第18卷 第5期
1992年9月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 18, No. 5
Sep., 1992

广义动态系统的微分算子矩阵方法[1)]

王 朝 珠
(中国科学院系统科学研究所，北京 100080)

摘 要

本文用微分算子矩阵方法讨论了一类广义动态系统的结构性质，并且用微分算子多项式矩阵的系数阵，给出了各类动态系统能控(观)性的直接判据. 它是用微分算子矩阵方法研究广义动态系统的开端.

关键词: 广义动态系统，微分算子多项式矩阵，能控(观)性.

一、引 言

线性系统理论的研究方法除了传递函数和状态空间方法外，尚有 Kalman 提出的模论方法，Rosenbrock 和 Wolovich 提出的微分算子矩阵方法以及 Wonham 提出的几何方法. 由于微分算子矩阵方法比状态空间方法更具有一般性，且微分算子矩阵方法与经典的传递函数方法(频域方法)有一种天然联系，致使微分算子矩阵方法在整个线性系统理论研究中有自己的独特地位. 目前广义动态系统的理论和应用研究绝大部分集中于状态空间方法(包括几何方法)[1-3]，间或有少量研究工作使用了传递函数方法[4]. 只要注意到广义动态系统比正常动态系统更具有一般性和微分算子矩阵方法在正常动态系统研究中的独特作用，可以预料用微分算子矩阵方法研究广义动态系统是一个值得深入探讨的领域. 本文用微分算子矩阵方法讨论了一类广义动态系统的结构性质. 仅仅是个开端.

给定用微分算子矩阵描述的动态系统

$$\Sigma_1:\ \begin{aligned} P(D)\boldsymbol{z}(t) &= Q(D)\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) &= R\boldsymbol{z}(t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

或

$$\Sigma_2:\ \begin{aligned} P(D)\boldsymbol{z}(t) &= Q\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) &= R(D)\boldsymbol{z}(t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $P(D)\in\mathscr{R}_{[D]}^{q\times q}$, $Q(D)\in\mathscr{R}_{[D]}^{q\times r}$, $\mathscr{R}(D)\in\mathscr{R}_{[D]}^{m\times q}$. $Q\in\mathscr{R}^{q\times r}$ $\mathscr{R}\in\mathscr{R}^{m\times q}$, $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是微分算子，$\boldsymbol{z}(t)\in\mathscr{R}^q$ 是分状态，$\boldsymbol{u}(t)\in\mathscr{R}^r$ 是控制输入，$\boldsymbol{y}(t)\in\mathscr{R}^m$ 是量测输出.

下面将要证明，动态系统 Σ_1 (或 Σ_2) 有唯一解的充要条件是 $\det P(D)\doteqdot 0$，即 Σ_1 (或 Σ_2) 为正则动态系统. 当 $P^{-1}(D)\ Q(D)$ (或 $R(D)\ P^{-1}(D)$) 为微分算子 D 的

本文于1991年2月26日收到.
1) 本文得到国家自然科学基金资助.

严格真有理分式阵时，则称 Σ_1（或 Σ_2）为正常动态系统；当 $P^{-1}(D)\ Q(D)$（或 $R(D)\ P^{-1}(D)$）为 D 的非严格真有理分式阵时，则称 Σ_1（或 Σ_2）为广义动态系统. 本文主要讨论正则广义动态系统 Σ_1（或 Σ_2）.

二、正则广义动态系统 Σ_1 的广义状态空间等价形式

给定正则广义动态系统

$$\Sigma_1:\ P(D)\boldsymbol{z}(t) = Q(D)\boldsymbol{u}(t), \tag{2.1a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = R\boldsymbol{z}(t). \tag{2.1b}$$

不失一般性，设多项式矩阵 $[P(D),Q(D)]$ 的行次 $\sigma_i = \partial_{ri}[P(D),Q(D)]$，$i=1,2,3,\cdots,q$ 满足

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_q, \tag{2.2}$$

否则重新排列 $\boldsymbol{z}(t)$ 和相应 $\boldsymbol{u}(t)$ 分量的次序即可做到.

