

# 考虑输入错误时一个 BP 网络的高可靠重构<sup>1)</sup>

姚增起

(中国科学院自动化研究所, 北京 100080)

## 摘 要

本文将 BP 网络的输入错误分为死区错误和反相错误, 提出了对输入容错的高可靠的 BP 网络的构造方法. 对上述两种错误, 分别讨论了在高可靠构造下的可靠性问题, 指出当输入正确的概率在一定范围内变化时, 通过增加输入重复数, 可以使得网络正确实现规定功能的概率接近于 1, 或者说, 使得网络对于输入错误不敏感.

**关键词:** BP 网络, 输入错误, 可靠度, 死区错误, 反相错误, 重构.

## 一、引 言

BP 网络是目前研究和应用比较广泛的一个神经网络模型. 研究者大多侧重于它的学习算法, 探索如何在最短的时间内使它学习成功. 正象其它的工程系统一样, 在应用 BP 网络完成某一功能时, 不能不考虑它的可靠性问题. 作者对 BP 网络可靠性进行了一些研究<sup>[1,2]</sup>. 从处理方式上来说, BP 网络是并行的, 从存储方式上来说, BP 网络是分布的. 所以, 使 BP 网络达到可靠是完全可行的. 作者考虑了隐节点可能失效的情形<sup>2)</sup>, 提出了使 BP 网络任意可靠的一种构造. 在保证原有网络功能的前提下, 新构造的网络可靠度可以在一定条件下任意接近于 1.

在实际应用中, BP 网络的输入错误是不可避免的. 如果网络结构对输入错误很敏感, 那么, 不管一个网络的功能多么强大, 它也会得出错误的输出. 本文将输入错误分为死区错误和反相错误两种, 提出对输入容错的高可靠的 BP 网络构造方法, 并分别对这两种错误讨论了在高可靠构造下的可靠性问题.

## 二、BP 网络分析及输入错误分类

只考虑输入可能发生错误的情形, 网络其余部分完好, 仍然借用作者在中国神经网络首届学术大会的文章中的例子. 为了便于阅读, 将此例的网络、样本集 (XOR) 和权重列

本文于 1991 年 6 月 14 日收到.

1) 国家自然科学基金资助项目.

2) 姚增起, 提高 BP 网络可靠性的一种途径, 中国神经网络首届学术大会论文集, 北京, 1990, 891—894.

于图 1、表 1 和表 2。

表 1

	SI <sub>1</sub>	SI <sub>2</sub>	SO
样本 1	0	0	1
样本 2	0	1	0
样本 3	1	0	0
样本 4	1	1	1

表 2

ijk	W <sub>ijk</sub>	ijk	W <sub>ijk</sub>	ijk	W <sub>ijk</sub>
101	-2.072994	102	2.943286	111	3.895062
112	5.513540	121	-4.119616	122	-5.349912
201	-2.712095	211	-6.276371	221	5.918700

训练误差  $\Delta_1 = 0.1$ ，节点状态采用 S 形函数，即

$$S_{ij}(I_1, I_2) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\sum_k W_{ijk} S_{(i-1)k}(I_1, I_2)\right)}, \quad (1)$$

分别写则有

$$S_{11}(I_1, I_2) = \frac{1}{1 + \exp(-(W_{101} + W_{111}I_1 + W_{121}I_2))}, \quad (2)$$

$$S_{12}(I_1, I_2) = \frac{1}{1 + \exp(-(W_{102} + W_{112}I_1 + W_{122}I_2))}, \quad (3)$$

$$S_{21}(I_1, I_2) = \frac{1}{1 + \exp(-(W_{201} + W_{211}S_{11}(I_1, I_2) + W_{221}S_{12}(I_1, I_2)))}. \quad (4)$$

