

# 一种新的时滞系统鲁棒故障诊断滤波器 设计方法<sup>1)</sup>

白雷石 田作华 施颂椒 翁正新

(上海交通大学自动化系 上海 200240)  
(E-mail: baileishi@sjtu.edu.cn)

**摘要** 研究具有扰动不确定的状态时滞系统鲁棒故障诊断滤波器的设计问题. 通过对系统传递函数输入输出通道的组合变换, 引入一种能够同时体现残差对扰动信号鲁棒性和对故障信号灵敏性的性能指标, 将基于状态观测器的鲁棒故障诊断滤波器设计问题转化为  $H_\infty$  优化设计问题, 应用线性矩阵不等式 (LMI) 技术, 给出并证明了该设计问题解存在的条件和求解方法. 最后, 通过一个仿真算例来验证本方法的有效性.

**关键词** 时滞系统, 故障诊断滤波器, 性能指标,  $H_\infty$  优化, 线性矩阵不等式 (LMI)  
**中图分类号** TP273

## A New Approach to Design of Robust Fault Detection Filter for Time-delay Systems

BAI Lei-Shi TIAN Zuo-Hua SHI Song-Jiao WENG Zheng-Xin

(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240)  
(E-mail: baileishi@sjtu.edu.cn)

**Abstract** The robust fault detection filter design problem for state-delay systems with disturbance is studied in this paper. By combining the appropriate input/output channels, a performance index is introduced, which simultaneously takes into account the robustness of the fault detection observer against disturbance and sensitivity to faults. The observer-based robust fault detection filter problem is formulated as an  $H_\infty$  optimization problem. Using linear matrix inequality techniques, the solvable condition of this optimization problem and further the solutions are derived. Finally, the validity of this approach is illustrated by a numerical example.

**Key words** Time-delay systems, fault detection filter, performance index,  $H_\infty$  optimization, LMI

## 1 引言

近年来, 随着鲁棒控制理论的日益成熟, 鲁棒故障诊断 (Robust fault detection, RFD) 理论也飞速发展, 并取得了许多令人满意的成果<sup>[1~4]</sup>. 但与鲁棒控制不同, 鲁棒故障诊断不

1) 国家自然科学基金 (60574081) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(60574081)

收稿日期 2005-4-15 收修改稿日期 2006-2-26

Received April 15, 2005; in revised form February 26, 2006

但要求产生的残差对外部扰动和不确定性有鲁棒性, 同时还要满足残差对故障有灵敏性, 即使是在没有扰动和不确定性的理想情况下, 所产生的残差也需要对故障有灵敏性. 因此, 需要设计一性能指标来同时体现鲁棒性和灵敏性. 对此, 产生了许多不同的方法<sup>[5~7]</sup>, 例如因式分解法、模型匹配法、 $H_\infty/H_\infty$  比值法以及  $H_-/H_\infty$  混合控制法等. 但这些结果主要集中在线性时不变系统中, 而对于时滞系统的研究还很不深入. 由于实际的系统不可避免的具有不同程度的不确定性和时滞现象, 因此, 对不确定时滞系统鲁棒故障诊断的研究具有重要的科学价值和工程意义.

本文针对扰动不确定时滞系统, 提出一种新的系统设计性能指标, 研究基于状态观测器的鲁棒故障诊断滤波器的设计问题. 此性能指标能够同时满足残差对扰动和不确定性的鲁棒性以及故障的灵敏性. 该问题解存在的形式以及观测器矩阵和后滤波器 (Post-filter) 矩阵的求解方法以线性矩阵不等式 (LMI) 的形式给出. 仿真算例验证了本文所提方法的有效性.