由文献[5]知道，如果记

$$\begin{cases}\mu = \sigma_1,\\ n_j = \{\sigma_1 - j, \sigma_2 - j, \cdots, \sigma_q - j\}\text{中非负数个数}\ j=1,2,\cdots,\mu.\\ n_0 = q,\ n_{\mu+1} = 0,\\ \beta_j = n_j - n_{j+1},\ (j=0,1,\cdots,\mu)\end{cases} \tag{2.3}$$

则

$$\begin{cases}\beta \triangleq \sum\limits_{i=1}^{q}\sigma_i = \sum\limits_{j=1}^{\mu} n_j,\\ n_j = \sum\limits_{i=j}^{\mu}\beta_i, (j=0,1,2,\cdots,\mu)\\ n_j \geqslant n_{j+1}. \ (j=0,1,2,\cdots,\mu)\end{cases} \tag{2.4}$$

且多项式矩阵 $[P(D),Q(D)]$ 可按行次展成如下形式:

$$[P(D),Q(D)] = \sum_{j=0}^{\mu}\mathrm{diag}(D^{\sigma_i - j})[P_j, Q_j], \tag{2.5}$$

其中

$$[P_j, Q_j] \in \mathscr{R}^{n_j\times(n_0+r)},$$

$$\mathrm{diag}(D^{\sigma_i-j}) = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{D^{\mu-j}I_{\beta_\mu}\ D^{\mu-1-j}I_{\beta_{\mu-1}}\ \ddots\ I_{\beta_j}}}^{n_j} \\ \left[\begin{array}{cccc} D^{\mu-j}I_{\beta_\mu} & & & \\ & D^{\mu-1-j}I_{\beta_{\mu-1}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{\beta_j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n_j \\ \} \ n_0 - n_j. \end{array}$$

记

$$[P_j, Q_j] = \begin{bmatrix} P_{j\mu}, & Q_{j\mu} \\ P_{j\mu-1}, & Q_{j\mu-1} \\ \vdots & \vdots \\ P_{jj}, & Q_{jj} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \ \beta_\mu \\ \} \ \beta_{\mu-1} \\ \\ \} \ \beta_j \end{array} \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{x}_0(t) \triangleq z(t).$$

将式 (2.5), (2.6) 代入式 (2.1a) 中得

$$\begin{bmatrix} D^{\mu}[P_{0\mu}, Q_{0\mu}] + D^{\mu-1}[P_{1\mu}, Q_{1\mu}] + \sum_{j=0}^{\mu-2} D^j[P_{\mu-j\mu}, \ Q_{\mu-j\mu}] \\ D^{\mu-1}[P_{0\mu-1}, Q_{0\mu-1}] + D^{\mu-2}[P_{1\mu-1}, Q_{1\mu-1}] + \sum_{j=0}^{\mu-3} D^j[P_{\mu-1-j\ \ \mu-1}, Q_{\mu-1-j\ \ \mu-1}] \\ \vdots \\ D^2[P_{02}, Q_{02}] + D[P_{12}, Q_{12}] + [P_{22}, Q_{22}] \\ D[P_{01}, Q_{01}] + [P_{11}, Q_{11}] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = 0$$

$$[P_{00}, Q_{00}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = 0. \tag{2.7}$$

记

$$\begin{bmatrix} P_{0\mu}, & Q_{0\mu} \\ P_{0\mu-1}, & Q_{0\mu-1} \\ \vdots & \vdots \\ P_{02}, & Q_{02} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ P_{01}, & Q_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{11}(t) \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{x}_{12}(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\ n_1 - \beta_1 \\ \\ \}\ \beta_1 \end{matrix} = \boldsymbol{x}_1(t) \in \mathscr{R}^{n_1}. \tag{2.8}$$