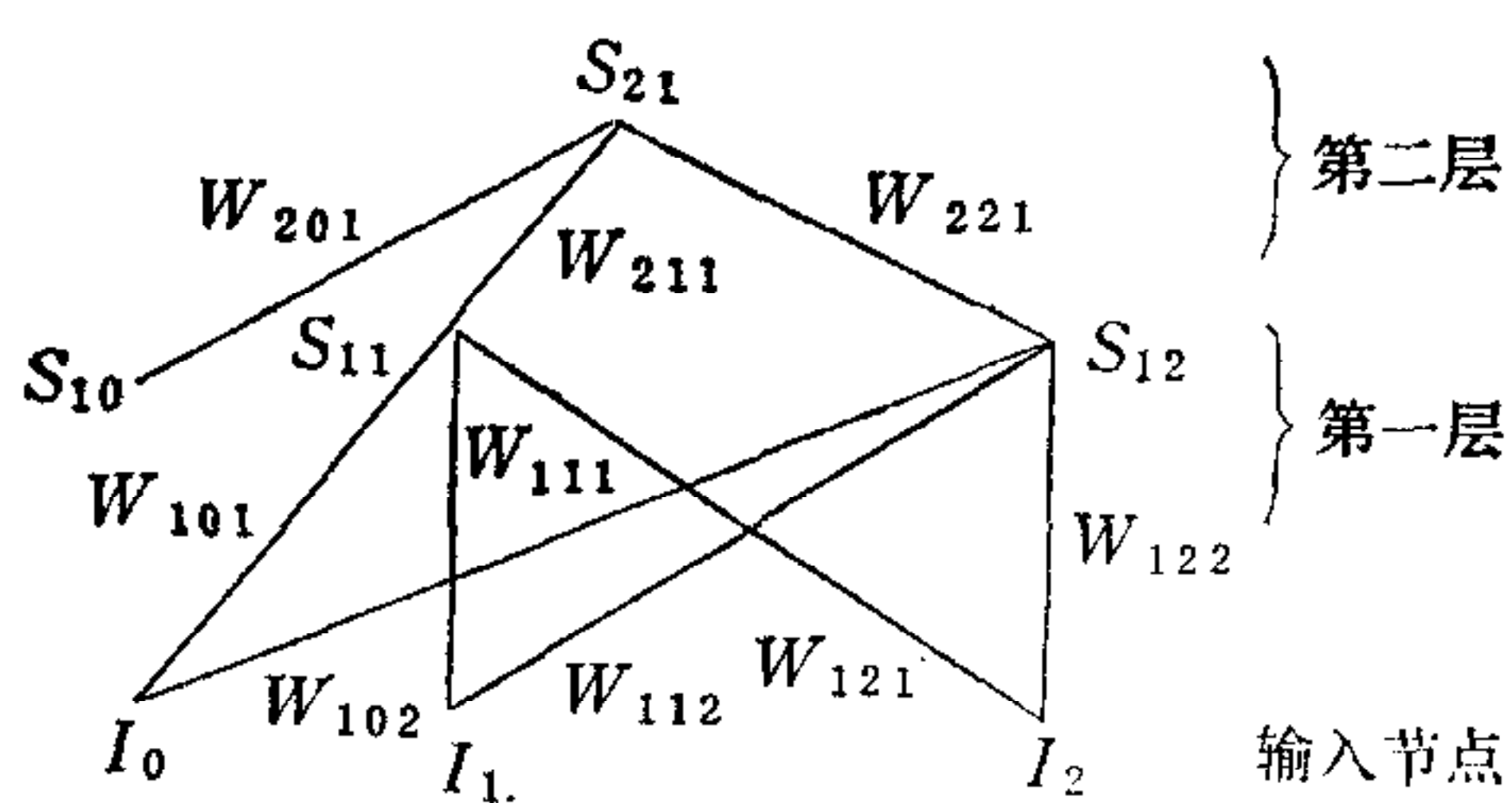


图 1

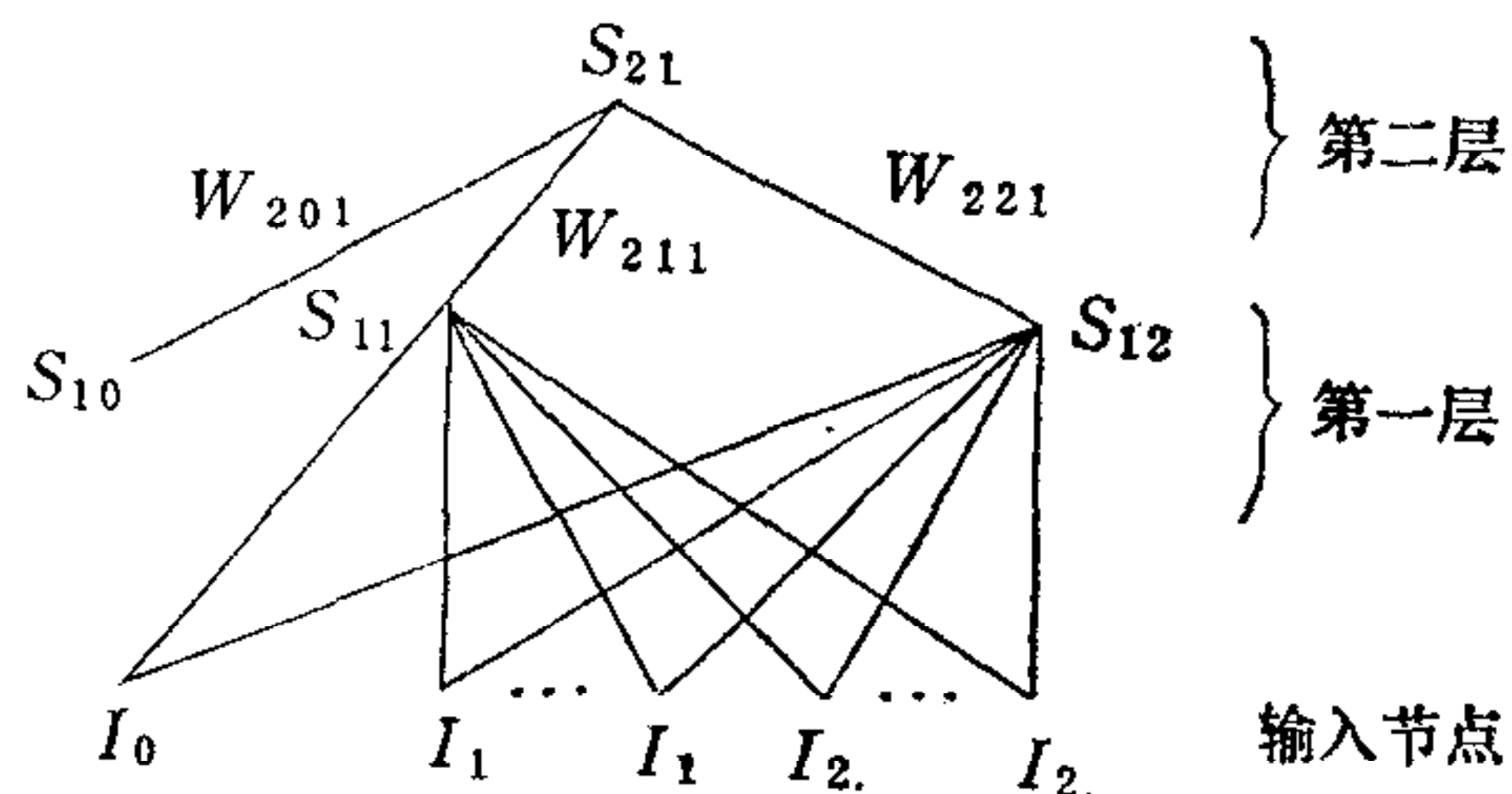


图 2

**定义 1.** 如果输入固定为 0，并且不再改变，称为死区 0 错误。如果输入固定为 1，并且不再改变，称为死区 1 错误。两者统称为死区错误。

**定义 2.** 如果输入应该为 0 时而为 1，应该为 1 时而为 0，称为反相错误。

下面考察在上述两种错误发生时图 1 的 BP 网络情况。

当发生死区 0 错误时，在任何情况下，都有两个样本可以得到正确实现，其余两个不能得到正确实现。例如，当  $I_1$  和  $I_2$  都发生死区 0 错误时，样本 1 和样本 4 可以得到正

确的实现,而样本 2 和样本 3 不能得到正确实现。当只有  $I_1$  发生死区 0 错误时,样本 1 和样本 2 可以得到正确的实现,而样本 3 和样本 4 却得不到正确的实现。对于死区 1 错误可以进行类似的分析。

如果  $I_1$  和  $I_2$  都发生反相错误,4 个样本都可以得到正确实现。如果  $I_1$  和  $I_2$  只有一个发生反相错误,则 4 个样本都不能得到正确实现。

通过分析可以看出,象图 1 这样简单的 BP 网络,对于输入错误是非常敏感的。只要有一个样本不能正确实现,网络即不能使用。所以,有必要对其进行重新构造,以使其可靠性得以提高。

为了提高 BP 网络可靠性,将输入  $I_1$  重复  $n_1$  次,输入  $I_2$  重复  $n_2$  次。如图 2 所示,和  $I_1$  相连的连枝的权重为原来权重的  $1/n_1$ ,即  $I_1$  与  $S_{11}$  之间的权重均为  $W_{111}/n_1$ , $I_1$  与  $S_{12}$  之间的权重均为  $W_{112}/n_1$ ;和  $I_2$  相连的连枝的权重为原来权重的  $1/n_2$ ,即  $I_2$  与  $S_{11}$  之间的权重均为  $W_{121}/n_2$ , $I_2$  与  $S_{12}$  之间的权重均为  $W_{122}/n_2$ 。

由(1)式,图 2 中的  $S_{11}(I_1, I_2)$  和  $S_{12}(I_1, I_2)$  可以写成

