能成为最优反馈．因此，此不等式是 LQ 逆问题解存在的必要条件．

**定理 6.** 若 $a_i$, $b_i(i=0,1,\cdots,n)$ 分别是系统 $(A,B)$ 的开环特征多项式系数和对应的最优闭环特征多项式系数，则有

$$\frac{a_0}{b_0}\sum_{i=0}^{n}b_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2. \tag{13}$$

不等式(12)和(13)为选择适当的稳定闭环极点提供了一个重要的前提条件．

**定理 7.** 使闭环系统矩阵 $(A-BF)$ 具有指定的稳定极点 $\lambda_{ci}(i=1,2,\cdots,n)$ 的加权矩阵 $Q$ 可以参数化表示为

$$Q=T_2T_1^{-1}-A^TT_2ST_1^{-1}, \tag{14}$$

式中矩阵 $S$ 是一个特征值分别为 $\lambda_{ci}$ 的实数矩阵，且参数阵 $T_1$ 和 $T_2$ 满足以下约束条件：

1) $T_1$ 是非奇异矩阵；

2) $T_1$ 和 $T_2$ 满足矩阵方程；

$$AT_1-T_1S=BR^{-1}B^TT_2S,\ (R>0); \tag{15}$$

3) 由 $T_1$ 和 $T_2$ 确定的 $Q\geqslant 0$.

**定理 8.** 对于单输入可控系统 $(A,b)$，使对应的闭环系统具有预先指定的稳定极点 $\lambda_{ci}$ 的加权矩阵 $Q$ 可以表示为

$$Q=C^T\bar{Q}C\ (R=1), \tag{16}$$

其中 $C$ 为可控标准形变换矩阵，$\bar{Q}$ 满足

$$\bar{Q}_{ij}=t_{i,j}-t_{i-1,j-1}+\frac{a_0}{b_0}b_{i-1}b_{j-1}-a_{i-1}a_{j-1}, \tag{17}$$

式中 $t_{i,j}=t_{j,i}$，且当 $i$ 或 $j\leqslant 0$ 时，$t_{i,j}=0$；当 $0<i$ 和 $j<n$ 时，$t_{i,j}$ 为自由参数；当

$i$ 或 $j=n$ 时，有

$$t_{n,i}=t_{i,n}=a_0b_i/b_0-a_i\ (i=1,2,\cdots,n). \tag{18}$$

**定理 9.** 对于单输入可控系统 $(A,b)$，LQ 逆问题的解存在的充分条件是：(19)式确定的 $Q\geqslant 0$.

$$Q=Q^T=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \cdots & \bar{Q}_{1n}\\ & \bar{Q}_{11} & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \bar{Q}_{12}\\ & & & \bar{Q}_{11}\end{bmatrix}, \tag{19}$$

式中

$$\bar{Q}_{1i}=\left[\frac{a_0b_{n-i+1}}{b_0}-a_{n-i+1}+\sum_{j=1}^{n-i+1}\left(\frac{a_0}{b_0}b_{j-1}b_{i+j-2}-a_{j-1}a_{i+j-2}\right)\right]\Big/ (n-i+1),\ i=1,2,\cdots,n.$$

## 四、例 子[3]

已知某连续系统为

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{20}$$

若指定的闭环极点分别为$-2\pm j$和$-3$，则对应的特征多项式系数为

$$b_0=15,\ b_1=17,\ b_2=7,\ b_3=1.$$

根据定理 3，当取 $t_{1,1}=255,\ t_{1,2}=105,\ t_{2,2}=98$ 时，有

$$Q=\begin{bmatrix}165 & -105 & -30\\ -105 & 310 & 10\\ -30 & 10 & 10\end{bmatrix}>0. \tag{21}$$

当取 $t_{1,1}=255,\ t_{1,2}=100,\ t_{2,2}=98$ 时，有

$$Q=\begin{bmatrix}175 & -130 & -30\\ -130 & 330 & 15\\ -30 & 15 & 10\end{bmatrix}>0. \tag{22}$$

不难验证：由(21)式和(22)式 $Q$ 阵确定的最优状态反馈增益均为

$$F=[3\quad 4\quad 4]. \tag{23}$$

## 附 录

定理 1 的证明.