由式 (2.7), (2.8) 得

$$\left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} D^{\mu-1}I_{\beta_\mu} & & \\ & D^{\mu-2}I_{\beta_{\mu-1}} \ddots & \\ & & DI_{\beta_2} \end{bmatrix} \left[\dot{\boldsymbol{x}}_{11} + \begin{bmatrix} P_{1\mu}, & Q_{1\mu} \\ P_{1\mu-1}, & Q_{1\mu-1} \\ \vdots & \vdots \\ P_{12}, & Q_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} \right] \\ & \quad + \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\mu-2} D^j[P_{\mu-j\mu}, Q_{\mu-j\mu}] \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{1} D^j[P_{3-j3}, Q_{3-j3}] \\ [P_{22}, Q_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = 0, \\ & [P_{11}, Q_{11}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} + \dot{\boldsymbol{x}}_{12} = 0, \\ & \begin{bmatrix} P_{0\mu}, & Q_{0\mu} \\ P_{0\mu-1}, & Q_{0\mu-1} \\ \vdots & \\ P_{00}, & Q_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} \triangleq [P_0, Q_0] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1. \end{aligned} \right. \tag{2.9}$$

取

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{11}(t) + \begin{bmatrix} P_{1\mu}, & Q_{1\mu} \\ \vdots & \\ P_{13}, & Q_{13} \\ P_{12}, & Q_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{21} \\ \cdots \\ \boldsymbol{x}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\ n_2 - \beta_2 \\ \\ \}\ \beta_2 \end{matrix} = \boldsymbol{x}_2(t) \in \mathscr{R}^{n_2} \tag{2.10}$$

将式 (2.10) 代入式 (2.9) 中得

$$
\begin{cases}
\begin{bmatrix} D^{\mu-2}I_{\beta_\mu} & & & \\ & D^{\mu-3}I_{\beta_{\mu-1}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & DI_{\beta_3} \end{bmatrix}
\left[\dot{\boldsymbol{x}}_{21} + \begin{bmatrix} P_{2\mu}, & Q_{2\mu} \\ \vdots & \\ P_{23}, & Q_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix}\right] \\
\quad + \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\mu-3} D^j [P_{\mu-j,\mu}, Q_{\mu-j\mu}] \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{1} D^j [P_{4-j4}, Q_{4-j4}] \\ [P_{33}, Q_{33}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = 0, \\
\dot{\boldsymbol{x}}_{22} + [P_{22}, Q_{22}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = 0, \\
\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_{11} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{1\mu}, & Q_{1\mu} \\ \vdots & \\ P_{11}, & Q_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{x}}_1 + [P_1, Q_1] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_2} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_2(t), \\
[P_0, Q_0] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(t).
\end{cases}
\tag{2.11}
$$

对式 (2.11) 继续上述步骤。最终可将式 (2.1) 化为如下形式:

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{x}}_\mu^{(t)} + [P_\mu, Q_\mu] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = 0, \\
\begin{bmatrix} -I_{n_\mu} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_\mu(t) + \dot{\boldsymbol{x}}_{\mu-1}^{(t)} + [P_{\mu-1}, Q_{\mu-1}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = 0, \\
\vdots \\
\begin{bmatrix} -I_{n_2} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_2(t) + \dot{\boldsymbol{x}}_1(t) + [P_1, Q_1] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = 0, \\
\begin{bmatrix} -I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(t) + [P_0, Q_0] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ -\boldsymbol{u}(t) \end{bmatrix} = 0, \\
\boldsymbol{y}(t) = R\boldsymbol{x}_0(t).
\end{cases}
\tag{2.12}
$$

记
$$
E = \begin{bmatrix} I_\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{n\times n} \cdot B = [Q_\mu^T, Q_{\mu-1}^\tau \cdots Q_1^\tau, Q_0^\tau]^\tau \in \mathscr{R}^{n\times r},
$$

$$
\begin{cases}
A = \begin{bmatrix} 0 & & & & -P_\mu \\ \begin{pmatrix} I_{n_\mu} \\ 0 \end{pmatrix} & \ddots & & & -P_{\mu-1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -P_1 \\ & & & \begin{pmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix} & -P_0 \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{n\times n} C = [0, R] \in \mathscr{R}^{m\times n}, \\
\boldsymbol{x}(t) = [\boldsymbol{x}_\mu^\tau, \boldsymbol{x}_{\mu-1}^\tau \cdots \boldsymbol{x}_1^\tau, \boldsymbol{x}_0^\tau]^\tau \in \mathscr{R}^n.
\end{cases}
\tag{2.13}
$$

其中 $n=\sum_{j=0}^{\mu} n_j=\beta+n_0$. 则式(2.12)变为

$$E\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), \tag{2.14a}$$

$$y(t)=Cx(t), \tag{2.14b}$$

式(2.14)是标准的广义状态空间形式.

