

系统参数估计的一种快速多步最小二乘法¹⁾

周波 涂植英
(南京航空学院) (重庆大学)

摘 要

本文通过对线性离散单变量系统多步最小二乘法 (MSLS) 的研究, 总结出一种快速多步最小二乘法 (FMLS), 它减少了 MSLS 的计算量及存储量. 仿真结果表明, FMLS 在运算速度、估计精度等方面均优于 MSLS, COR-LS 和 LS 法. FMLS 的估计是一致性的. 因此, FM-LS 是一种具有实用价值的较好的辨识技术.

一、快速多步最小二乘法

考虑下列差分方程描述的系统^[1]

$$\begin{aligned} A(q^{-1})x(k) &= B(q^{-1})u(k), \\ y(k) &= x(k) + v(k). \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $u(k)$, $y(k)$ 为系统输入输出测量信号; $x(k)$ 为系统输出信号; $v(k)$ 为随机噪声; q^{-1} 为反向移位算子; $A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 是 q^{-1} 的多项式, 即

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}, \\ B(q^{-1}) &= b_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-n}. \end{aligned} \tag{2}$$

设系统是稳定的, n 为已知, 输入 $u(k)$ 为持续激励信号.

引入一个相关噪声白化滤波器

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_mq^{-m}, \tag{3}$$

使

$$C(q^{-1})A(q^{-1})v(k) = e(k). \tag{4}$$

其中 $e(k)$ 为白色残差. 由式(1)和(4)得辅助模型(也称扩大模型)为

$$E(q^{-1})y(k) = F(q^{-1})u(k) + e(k). \tag{5}$$

其中

$$E(q^{-1}) = C(q^{-1})A(q^{-1}) = 1 + e_1q^{-1} + \dots + e_{m+n}q^{-(m+n)}, \tag{6}$$

$$F(q^{-1}) = C(q^{-1})B(q^{-1}) = f_1q^{-1} + \dots + f_{m+n}q^{-(m+n)}. \tag{7}$$

辅助模型参数的最小二乘无偏估计为

$$\alpha = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\mathbf{y}. \tag{8}$$

本文于1986年3月31日收到.

1) 本文原文曾在1986年11月深圳全国自动化技术应用学术交流会上宣读.

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [e_1, e_2 \cdots e_{m+n}, f_1, f_2 \cdots f_{m+n}]^T, \\ \mathbf{y} &= [y(m+n+1), \cdots, y(N)]^T, \\ \Phi &= \begin{bmatrix} -y(m+n) & \cdots & -y(1) & u(m+n) \cdots & u(1) \\ -y(m+n+1) \cdots & -y(2) & u(m+n+1) \cdots & u(2) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -y(N-1) & \cdots & -y(N-m-n) & u(N-1) \cdots & u(N-m-n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

N 为观测数据长度.

式(8)可改写成

$$\mathbf{a} = R^{-1}Q. \tag{9}$$

式中

$$R = \frac{1}{N-m-n} \Phi^T \Phi, \quad Q = \frac{1}{N-m-n} \Phi^T \mathbf{y}.$$

根据文献[1, 2],并注意到互相关和自相关函数的性质,矩阵 R, Q 可用相关函数表示成

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(1) \cdots r_{yy}(m+n-1) & -r_{uy}(0) & -r_{uy}(1) \cdots & -r_{uy}(m+n-1) \\ & r_{yy}(0) \cdots r_{yy}(m+n-2) & -r_{yu}(1) & -r_{uy}(0) \cdots & -r_{uy}(m+n-2) \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & r_{yy}(0) & -r_{yu}(m+n-1) & -r_{yu}(m+n-2) \cdots & -r_{uy}(0) \\ \hline & & r_{uu}(0) & r_{uu}(1) & \cdots & r_{uu}(m+n-1) \\ & & & r_{uu}(0) & \cdots & r_{uu}(m+n-2) \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & r_{uu}(0) \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} R_{yy} & -R_{uy} \\ \hline -R_{uy}^T & R_{uu} \end{array} \right]. \end{aligned} \tag{10}$$

(与上三角形中的元素对称)

利用分块矩阵求逆定理,可得

$$R^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R_1 & R_2 \\ \hline R_2^T & R_3 \end{array} \right]. \tag{11}$$

当输入为周期性二位式 m 序列时, R_{uu}^{-1} 可表示成

$$R_{uu}^{-1} = \frac{N_p}{a^2(N_p+1)(N_p+1-p)} \begin{bmatrix} N_p - p + 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & N_p - p + 2 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & N_p - p + 2 \end{bmatrix}_{p \times p} \tag{12}$$

其中 a 和 N_p 分别为 m 序列的幅值和周期长度, $p = m + n$.