$$\left. \begin{aligned} S_{11}(I_1, I_2) &= \frac{1}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + n_1 \frac{W_{111}}{n_1} I_1 + n_2 \frac{W_{121}}{n_2} I_2\right)\right)}, \\ S_{12}(I_1, I_2) &= \frac{1}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + n_1 \frac{W_{112}}{n_1} I_1 + n_2 \frac{W_{122}}{n_2} I_2\right)\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

图 2 的  $S_{21}(I_1, I_2)$  与图 1 的相同。显然图 2 的  $S_{11}(I_1, I_2)$  和  $S_{12}(I_1, I_2)$  也和图 1 的相同。所以,图 2 的网络可以完成与图 1 网络相同的功能。

以下分析当有输入错误时,图 2 的 BP 网络的可靠性。这里仍然引用文<sup>1)</sup>中对 BP 网络的可靠定义。

**定义 3.** 如果对样本集的所有样本,网络的输出误差不超过  $\Delta_2$  ( $\Delta_1 < \Delta_2 < 0.5$ ),则它是可靠的。

由定义 3,在下列条件下网络是可靠的:

$$|S_{21}(I_1, I_2) - SO(I_1, I_2)| \leq \Delta_2, \quad I_1 = 0, 1, \quad I_2 = 0, 1, \quad (6)$$

记  $a = \ln[(1 - \Delta_2)/\Delta_2]$ ,将(4)式及表 1 的数据代入(6)式可得

$$\left. \begin{aligned} W_{201} + W_{211}S_{11}(0, 0) + W_{221}S_{12}(0, 0) &\geq a, \\ W_{201} + W_{211}S_{11}(0, 1) + W_{221}S_{12}(0, 1) &\leq -a, \\ W_{201} + W_{211}S_{11}(1, 0) + W_{221}S_{12}(1, 0) &\leq -a, \\ W_{201} + W_{211}S_{11}(1, 1) + W_{221}S_{12}(1, 1) &\geq a. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

### 三、死区错误

本节只考虑死区 0 错误,对于死区 1 错误,可以进行类似的分析。以下分析当输入有

1) 见 551 页脚注 2)

死区 0 错误时,图 2 中 BP 网络的可靠性.