## 2 问题描述

考虑如下状态方程描述的线性不确定时滞被控系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + A_d\mathbf{x}(t-h) + B\mathbf{u}(t) + B_f\mathbf{f}(t) + B_d\mathbf{d}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) + D_f\mathbf{f}(t) + D_d\mathbf{d}(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{u} \in R^p$  和  $\mathbf{y} \in R^q$  分别为系统状态、控制输入和测量输出向量,  $\mathbf{f} \in R^l$  为需要诊断的故障信号向量,  $\mathbf{d} \in R^m$  为不确定性扰动信号 (包括建模误差信号、外部扰动和影响不大的小故障信号等), 且不失一般性设  $\mathbf{d}$  和  $\mathbf{f}$  为  $L_2$  范数有界信号.  $A, A_d, B, C, D, B_f, B_d, D_f$  和  $D_d$  为适当维数的已知矩阵或向量,  $h \geq 0$  为时滞常数.

本文使用如下的基于状态观测器的故障诊断滤波器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + A_d\hat{\mathbf{x}}(t-h) + B\mathbf{u}(t) + H(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = C\hat{\mathbf{x}}(t) + D\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{r}(t) = V(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\hat{\mathbf{x}} \in R^n$  和  $\hat{\mathbf{y}} \in R^q$  分别表示状态和输出的估计值. 定义  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ , 可得残差系统方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}(t) = (A - HC)\mathbf{e}(t) + A_d\mathbf{e}(t-h) + B_1\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{r}(t) = VC\mathbf{e}(t) + D_1\mathbf{w}(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中  $B_1 = [B_f - HD_f \quad B_d - HD_d]$ ,  $D_1 = [VD_f \quad VD_d]$ ,  $\mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{d}(t) \end{bmatrix}$ .

本文研究的主要问题为: 求状态观测器增益矩阵  $H$  和后滤波器矩阵  $V$ , 使  $A - HC$  渐近稳定且最大化如下性能指标

$$J = \|T_{rf}\|_\infty - \|T_{rd}\|_\infty \quad (4)$$

其中  $T_{rd}$  和  $T_{rf}$  分别为扰动信号  $\mathbf{d}$  和故障信号  $\mathbf{f}$  到残差信号  $\mathbf{r}$  的传递函数.

由  $J \rightarrow \max$  可得

$$\|T_{rf}\|_\infty \rightarrow \max \text{ 和 } \|T_{rd}\|_\infty \rightarrow \min$$

因此选用 (4) 作为鲁棒故障诊断器设计优化的性能指标, 可满足产生的残差对故障的灵敏性以及对扰动的鲁棒性.

### 3 主要结论

#### 3.1 基本思想

为简单起见, 假设  $l = m$ . 实际上, 若  $l > m$  (或  $l < m$ ), 将  $T_{rd}$  (或  $T_{rf}$ ) 和  $d$  (或  $f$ ) 扩展为  $\tilde{T}_{rd} = [T_{rd} \ \phi_{l-m}]$  (或  $\tilde{T}_{rf} = [T_{rf} \ \phi_{m-l}]$ ) 和  $\tilde{d} = \begin{bmatrix} d \\ \phi_{l-m} \end{bmatrix}$  (或  $\tilde{f} = \begin{bmatrix} f \\ \phi_{m-l} \end{bmatrix}$ ), 可得出同样的结果, 其中  $\phi$  表示零矩阵.

研究如下的传递函数

$$T \triangleq LT_{rw}R = L[T_{rf} \ T_{rd}]R \quad (5)$$

其中  $L \in R^{n \times n}$  和  $R \in R^{2l \times l}$  为输入输出通道选择矩阵.

选择  $L = I_{n \times n}$ ,  $R = \begin{bmatrix} I_{l \times l} \\ -I_{l \times l} \end{bmatrix}$ , 则有  $T = T_{rf} - T_{rd}$ . 对于设定的  $\beta > \gamma > 0$ , 有

$$\|T\|_{\infty} = \|T_{rf} - T_{rd}\|_{\infty} \geq \|T_{rf}\|_{\infty} - \|T_{rd}\|_{\infty}, \quad \|T\|_{\infty} > \beta - \gamma \Rightarrow \|T_{rf}\|_{\infty} > \beta \text{ 和 } \|T_{rd}\|_{\infty} < \gamma \quad (6)$$

$T$  所对应的系统为

$$T \begin{cases} \dot{e}(t) = (A - HC)e(t) + A_d e(t-h) + B_1 R w(t) \\ r(t) = LVCe(t) + LD_1 R w(t) \end{cases} \quad (7)$$