令 $Q = R_{uu}^{-1}$ 及 $W = R_{uy}Q$,

则 $R_1 = [R_{yy} - WR_{uy}^T]^{-1}, R_2 = R_1W, R_3 = Q + W^TR_2.$ (13)

取 $\eta_1 = \frac{N_p}{a^2(N_p+1)(N_p+1-m-n)}, \eta_2 = \frac{N_p}{a^2(N_p+1)}.$ (14)

并令 $r_1 = r_{uy}(0) + r_{uy}(1) + \cdots + r_{uy}(m+n-1),$
 $r_2 = r_{yu}(1) + r_1 - r_{uy}(m+n-1),$
 \vdots
 $r_{m+n} = r_{yu}(m+n-1) + r_{m+n-1} - r_{uy}(1).$ (15)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \dots \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & \dots & F_{n-1} & -T_0 & -S_1 & \dots & -S_{n-1} \\ & F_0 & \dots & F_{n-2} & -T_1 & -T_0 & \dots & -S_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & F_0 & -T_{n-1} & -T_{n-2} & \dots & -T_0 \\ \hline & & & & E_0 & E_1 & \dots & E_{n-1} \\ & & & & & E_0 & \dots & E_{n-2} \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & E_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ \vdots \\ -F_n \\ \dots \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

(与上三角形中的元素对称)

或简写成

$$\theta = X^{-1}z.$$

其中

$$X = \left[\begin{array}{c|c} X_1 & -X_2 \\ \hline -X_2^T & X_3 \end{array} \right]. \quad (22)$$

而

$$X^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} P_1 & P_2 \\ \hline P_2^T & P_3 \end{array} \right]. \quad (23)$$

同前,有

$$P_0 = X_2 X_3^{-1}, P_1 = [X_1 - P_0 X_2^T]^{-1}, P_2 = P_1 P_0, P_3 = X_3^{-1} + P_0^T P_2.$$

现归纳用 FMLS 求系统参数估计步骤如下:

- 1) 计算相关函数: $r_{uy}(i)$, $r_{yu}(i)$ 和 $r_{yy}(i)$;
- 2) 构成由式(10)定义的矩阵 R_{yy} , R_{uy} 及 Q ;
- 3) 由式(14),(15),(16)和(17)计算矩阵 W ,然后由式(13)和(11)计算 R^{-1} ;
- 4) 由式(9)求取辅助模型参数 LS 估计 α ;
- 5) 将估计量 e_i , f_i 代入式(20),形成 E_i , F_i , S_i 及 T_i , 然后由式(23)计算 X^{-1} ;
- 6) 由式(21)计算系统参数估计 θ .

可以证明, FMLS 的参数估计是一致性的.

二、乘除运算次数和仿真比较

表 1 给出 FMLS 与 MSLS 离线和递推算法所需乘除运算次数的比较. 表 2 给出

表 1 离线和递推算法的乘除次数比较

系统模型阶数, n	1	2		3		
噪声模型阶数, m	1	1	2	1	2	3
离线算法乘除次数比较 $\eta_{\text{离线}} = \left(\frac{\text{FMLS}}{\text{MSLS}} \right)_{\text{离线}}$	50%	37%	30%	30%	25%	21%
递推算法乘除次数比较 $\eta_{\text{递推}} = \left(\frac{\text{FMLS}}{\text{MSLS}} \right)_{\text{递推}}$	29%	21%	16%	16%	13%	11%

表 2 离线及递推算法的计算时间比较(单位: 秒)

仿真对象	实现方式 算法 计算 时间	离线算式(数据长度 $N = 450$)				递推算法(递推100步)			
		FMLS	MSLS	LS	COR-LS	FMLS	MSLS	LS	COR-LS
一阶系统		44	150	52	56	30	105	39	48
二阶系统		69	281	146	120	41	203	101	98
三阶系统		95	462	272	165	52	336	199	127