当 $\sigma_j>0,\ j=1,2,\cdots,q$ 且 $P^{-1}(D)Q(D)$ 是严格真有理分式阵时,则

$$\beta_0=n_0-n_1=0,\ Q_0=0.$$

若 $\det P_0\neq 0$, 则由式(2.12)直接得 $x_0=P_0^{-1}x_1$. 此时,式(2.14)退化为

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t)&=\tilde{A}\tilde{x}(t)+\tilde{B}u(t),\\ y(t)&=\tilde{C}\tilde{x}(t).\end{aligned} \tag{2.15}$$

其中

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}0 & & & -P'_\mu\\ \ddots & & & -P'_{\mu-1}\\ \begin{pmatrix}I_{n_\mu}\\0\end{pmatrix} & \ddots & 0 & -P'_2\\ & \ddots & & \\ & & \begin{pmatrix}I_{n_2}\\0\end{pmatrix} & -P'_1\end{bmatrix}\in\mathscr{R}^{\beta\times\beta},\quad \tilde{B}=[Q^\tau_\mu,Q^\tau_{\mu-1}\cdots Q^\tau_1]^\tau\in\mathscr{R}^{\beta\times r},$$

$$\tilde{C}=[0,R]\in\mathscr{R}^{m\times\beta},\quad P'_j=P_jP_0^{-1},\ (j=1,2,\cdots,\mu)$$

$$\tilde{x}=[x^\tau_\mu\ x^\tau_{\mu-1}\cdots x^\tau_1]^\tau.$$

式(2.15)是动态系统(2.1)的正常状态空间形式.

上述转化过程表明:对给定的控制 $u(t)$, 如果 $z(t)\triangleq x_0(t)$ 是式(2.1a)的解,则 $x(t)=[x^\tau_\mu x^\tau_{\mu-1}\cdots x^\tau_1 x^\tau_0]^\tau$ 是式(2.14a)对应于同一控制 $u(t)$ 的解. 反之对给定控制 $u(t)$,如果 $x(t)=[x^\tau_\mu\ x^\tau_{\mu-1}\cdots x^\tau_1\ x^\tau_0]^\tau$ 是式(2.14a)的解,则可证明 $z(t)\triangleq x_0(t)$ 必是式(2.1a)对应于同一控制 $u(t)$ 的解. 事实上,直接计算可知

$$[DE-A,\ B]=U(D)\begin{bmatrix}I_\beta & 0 & 0\\ 0 & P(D), & Q(D)\end{bmatrix}V(D), \tag{2.16}$$

其中

$$U(D)=\begin{bmatrix}U_{11}(D) & U_{12}(D)\\ U_{21}(D) & U_{22}(D)\end{bmatrix}\in\mathscr{R}^{n\times n}_{[D]},\quad V(D)=\begin{bmatrix}I_\beta & F_P(D) & F_Q(D)\\ 0 & I_{n_0} & 0\\ 0 & 0 & I_r\end{bmatrix}\in\mathscr{R}^{(n+r)\times(n+r)}_{[D]},$$

$$U_{11}(D)=\begin{bmatrix}DI_{n_\mu} & & & 0\\ \begin{pmatrix}-I_{n_\mu}\\0\end{pmatrix} & DI_{n_{\mu-1}} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix}-I_{n_2}\\0\end{pmatrix} & DI_{n_1}\end{bmatrix}\in\mathscr{R}^{\beta\times\beta}_{[D]}\quad U_{21}(D)=\begin{bmatrix}0 & \begin{pmatrix}-I_{n_1}\\0\end{pmatrix}\end{bmatrix}\in\mathscr{R}^{n_0\times\beta},$$