由文献[2]知：$F$ 是最优反馈增益矩阵的充分必要条件为

$$[I_m+R^{1/2}F(-j\omega I_n-A)^{-1}BR^{-1/2}]^T[I_m+R^{1/2}F(j\omega I_n-A)^{-1}BR^{-1/2}]\geqslant I_m. \tag{A1}$$

式 (A1) 两边同时取行列式，根据矩阵理论有

$$P_c(j\omega)P_c(-j\omega)/P_0(j\omega)P_0(-j\omega)\geqslant 1,\ \omega\in R, \tag{A2}$$

即

$$P_c(j\omega)P_c(-j\omega)-P_0(j\omega)P_0(-j\omega)\geqslant 0,\ \omega\in R. \tag{A3}$$

又

$$\begin{aligned}\Phi(\omega^2)&=P_c(j\omega)P_c(-j\omega)-P_0(j\omega)P_0(-j\omega)\\&=\prod_{i=1}^{n}(\omega^2+\lambda_{ci}^2)-\prod_{i=1}^{n}(\omega^2+\lambda_{0i}^2)\\&=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{ci}^2-\lambda_{0i}^2)\omega^{2n-2}+\cdots+\left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_{ci}^2-\prod_{i=1}^{n}\lambda_{0i}^2\right)\geqslant 0.\end{aligned}$$

上式显然是一个 $\omega$ 的偶次多项式，要使它对所有实数 $\omega\in R$ 均成立，则必须有首项系数和常数项均非负.

定理 2 的证明.

把(6)式确定的 $Q$ 阵代入方程(4)有

$$A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP-(A^TT_2+T_2S)T_1^{-1}=0,$$

上式两边同时右乘 $T_1$ 可得

$$P(A-BR^{-1}B^TP)T_1-T_2S+A^T(PT_1-T_2)=0. \tag{A4}$$

(7)式两边同时左乘 $T_2T_1^{-1}$，经整理得

$$T_2T_1^{-1}(AT_1-BR^{-1}B^TT_2)-T_2S=0,$$

即

$$(T_2T_1^{-1})(A-BR^{-1}B^TT_2T_1^{-1})T_1-T_2S=0. \tag{A5}$$

由(A4)式和(A5)式可知 $P=T_2T_1^{-1}$ 将是方程(A4)的解. 因此，$F=R^{-1}B^TT_2T_1^{-1}$ 是一个最优反馈增益，根据(7)式有

$$A_c=A-BF=T_1ST_1^{-1}, \tag{A6}$$

即闭环系统矩阵和 $S$ 有相同的特征值集合.

定理 3 的证明.

对于任何一个单输入可控系统，总存在一个线性变换 $C$，使之成为可控标准形

$$A=\begin{bmatrix}0 & I_{n-1}\\ -a_0 & -a_1\cdots-a_{n-1}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}. \tag{A7}$$

若取 $T_1=I_n$，$R=1$，则(7)式简化为

$$A-S=BB^TT_2. \tag{A8}$$

显然可取

$$S=\begin{bmatrix}0 & I_{n-1}\\ -b_0 & -b_1\cdots-b_{n-1}\end{bmatrix},$$

$S$ 将具有期望的特征值 $\lambda_{ci}$，且有

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_0-a_0 & b_1-a_1 & \cdots & b_{n-1}-a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\cdots 0\\ \vdots\cdots\cdots\vdots\\ 0\cdots 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ t_{n,1} & t_{n,2} & \cdots & t_{n,n}\end{bmatrix}. \tag{A9}$$

由上式有

$$t_{n,i}=b_{i-1}-a_{i-1}\ (i=1,2,\cdots,n). \tag{A10}$$

由定理 2 可知，$P=T_2T_1^{-1}$，要使 $P=P^T$，则必须有 $T_2=T_2^T$. 并且不难计算出

$$(T_2S)_{ij}=(a_{i-1}-b_{i-1})b_{j-1}+t_{i,j-1},$$
$$(T_2A)_{ij}=(a_{i-1}-b_{i-1})a_{j-1}+t_{i,j-1}.$$

因此,由定理 2 有

$$\bar{Q}_{ij} = b_{i-1}b_{j-1} - a_{i-1}a_{j-1} - t_{i,j-1} - t_{j,i-1}, \tag{A11}$$

式中$(\cdot)_{ij}$表示矩阵的第 $i$ 行第 $j$ 列元素.

定理 4 的证明.

为了简便起见,考虑一个 SISO 可控标准形系统,由文献[1]有

$$P_c(S)P_c(-S) = P_0(S)P_0(-S) + [\mathrm{adj}(-SI - A)b]^T Q[\mathrm{adj}(SI - A)b], \tag{A12}$$

$$\mathrm{adj}(SI - A)b = [1 S \cdots S^{n-1}]^T, \tag{A13}$$

$$\mathrm{adj}(-SI - A)b = [1 \quad -S \cdots (-1)^{n-1}S^{n-1}]^T. \tag{A14}$$

把(A13)式和(A14)式代入(A12)式右边, 不难看到: 由 $Q$ 阵和 $\hat{Q}$ 阵将对应有相同的特征多项式 $P_c(S)$, 即有相同的反馈增益 $F$. 式中对角阵满足:

$$\hat{Q} = \mathrm{diag}\left(Q_{i,i} + 2\sum_{m=1}^{i}(-1)^m Q_{i-m,i+m}\right), \tag{A15}$$