FMLS 与 MSLS 和其它方法的计算时间比较。

图 1, 2 给出了典型二阶振荡系统

$$(1.0 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2})y(k) = (1.0q^{-1} + 0.5q^{-2})u(k) + \xi(k)$$

$$(1.0 + 0.5q^{-1})\xi(k) = e(k)$$

的参数估计的相对误差 (ER)^[3] 曲线。

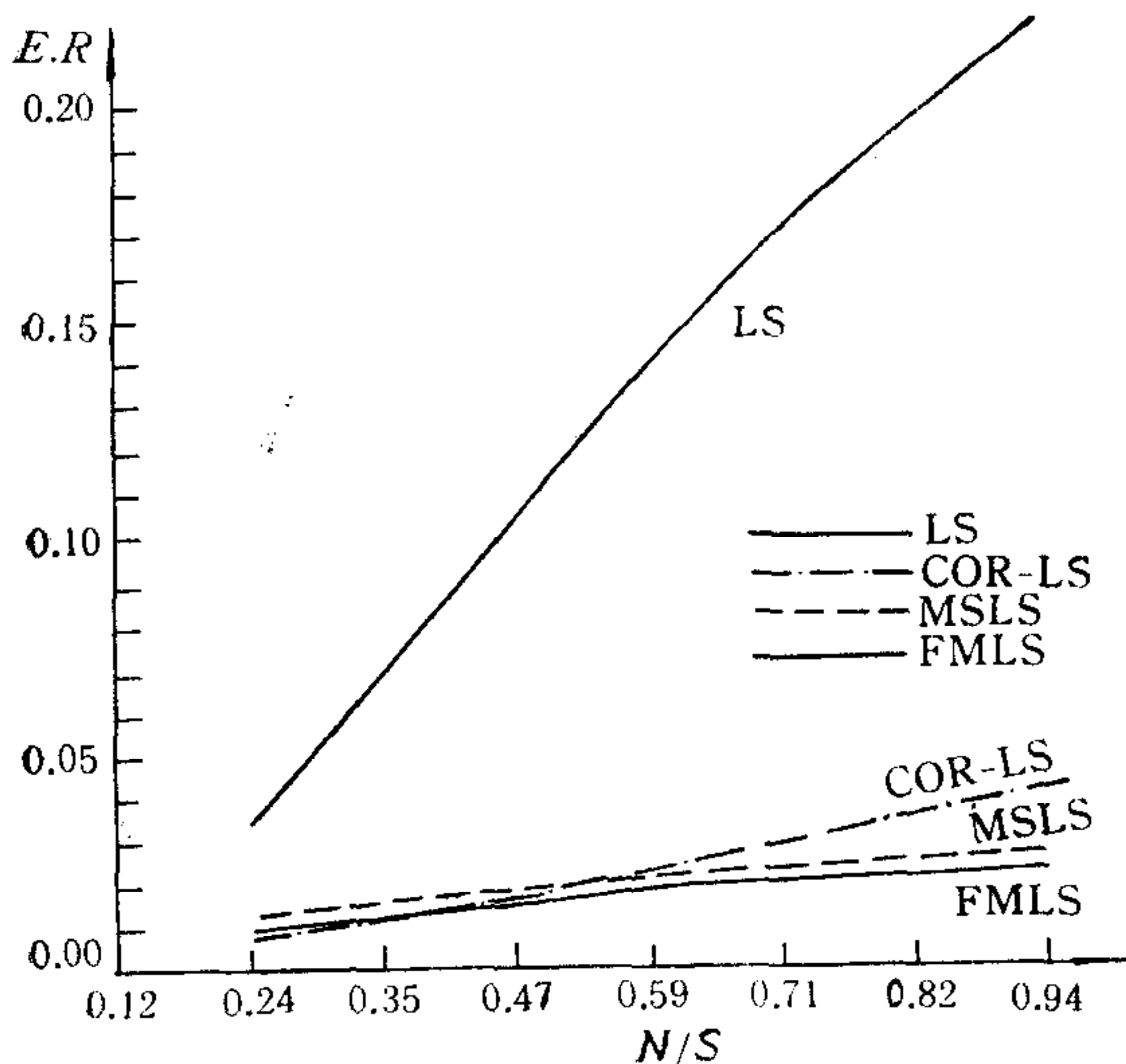


图 1 不同噪信比下参数估计的相对误差
($N = 450$)