$$U_{12}=\begin{bmatrix} I_{\beta_\mu} & & & 0 \\ \begin{pmatrix}0\\ I_{\beta_{\mu-1}}\end{pmatrix} & \boldsymbol{0} & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \begin{pmatrix}0\\ I_{\beta_2}\end{pmatrix} & 0 \\ \boldsymbol{0} & & & \begin{pmatrix}0\\ I_{\beta_1}\end{pmatrix} \; 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \}\, n_\mu \\ \}\, n_{\mu-1} \\ \\ \}\, n_2 \\ \}\, n_1 \end{matrix} \in \mathscr{R}^{\beta\times n_0}\quad U_{22}=\left[0\quad \begin{pmatrix}0\\ I_{\beta_0}\end{pmatrix}\right]\in \mathscr{R}^{n_0\times n_0},$$

$$[F_P(D),F_Q(D)]=\begin{bmatrix} -\sum\limits_{j=0}^{\mu-1} D^j[P_{\mu-1-j\mu},\ Q_{\mu-1-j\mu}] \\ -\sum\limits_{j=0}^{\mu-2} D^j\begin{bmatrix}P_{\mu-2-j\mu}, & Q_{\mu-2-j\mu}\\ P_{\mu-2-j\mu-1}, & Q_{\mu-2-j\mu-1}\end{bmatrix} \\ \vdots \\ -\sum\limits_{j=0}^{1} D^j\begin{bmatrix}P_{1-j\mu}, & Q_{1-j\mu}\\ P_{1-j\mu-1}, & Q_{1-j\mu-1}\\ \vdots & \\ P_{1-j2}, & Q_{1-j2}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}P_{0\mu}, & Q_{0\mu}\\ P_{0\mu-1}, & Q_{0\mu-1}\\ \vdots & \vdots\\ P_{01}, & Q_{01}\end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{matrix} \}\, n_\mu \\ \}\, n_{\mu-1} \\ \\ \}\, n_2 \\ \}\, n_1 \end{matrix} \in \mathscr{R}_{[D]}^{\beta\times(n_0+r)}$$

且 $\det U(D)=(-1)^\beta$，$\det V(D)=1$，即 $U(D)$，$V(D)$ 皆为单位模阵。由式 (2.1)，(2.14)，(2.16) 直接得

$$\begin{bmatrix}DE-A, & B\\ C, & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U(D) & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}I_\beta & 0\\ 0 & P(D)\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\ Q(D)\end{pmatrix}\\ (0 \quad R) & 0\end{bmatrix}V(D). \tag{2.17}$$

对给定的控制 $\boldsymbol{u}(t)$，设 $\boldsymbol{x}^\tau=[\boldsymbol{x}_\mu^\tau,\boldsymbol{x}_{\mu-1}^\tau\cdots\boldsymbol{x}_1^\tau\vdots\boldsymbol{x}_0^\tau]\triangleq[\boldsymbol{x}_\beta^\tau\boldsymbol{x}_0^\tau]$ 是式 (2.14a) 的解。由式 (2.14a) 和(2.16)直接得

$$\begin{bmatrix}U_{11}(D) & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_\beta & 0 & 0\\ 0 & P(D) & Q(D)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_\beta & F_P(D) & F_Q(D)\\ 0 & I_{n_0} & 0\\ 0 & 0 & I_r\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_\beta(t)\\ \boldsymbol{x}_0(t)\\ -\boldsymbol{u}(t)\end{bmatrix}=0. \tag{2.18}$$

只要注意到 $U(D)$ 是单位模阵，由式 (2.18) 直接得

$$\begin{bmatrix}I_\beta & F_P(D) & F_Q(D)\\ 0 & P(D) & Q(D)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_\beta(t)\\ \boldsymbol{x}_0(t)\\ -\boldsymbol{u}(t)\end{bmatrix}=0, \tag{2.19}$$

因而有

$$[P(D)Q(D)]\begin{bmatrix} x_0(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = 0. \tag{2.20}$$