假定输入  $I_1$  有  $i$  个没有发生死区错误,输入  $I_2$  有  $j$  个没有发生死区错误,则 (5) 式变为

$$\left. \begin{aligned} S_{11}(I_1, I_2) &= \frac{1}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + i \frac{W_{111}}{n_1} I_1 + j \frac{W_{121}}{n_2} I_2\right)\right)}, \\ S_{12}(I_1, I_2) &= \frac{1}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + i \frac{W_{112}}{n_1} I_1 + j \frac{W_{122}}{n_2} I_2\right)\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将 (8) 式代入 (7) 式,可得在发生死区 0 错误的情况下,图 2 的 BP 网络仍能完成规定功能的条件(输出误差为  $\Delta_2$ ); 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{W_{211}}{1 + \exp(-W_{101})} + \frac{W_{221}}{1 + \exp(-W_{102})} &\geq a - W_{201}, \\ \frac{W_{211}}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + \frac{j}{n_2} W_{121}\right)\right)} + \frac{W_{221}}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + \frac{j}{n_2} W_{122}\right)\right)} &\leq -a - W_{201}, \\ \frac{W_{211}}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + \frac{i}{n_1} W_{111}\right)\right)} + \frac{W_{221}}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + \frac{i}{n_1} W_{112}\right)\right)} &\leq -a - W_{201}, \\ \frac{W_{211}}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + \frac{i}{n_1} W_{111} + \frac{j}{n_2} W_{121}\right)\right)} + \frac{W_{221}}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + \frac{i}{n_1} W_{112} + \frac{j}{n_2} W_{122}\right)\right)} &\geq a - W_{201}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

由 (9) 式决定的区域记为  $\Omega_s(i/n_1, j/n_2)$ , 则由文[2]中的定义, 这个 BP 网络是一个  $N$  中取  $K$  的容错系统, 其中  $N = (n_1, n_2)$ ,  $K = (i, j)$ .  $\Omega_s(i/n_1, j/n_2)$  是它的可靠区域.

因为 (9) 式的第一式不含变量, 实际上,  $\Omega_s(i/n_1, j/n_2)$  是由下式决定:

$$\left. \begin{aligned} \frac{W_{211}}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + \frac{j}{n_2} W_{121}\right)\right)} + \frac{W_{221}}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + \frac{j}{n_2} W_{122}\right)\right)} &\leq -a - W_{201}, \\ \frac{W_{211}}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + \frac{i}{n_1} W_{111}\right)\right)} + \frac{W_{221}}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + \frac{i}{n_1} W_{112}\right)\right)} &\leq -a - W_{201}, \\ \frac{W_{211}}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + \frac{i}{n_1} W_{111} + \frac{j}{n_2} W_{121}\right)\right)} + \frac{W_{221}}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + \frac{i}{n_1} W_{112} + \frac{j}{n_2} W_{122}\right)\right)} &\geq a - W_{201}. \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{W_{221}}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + \frac{i}{n_1} W_{112} + \frac{j}{n_2} W_{122}\right)\right)} \geq a - W_{201} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

取  $\Delta_2 = 0.4$ , 则  $a = 0.405465$ , 将表 2 的数据代入 (10) 式, 可以画出  $\Omega_s(i/n_1, j/n_2)$ , 如图 3 所示.

因此, 当  $i/n_1$  和  $j/n_2$  处于阴影区内时, 图 2 的网络可以正确实现所有样本. 设  $p_1$  和  $p_2$  分别为输入  $I_1$  和  $I_2$  正确输入的概率(输入可靠度),  $R(p_1, p_2, n_1, n_2, \Omega_s)$  为网络正确实现所有样本的概率(网络可靠度), 由文[2], 有

$$\begin{aligned} R(p_1, p_2, n_1, n_2, \Omega_s) &= \sum_{\left(\frac{i}{n_1}, \frac{j}{n_2}\right) \in \Omega_s} C_{n_1}^i C_{n_2}^j p_1^i p_2^j (1-p_1)^{n_1-i} (1-p_2)^{n_2-j}. \end{aligned} \quad (11)$$

如果将  $\Omega_s(i/n_1, j/n_2)$  的  $i/n_1$  换为  $p_1$ ,  $j/n_2$  换为  $p_2$ , 则当  $(p_1, p_2) \in \Omega_s(p_1, p_2)$  时, 由文[2]中的定理 1, 可以通过增加  $n_1$  和  $n_2$ , 使得网络正确实现所有样本的概率任意接近于 1.  $R$  是一个三维的曲面, 绘制这个曲面在技术上有困难. 现令  $p_1 = p_2 = p$ ,  $n_1 = n_2 = n$ , 可以画出  $R(p, n)$  的曲线如图 4 所示. 可以看出, 当  $p > 0.63$  这个转折点时, 随着  $n$  的增加,  $R(p, n)$  逐渐接近于 1.