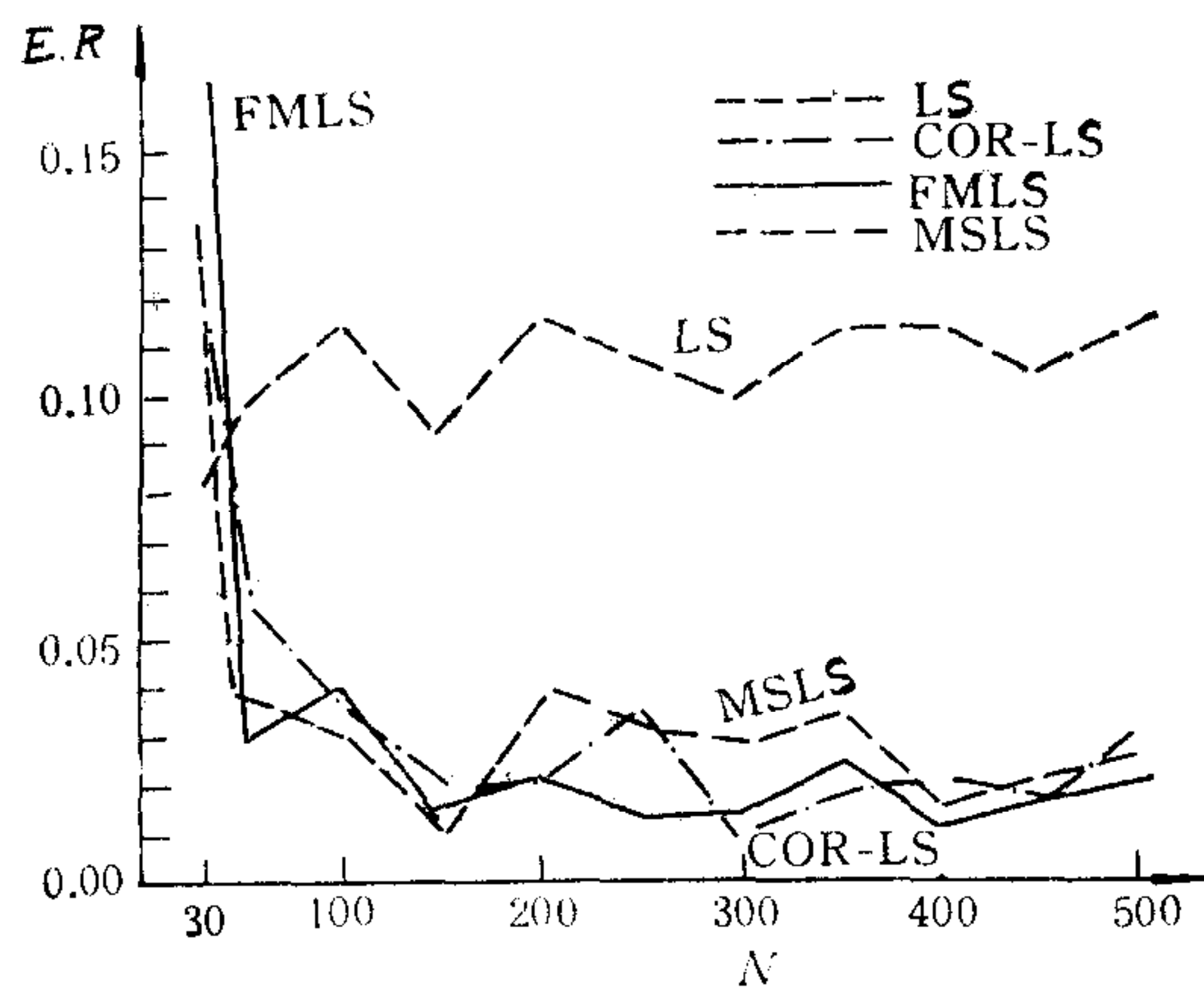


图 2 不同观测数据长度下参数估计的相对误差
($N/S = 0.47$)

从表和图可明显看出: FMLS 在运算速度、估计精度等方面均优于 MSLS, COR-LS 和 LS 法。

仿真输入信号 $u(k)$ 采用二位式 m 序列, 在 Apple-II 机上用 BASIC 语言实现的。

参 考 文 献

- [1] 夏天昌著、刘绍球、朱可炎译, 系统辨识——最小二乘法, 国防工业出版社(1984), 113—120 页。
- [2] Isermann, R., Practical Aspects of Process Identification, *Automatica*, 16(1980), 575—587.
- [3] Isermann, R., Comparison of Six On Line Identification and Parameter Estimation, *Automatica*, 10(1974), 87—103.