即 $x_0(t)$ 是广义动态系统（2.1a）对应于控制 $u(t)$ 的解。

综上所述可得

定理 2.1. 广义动态系统（2.1a）和广义状态空间系统（2.14a）的解是一一对应的。对给定的控制 $u(t)$，如果 $x_0(t) \triangleq z(t)$ 是式（2.1a）的解，则

$$x(t) = [x_\mu^\tau,\ x_{\mu-1}^\tau, \cdots x_1^\tau\ x_0^\tau]^\tau$$

必是式（2.14a）对应于同一控制的解；反之，对给定的控制 $u(t)$，如果 $x = [x_\mu^\tau x_{\mu-1}^\tau \cdots x_1^\tau x_0^\tau]^\tau$ 是式（2.14a）的解，则 $z(t) \triangleq x_0(t)$ 必是式（2.1a）对应于同一控制 $u(t)$ 的解。且广义动态系统(2.1)和广义状态空间系统(2.14)是在单位模意义下等价的。

由式(2.17)注意到 $\det U(D) = (-1)^\beta$，直接得

$$\begin{cases} DE - A = U(D)\begin{bmatrix} I_\beta & F_P(D) \\ 0 & P(D) \end{bmatrix}, \\ \det(DE - A) = (-1)^\beta \det P(D). \end{cases} \tag{2.21}$$

已知广义状态空间系统（2.14）解存在并且唯一的充要条件是 $\det(DE - A) \not\equiv 0$，从式(2.21)和定理 2.1 得

定理 2.2. 广义动态系统(2.1)解存在且唯一的充要条件为 $\det P(D) \not\equiv 0$，即广义动态系统(2.1)是正则的。

由于广义状态空间系统的阶数为 $\sum_{j=1}^{q} \sigma_j + q$，因此称式(2.1)为 $\sum_{j=1}^{q} \sigma_j + q$ 阶广义动态系统。

类似方法可讨论广义动态系统(1.2)，亦有相应的结论。只需将 $[P^\tau(D), R^\tau(D)]^\tau$ 按列次展开代替 $[P(D), Q(D)]$ 的按行次展开。其余步骤类似。

三、正则广义动态系统的结构性质

由式(2.13)易知，如果记

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 \triangleq [x_\mu^\tau, x_{\mu-1}^\tau \cdots x_1^\tau]^\tau,\quad \tilde{x}_2 = x_0, \\ A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ \begin{pmatrix} I_{n_\mu} \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \ddots\begin{pmatrix} I_{n_2} \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{\beta\times\beta}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -P_\mu \\ -P_{\mu-1} \\ \vdots \\ -P_1 \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{\beta\times n_0}, \\ B_1 = \begin{bmatrix} Q_\mu \\ Q_{\mu-1} \\ \vdots \\ Q_1 \end{bmatrix} \in \mathscr{R}^{\beta\times r}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{21} = \left[0 \quad \begin{pmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \in \mathscr{R}^{n_0 \times \beta}, \ A_{22} = [-P_0] \in \mathscr{R}^{n_0 \times n_0}, \ B_2 = [Q_0] \in \mathscr{R}^{n_0 \times r}, \\ C_1 = \begin{cases} [0] \in \mathscr{R}^{m \times \beta}, \ \text{当} \ m \leqslant q = n_0 \\ [0, R_1] \in \mathscr{R}^{m \times n_0}, \ \text{当} \ m > q = n_0 \end{cases} \\ C_2 = \begin{cases} [0 \ \ R] \in \mathscr{R}^{m \times \beta}, \ \text{当} \ m \leqslant q = n_0 \\ R_2 \in \mathscr{R}^{m \times n_0}, \ \text{当} \ m > q = n_0 \end{cases} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$R = [\underbrace{R_1}_{m-n_0}, \underbrace{R_2}_{n_0}].$$