因此, 故障诊断滤波器的设计可以通过求解如下的最优化问题完成

$$\max_{\gamma, \beta, H, V} (\beta - \gamma) \quad \text{约束条件: (6), (7)} \quad (8)$$

在  $\|d\|_2 \leq N$  ( $N$  为已知的正数) 条件下, 可选择阈值为  $J_{th} = \gamma_{opt} N$  ( $\gamma_{opt}$  为  $\gamma$  的最优值), 并基于以下逻辑关系诊断故障的发生:

$$\|r\|_2 > J_{th} \Rightarrow \text{故障信号被检测到} \Rightarrow \text{报警}$$

$$\|r\|_2 \leq J_{th} \Rightarrow \text{无故障信号被检测到}$$

在实际工程中, 时间  $t$  不可能取到无穷大, 因此用  $\|r\|_{2,T}^2 = \int_{t_1}^{t_2} r^T r dt$  (其中  $T = t_1 - t_2$ ) 来代替  $\int_0^{+\infty} r^T r dt$ .

**注 1.** 对于 (5), 若选择  $L = I_{n \times n}$ ,  $R = \begin{bmatrix} I_{l \times l} \\ \phi_{l \times l} \end{bmatrix}$ , 则最优化问题 (8) 研究的是残差对故障的灵敏性问题; 若选择  $L = I_{n \times n}$ ,  $R = \begin{bmatrix} \phi_{l \times l} \\ -I_{l \times l} \end{bmatrix}$ , 则最优化问题 (8) 研究的是残差对扰动的鲁棒性问题.

**注 2.** 式 (6) 具有一定的保守性. 在求解最大的  $\beta$  和最小的  $\gamma$  时, 采用的方法为固定其中的一个性能指标, 求解另一个性能指标的最优值, 虽然 (6) 有保守性, 但仍然具有改善信噪比  $\beta/\gamma$  的作用.

**注 3.** 对于最优化问题 (8), 也可以不引入  $\beta$  和  $\gamma$  而直接求解, 但本文使用的方法有以下优点: 求得的最优  $\gamma_{opt}$  可用来设计检测故障的阈值, 而且比值  $\beta/\gamma$  可以用来评价故障诊断滤波器 (3) 性能的好坏.

#### 3.2 鲁棒故障诊断滤波器设计

下面给出求解鲁棒故障诊断滤波器问题的 LMI 解法. 首先给出如下引理.

**引理 1**<sup>[8]</sup>. 给定  $\gamma > 0$ , 满足  $D^T D - \gamma^2 I > 0$ , 对于系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + A_d\mathbf{x}(t-h) + B\mathbf{w}(t) \quad (9)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{w}(t) \quad (10)$$

如果存在对称正定矩阵  $P$  和  $Q$ , 满足如下 LMI

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA + C^T C - Q & -PB + C^T D & -PA_d \\ * & D^T D - \gamma^2 I & 0 \\ * & * & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (11)$$

则系统渐近稳定, 且满足  $\|\mathbf{y}\|_2 > \gamma^2 \|\mathbf{w}\|_2$ , 其中  $*$  为矩阵的对称项.

如下定理给出了本文的主要结论.

**定理 1.** 对于给定的  $\beta > \gamma > 0$ , 如果存在对称正定矩阵  $P, Q$  和  $Z$ , 矩阵  $Y$ , 满足如下的 LMI

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & -PA_d \\ * & \Xi_3 & 0 \\ * & * & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (12)$$

则该鲁棒故障诊断滤波器设计问题可解且对应的观测器增益矩阵为  $H = P^{-1}Y$ , 后滤波器矩阵为  $V = Z^{1/2}$ , 其中  $Z^{1/2}$  表示矩阵  $Z$  的均方根分解,  $\Xi_1 = -A^T P - PA + C^T Y^T + YC + C^T ZC - Q$ ,  $\Xi_2 = P(B_d - B_f) + Y(D_f - D_d) + C^T Z(D_f - D_d)$ ,  $\Xi_3 = (D_f - D_d)^T Z(D_f - D_d) - (\beta - \gamma)^2 I$ .