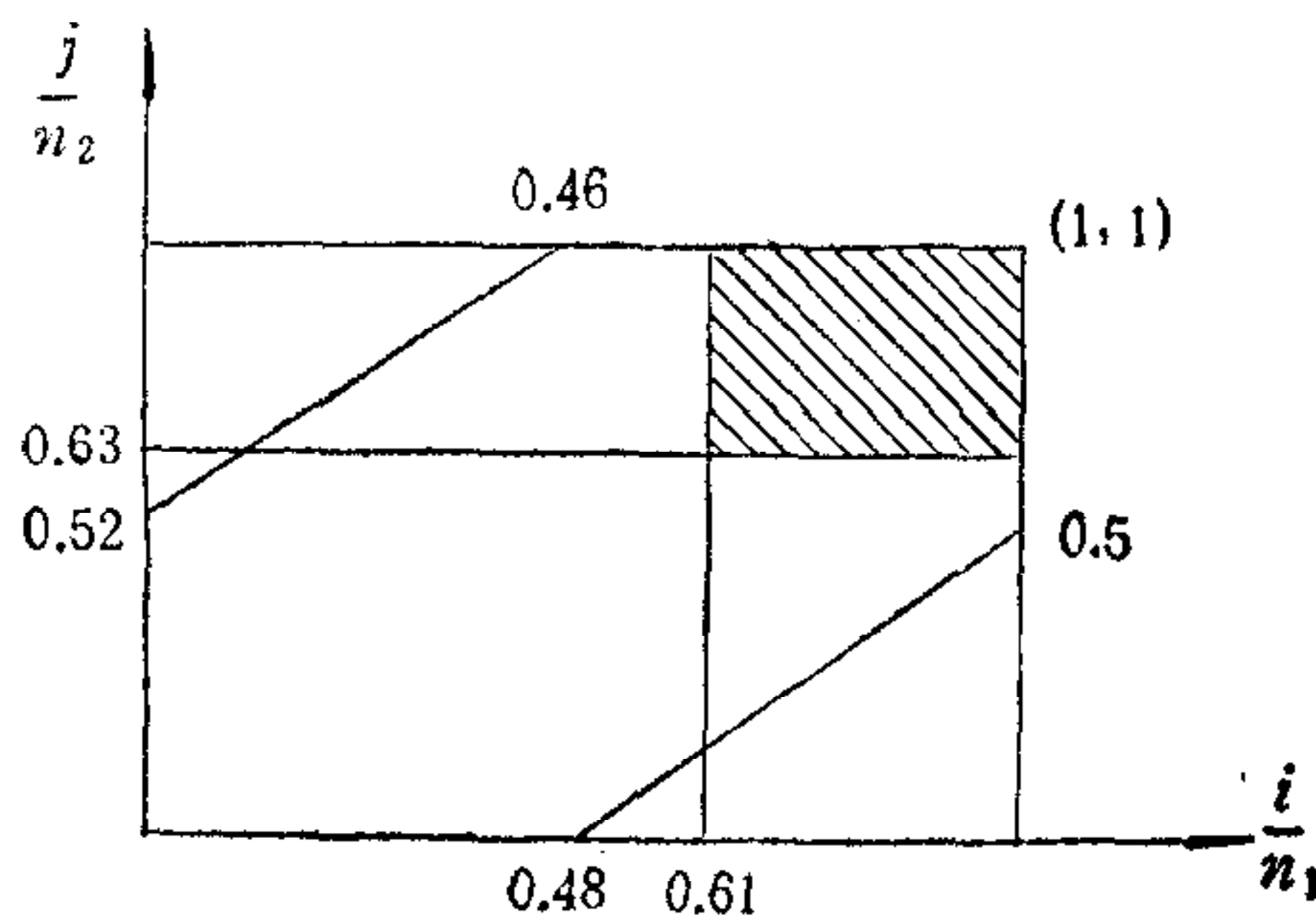


图 3

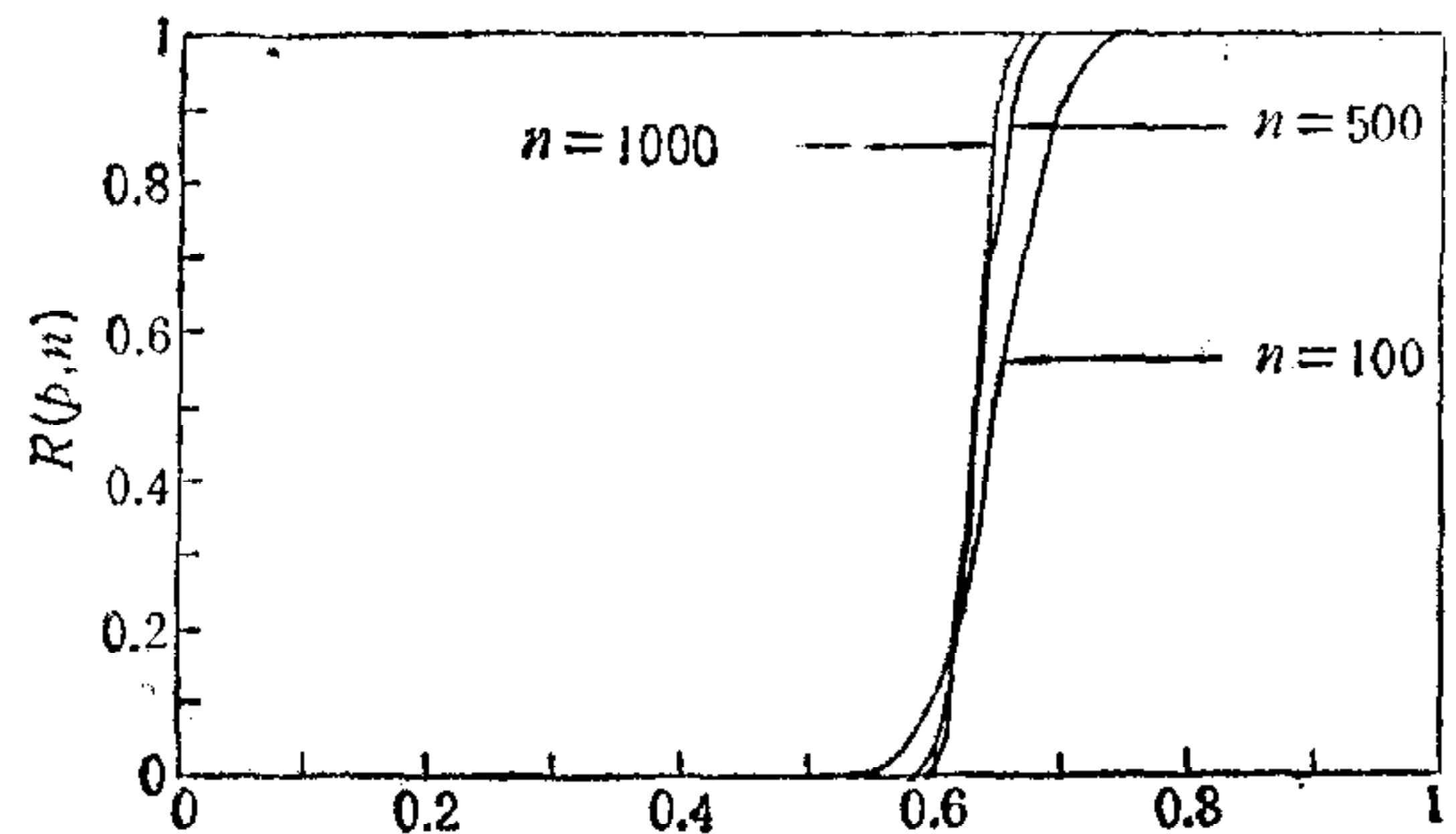


图 4

### 四、反相错误

假定输入  $I_1$  有  $i$  个没有发生反相错误,  $I_2$  有  $j$  个没有发生反相错误, 则当  $I_1$  输入为 0 时, 实际有  $n_1 - i$  个输入为 1, 当  $I_2$  输入为 0 时, 实际有  $n_2 - j$  个输入为 1. 考虑到这点, 并把 (5) 式代入 (7) 式可得

$$\left. \begin{aligned} &\frac{W_{211}}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + \frac{n_1 - i}{n_1} W_{111} + \frac{n_2 - j}{n_2} W_{121}\right)\right)} \\ &+ \frac{W_{221}}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + \frac{n_1 - i}{n_1} W_{112} + \frac{n_2 - j}{n_2} W_{122}\right)\right)} \geq a - W_{201} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{W_{211}}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + \frac{n_1 - i}{n_1} W_{111} + \frac{j}{n_2} W_{121}\right)\right)} \\
 & + \frac{W_{221}}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + \frac{n_1 - i}{n_1} W_{112} + \frac{j}{n_2} W_{122}\right)\right)} \leq -a - W_{201}, \\
 & \frac{W_{211}}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + \frac{i}{n_1} W_{111} + \frac{n_2 - j}{n_2} W_{121}\right)\right)} \\
 & + \frac{W_{221}}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + \frac{i}{n_1} W_{112} + \frac{n_2 - j}{n_2} W_{122}\right)\right)} \leq -a - W_{201}, \\
 & \frac{W_{211}}{1 + \exp\left(-\left(W_{101} + \frac{i}{n_1} W_{111} + \frac{j}{n_2} W_{121}\right)\right)} \\
 & + \frac{W_{221}}{1 + \exp\left(-\left(W_{102} + \frac{i}{n_1} W_{112} + \frac{j}{n_2} W_{122}\right)\right)} \geq a - W_{201}.
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由(12)式决定的区域记为  $\mathcal{Q}_f(i/n_1, j/n_2)$ 。取  $\Delta_2 = 0.4$ ，则  $a = 0.405465$ 。将表 2 的数据代入(12)式，可以画出  $\mathcal{Q}_f(i/n_1, j/n_2)$  如图 5 所示。