式中 $Q_{i,j}$ 表示$Q$阵的第 $i$ 行第 $j$ 列元素. 由定理 3 和(A15)式有

$$\hat{Q}_{i,i} = b_{i-1}^2 - a_{i-1}^2 + 2\sum_{m=1}^{i}(-1)^m(b_{i-m-1}b_{i+m-1} - a_{i-m-1}a_{i+m-1}).$$

定理 5 的证明.

由(10)式有

$$A_c = A - BF = A - B(R + B^TPB)^{-1}B^TPA, \tag{A16}$$

经适当的代数变换后,(39)式可改写成

$$A_c = (I_n + BR^{-1}B^TP)^{-1}A. \tag{A17}$$

因此,

$$\det A_c \cdot \det(I_n + BR^{-1}B^TP) = \det A.$$

又

$$\det(I_n + BR^{-1}B^TP) = \det(R + B^TPB)/\det R \geqslant 1,$$

故

$$\det A/\det A_c \geqslant 1,$$

即有

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_{oi}\Big/\prod_{i=1}^{n}\lambda_{ci} \geqslant 1. \tag{A18}$$

若把(A16)式代入(11)式,有

$$Q = P - A^TPA_c \geqslant 0,$$

因而

$$\det P \geqslant \det A \cdot \det P \cdot \det A_c,$$

即有 $\det A \cdot \det A_c \leqslant 1$, 根据(A18)式得

$$0 < \prod_{i=1}^{n}\lambda_{oi} \cdot \prod_{i=1}^{n}\lambda_{ci} \leqslant 1.$$

证毕

定理 6 的证明.

由最优控制理论有

$$\frac{a_0}{b_0}P_c(z)P_c(z^{-1}) - P_0(z)P_0(z^{-1})$$
$$= P_0(z)D(zI - A)^{-1}\bar{B}\bar{B}^T(z^{-1}I - A^T)^{-1}D^TP_0(z^{-1}), \tag{A19}$$

式中 $\bar{B} = BR^{-1/2}$, $D$ 满足 $Q = D^TD$. 经计算后有

$$P_0(z)D(zI - A)^{-1}\bar{B} = \sum_{i=0}^{n}M_iZ^i, \tag{A20}$$

式中 $M_i = \sum_{j=1}^{n-i} a_{i+j} D A^{j-1} \bar{B}$，因此

$$\frac{a_0}{b_0} P_c(z) P_c(z^{-1}) - P_0(z) P_0(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n} M_i Z^i \cdot \sum_{j=0}^{n} M_j^T z^{-j}. \tag{A21}$$

展开(A21)式左右的乘积，根据系数相等的原则，有

$$\sum_{i=k}^{n} \left( \frac{a_0}{b_0} b_i b_{i-k} - a_i a_{i-k} \right) = \sum_{i=k}^{n-1} M_i M_{i-k}^T \quad (K = 0, 1, \cdots, n-1),$$

当 $K = 0$ 时，有

$$\sum_{i=0}^{n} \left( \frac{a_0}{b_0} b_i^2 - a_i^2 \right) = \sum_{k=0}^{n-1} M_i M_i^T \geqslant 0.$$

证毕

由于定理 7，8，9 的证明方法和定理 2，3，4 的证明方法很相似，故略．

## 参 考 文 献

[1] Kalman, R. E., When is a Linear Control System Optimal, *Trans ASME(D)*, **86**(1964), 51—60.

[2] Anderson, B. D. O. and Moore, J. B., Linear Optimal Control, Prentice-hall, (1971), 100—300.

[3] Lee, T. T. and Liaw, G. T., The Inverse Problem of Linear Optimal Control for Constant Disturbance, *Int. J. Control,* **43**(1986), 233—246.

# A STUDY ON THE LQ INVERSE PROBLEMS

LI RENHOU

*(Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

XIE SONGHE　　ZHU RONGHUA

*(Zhengzhou Institute of Light Industry, Zhengzhou* 450002)

ABSTRACT

In this paper, the existence of the solutions of LQ inverse problems is studied for linear time-invariant systems. The parametric formula of the solutions of inverse problems are given. The analysis relations among the wegthing matrix Q and coefficients of the open-loop and closed-loop characteristic polynomials are obtained. Upon the given stable closed-loop poles, the matrix Q can correspondingly be determined.

**Key words:** LQ inverse problem; weighting matrix; characteristic polynomial.