则式 (2.14) 变为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1(t) = A_{11}\tilde{\boldsymbol{x}}_1(t) + A_{12}\tilde{\boldsymbol{x}}_2(t) + B_1\boldsymbol{u}(t), \\ 0 = A_{21}\tilde{\boldsymbol{x}}_1(t) + A_{22}\tilde{\boldsymbol{x}}_2(t) + B_2\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = C_1\tilde{\boldsymbol{x}}_1(t) + C_2\tilde{\boldsymbol{x}}_2(t). \end{cases} \tag{3.2}$$

由式 (2.16) 易知

$$\mathrm{Rank}[DE - A, B] = \beta + \mathrm{Rank}[P(D), Q(D)],$$

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} DE - A \\ C \end{bmatrix} = \beta + \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} P(D) \\ R \end{bmatrix}. \ \forall D \in \mathscr{C} \ \text{有限} \tag{3.13}$$

因而有

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Rank}[DE - A, B] = n \Longleftrightarrow \mathrm{Rank}[P(D), Q(D)] = n_0 = q, \\ &\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} DE - A \\ C \end{bmatrix} = n \Longleftrightarrow \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} P(D) \\ R \end{bmatrix} = n_0 = q. \end{aligned}\right\} \ \forall D \in \mathscr{C} \ \text{有限} \tag{3.4}$$

只要注意到式 (3.4)，由广义状态空间系统 (2.14) 的各种能控(稳)、能观(检测)性判据[1]和多项式矩阵的性质[6]直接得如下定理.

定理 3.1.

1) 正则广义动态系统 (2.1) R-能控的充要条件是 $P(D)$ 和 $Q(D)$ 左互质；

2) 正则广义动态系统 (2.1) 能稳的充要条件是 $P(D)$ 和 $Q(D)$ 左拟互质；

3) 正则广义动态系统 (2.1) 脉冲能控的充要条件是

$$\mathrm{Rank}[-P_0, Q_0] = \mathrm{Rank}[P_0, Q_0] = n_0 = q.$$

即多项式矩阵 $[P(D), Q(D)]$ 是行正则的；

4) 正则广义动态系统 (2.1) 强能控的充要条件是

(1) $P(D)$ 和 $Q(D)$ 左互质，

(2) 多项式矩阵 $[P(D), Q(D)]$ 是行正则的；

5) 正则广义动态系统 (2.1) 完全能控的充要条件是

(1) $P(D)$ 和 $Q(D)$ 左互质.

(2) $\mathrm{Rank}[Q_0] = q = n_0$ 即存在 $M \in \mathscr{R}^{r \times q}$ 使得 $P_0 = Q_0 M$.

定理 3.2.

1) 正则广义动态系统 (2.1) R-能观的充要条件是 $P(D)$ 和 R 右互质；

2) 正则广义动态系统 (2.1) 为能检测的充要条件是 $P(D)$ 和 R 右拟互质;

3) 正则广义动态系统 (2.1) 为脉冲能观的充要条件是

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}-P_0\\C_2\end{bmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}P_0\\C_2\end{bmatrix}=n_0=q;$$

4) 正则广义动态系统 (2.1) 为强能观的充要条件是

(1) $P(D)$ 和 R 右互质,

(2) $\mathrm{Rank}\begin{bmatrix}P_0\\C_2\end{bmatrix}=n_0=q$;

5) 正则广义动态系统 (2.1) 为完全能观的充要条件是

(1) $P(D)$ 和 R 右互质,

(2) $\mathrm{Rank}C_2=n_0=q$.

注 1. 由定理 3.1 (3.2) 的 5) 知,如果系统 (2.1) 是完全能控(观)的,必有 $\mathrm{Rank}Q_0=q$ ($\mathrm{Rank}C_2=q$), 从而得 $r(m)\geqslant q$. 即为保证系统 (2.1) 是完全能控(观)的, 其控制(量测)变量的维数必不能小于分状态变量的维数.

注 2. 利用对偶原理关于正则广义动态系统 (1.2) 亦有相应结论.

参 考 文 献

[1] 王朝珠、戴立意,广义动态系统,控制理论与应用, **3**(1986), 1—12.