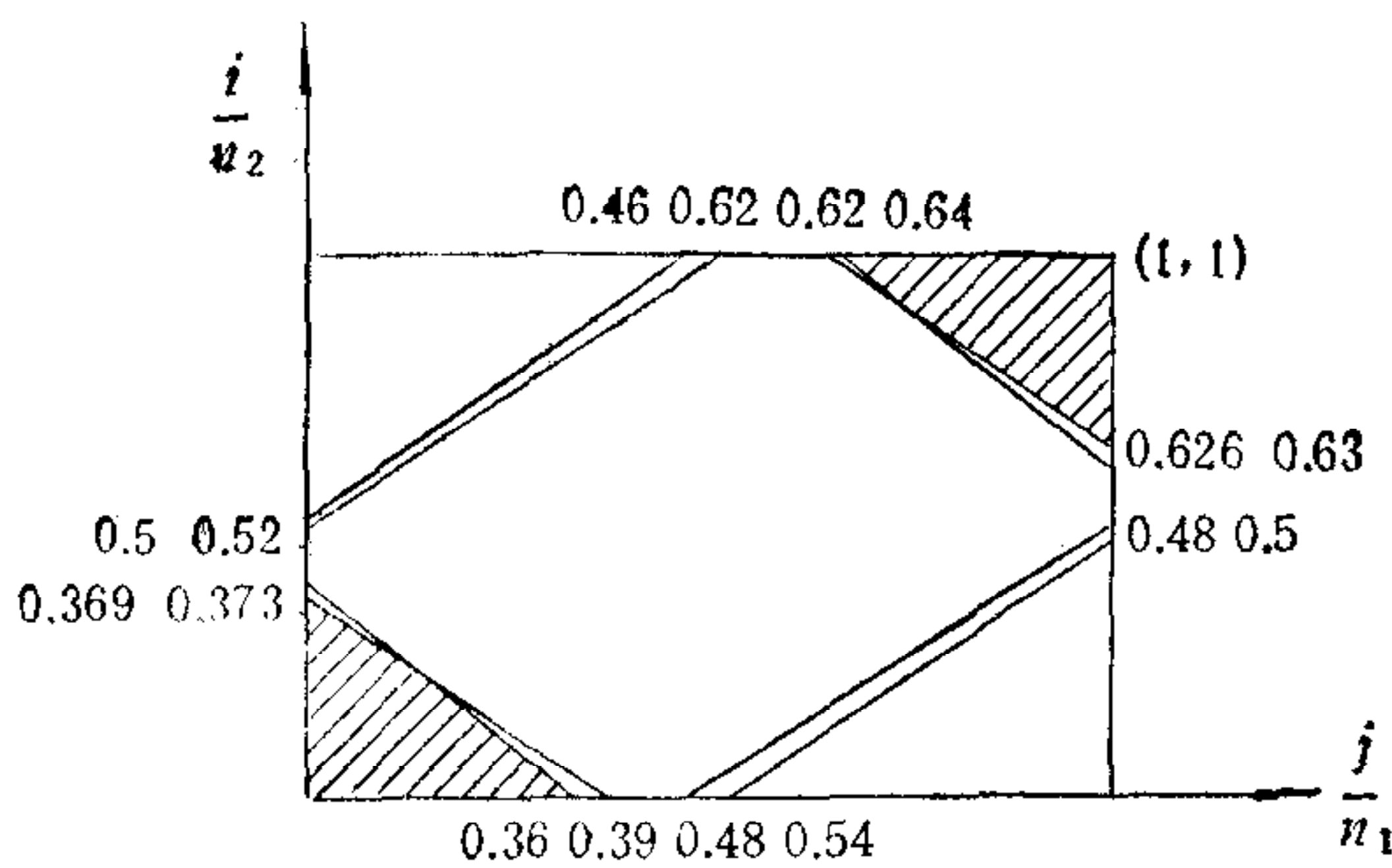


图 5

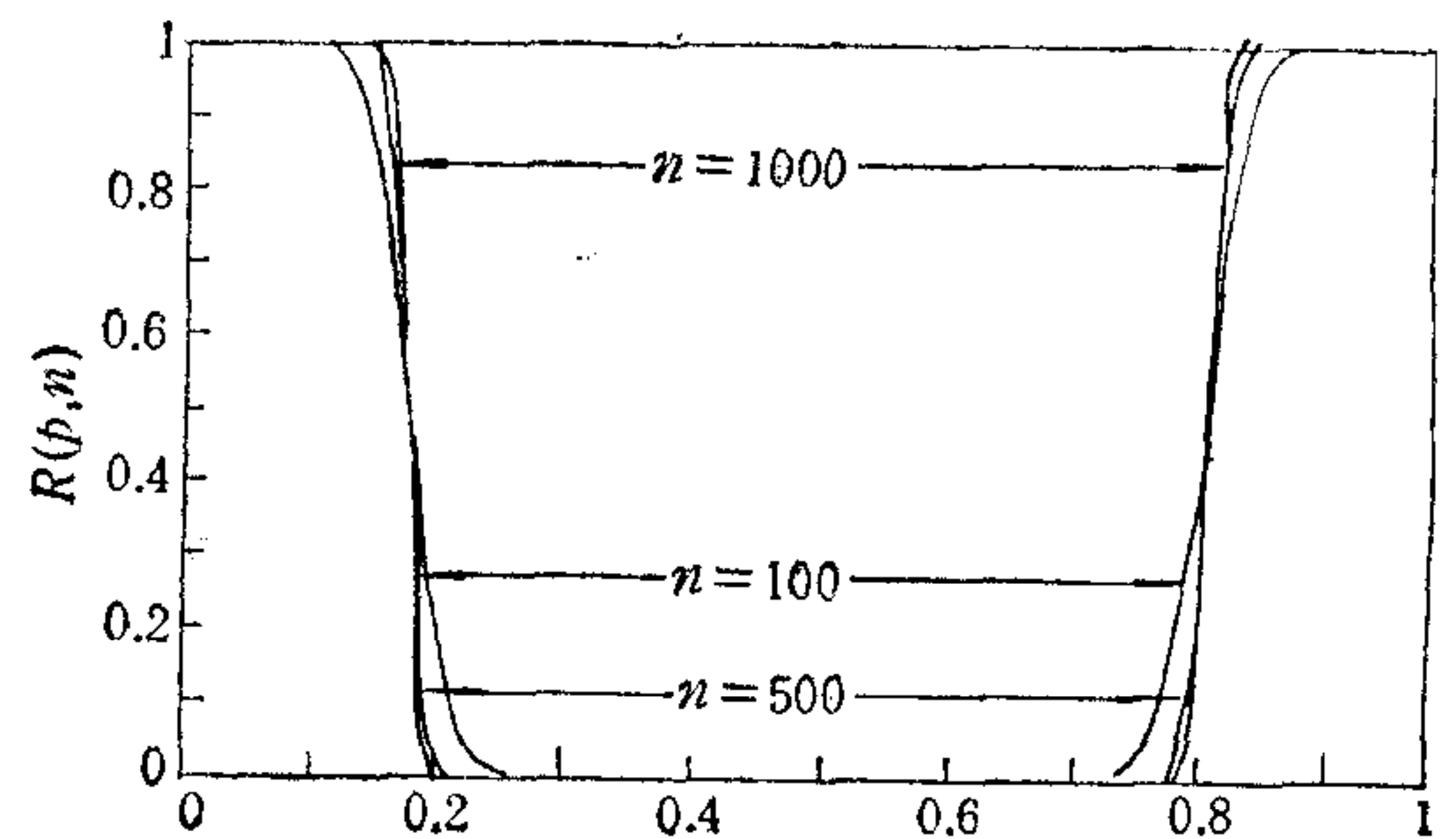


图 6

可以看出，当  $i/n_1$  和  $j/n_2$  都比较大或者都比较小时，即当  $I_1$  和  $I_2$  都多数发生反相错误或者都少数发生反相错误时，网络可以正确实现所有样本(误差为  $\Delta_2 = 0.4$ )。仍假定  $p_1$  和  $p_2$  为  $I_1$  和  $I_2$  正确输入的概率(输入可靠度)， $R(p_1, p_2, n_1, n_2, \mathcal{Q}_f)$  为网络正确实现所有样本的概率(网络可靠度)，则  $R$  的表达式类似于(11)式。仍然取

$$p_1 = p_2 = p, \quad n_1 = n_2 = n,$$

可以画出  $R(p, n)$  如图 6 所示。由图 6 可以看出，当输入可靠度  $p$  比较小或者比较大时 ( $p < 0.185$  或者  $p > 0.815$ )，系统可靠度比较大。而且随着  $n$  的增加， $R(p, n)$  逐渐趋于 1。

## 五、结 束 语

本文将输入错误分为死区错误和反相错误两种。通过增加输入重复数,使 BP 网络达到了对输入容错。讨论了输入错误的容许范围,给出了网络可靠度曲线图。对于死区错误,当输入可靠度大于转折点时,网络可靠度可接近于 1。对于反相错误,则当输入可靠度较大或较小时,均能使网络可靠度接近于 1。这是一个典型的非单调系统,即元件可靠度的减小反而可以使系统可靠度增加。这为非单调关联系统可靠性理论提供了一个实例。

## 参 考 文 献

- [1] 姚增起,用不可靠元件构造可靠系统及其神经网络实现,自动化学报, **16**(1990), (5), 429—435.
- [2] 姚增起,具有多种元件的 N 中取 K 容错系统及其可靠性,自动化学报, **18**(1992), (2), 249—251.
- [3] Richard P. Lippmann, An Introduction to Computing with Neural Nets, *IEEE ASSP Magazine* **4**(1987), 4—22.

## A HIGHLY RELIABLE RECONSTRUCTION OF A BP NETWORK WHEN INPUT ERRORS CONSIDERED

YAO ZENGQI

(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