[2] Zhou, Z, M, A Shaymann and T. J. Tan. Singular Systems A New Approch in Time Domain *IEEE Trans Aut Control* **AC-32** (1987), 42—50.

[3] Cobb, J. D., Controllability, Observability and Duality in Singular Systems, *IEEE Trans Aut. Contr.* **AC-29** (1984), 1076—1082.

[4] Kucera. V., Realizing the Action of A Cuscade Compensator by State Feedback, Preprinte 11th IFAC World Congress Tallin EStonia USSR, (1990), 207—211.

[5] 韩京清等,线性系统理论代数基础,辽宁科学技术出版社 (1985).

[6] 王朝珠、王恩平,多变量线性控制系统引论——微分算子多项式矩阵方法,科学出版社 (1987).

DIFFERENTIAL OPERATOR METHOD FOR SINGULAR DYNAMIC SYSTEMS

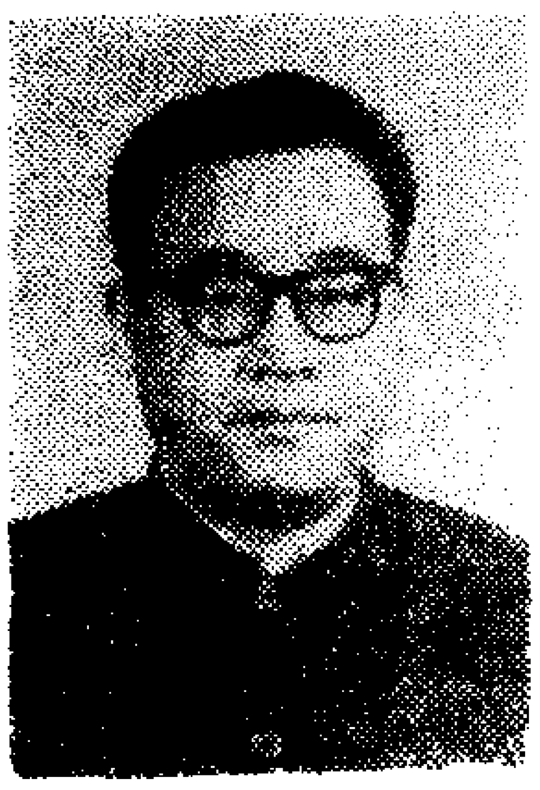
WANG CHAOZHU

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing 100080)

ABSTRACT

In this paper, the structural properties of a kind of singular dynamical system are discussed by using the differential operator method. The polynomial matrix criteria of controllability and observability related to such systems are presented.

Key words: Singular dynamical system; differential operator polynomial matrix; controllability; observability.



王朝珠　1936年生于山东平原．1961年毕业于天津大学数学物理系．1961年至1979年在中国科学院数学研究所工作．1979年后在中国科学院系统科学研究所工作．现为研究员．多年来主要从事导引、制导与控制，线性系统理论，广义动态系统，最优控制，Robust 控制器设计的理论和应用研究工作．先后发表学术论文40多篇．

征集自动化领域新名词

中国自动化学会受全国自然科学名词审定委员会的委托，拟在一年左右时间内收集、审定一批近几年国内外出现的自动化领域的新名词，以全国自然科学名词审定委员会名义出版草案本，在听取社会反映后再进行正式审定公布．

我会特请全国从事自动化领域的科技工作者积极参与收集、提供，于1992年12月底以前直接寄交中国自动化学会办公室（100080，北京2729信箱）．一经采用，将以适当方式公布提供者名单及予以适当报酬．

所收词条应包括以下信息：汉文名、英文名、出处、注释、备注．注释中包含名词的概念、定义、使用领域及范围等有关说明．

例．汉语名：工效学

英文名：Ergonomics

出处：×××(论文或著作)，××杂志(出版社)，1992年．

注释：工效学是一门研究人与其所处工作和生活环境之间相互关系，以适应人体解剖学、生理学、心理学的要求，从而达到提高工作效率和安全、健康、舒适为目的的学科．

备注：19××年开始见诸于文献，已较广泛(或开始)使用．

中国自动化学会办公室

1992年6月