### ABSTRACT

The input errors of BP(Back-Propagation) network are classified into dead point error and phase reversal error in this paper. A highly reliable reconstruction method for a BP network is proposed. The reliability problem of the reconstructed BP network is discussed under the above mentioned input errors respectively. It is shown that, when the probabilities that the inputs are correct (input reliabilities) are varying within a determined region, by increasing the number of inputs, the probability that the reconstructed BP network realizes the given function correctly (network reliability) may approach 1. The reconstructed BP network is fault tolerant to input errors to some extent.

**Key words :** BP network; input errors; dead point error; phase reversal error; reconstruction.





**姚增起** 生于1963年4月。1982年毕业于中国科技大学无线电电子学系,1984年和1988年在中国科学院自动化所分别获得硕士和博士学位。主要研究领域为:系统容错性和可靠性(特别是并行分布式处理的容错性和可靠性),经济决策支持系统。

### 《自动化博览》

《自动化博览》杂志是中国自动化学会主办的国内第一份自动化专业的综合性科普期刊。内容是:普及自动化科技知识,传播自动化科技信息,推广自动化实用技术,促进科技与生产的结合。栏目有:基础知识介绍,自动化论坛,控制理论,自动化仪表与装置,自动化元器件,计算机应用,人工智能,机器人,传感器,节能技术,家用电器自动化,自动化与当代军事,新技术,技术交流,实验与制作,讲座,科技动态,自动化科技发展史,现代企业及企业家介绍,自动化书刊评价等,文章力求图文并茂,深入浅出,具有知识性、通俗性、实用性和趣味性。

《自动化博览》16开本,32页,彩色封面逢双月出版,定价每期1.00元,全年6.00元,全国邮局发行,邮发代号:82-466。

地址:北京2728信箱,电话:2542466,邮政编码:100080。