**证明.** 将引理 1 中的  $A, A_d, B, C$  和  $D$  分别用  $A - HC, A_d, B_1 R, LVC$  和  $LD_1 R$  替代, 并令  $Y = PH, Z = V^T V, L = I_{n \times n}, R = \begin{bmatrix} I_{l \times l} \\ -I_{l \times l} \end{bmatrix}$ , 对于系统 (7) 应用引理 1, 可以容易的得出本定理的证明, 从略.  $\square$

在  $\gamma > 0$  和  $\beta > 0$  给定的条件下, 定理 1 以 LMI 的形式给出了基于状态观测器的鲁棒故障诊断滤波器解存在的条件以及增益矩阵  $H$  和后滤波器矩阵  $V$  的求解方法, 要得到问题的最优解可以重复迭代调用定理 1 的结果.

## 4 仿真算例

考虑如下被控故障系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t-h) + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{d}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -0.01 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.26 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix} \mathbf{f}(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} \mathbf{d}(t)$$

应用第 3 节介绍的 LMI 方法设计基于状态观测器的鲁棒故障诊断滤波器系统. 取  $\beta = 1.58$ , 利用 Matlab 中的 LMI 工具箱求解 LMI(12), 可得  $\gamma$  的最小值为  $\gamma_{opt} \approx 0.5$ , 相应的状态观测器增益矩阵和后滤波器矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} -1.6916 & 0.2134 \\ -0.0741 & -0.4886 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1.6544 & -0.0231 \\ 0.0000 & 1.6715 \end{bmatrix}$$

假设  $\|d\|_2 = 0.8$ , 则阈值为  $J_{th} = 0.4$ . 设时滞常数  $h = 0.5$ , 输入为单位阶跃信号, 外部扰动为能量 0.01 的白噪声, 故障为从 5 秒到 10 秒的单位方波信号, 利用 Matlab 中的 SIMULINK 进行仿真, 所得结果如下.

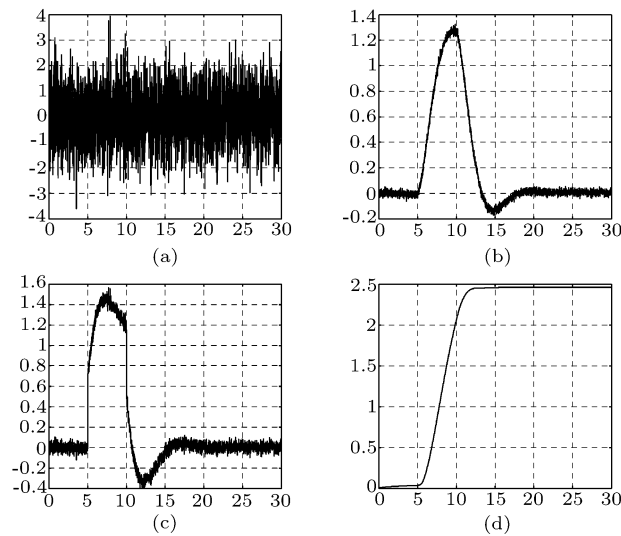


图 1 SIMULINK 仿真结果

Fig. 1 SIMULINK Results

其中图 1(a) 表示外部扰动信号, 图 1(b) 和 (c) 表示产生的残差输出信号  $r = [r1; r2]$ , 图 1(d) 表示残差评价函数  $\|r\|_{2,T}$ , 从图 1(d) 中可以看出,  $\|r\|_{2,T} \approx 0.5 > 0.4$ , 也就是说在故障发生 2 秒后报警. 从 SIMULINK 仿真结果可以看出, 本文提出的方法是可行和有效的.

## 5 结束语

本文研究了具有不确定性扰动的状态时滞系统的鲁棒故障诊断滤波器设计问题. 通过对输入 / 输出通道的组合变换, 引入一种新的性能指标, 同时兼顾产生的残差对故障的灵敏性和对扰动的鲁棒性, 将故障诊断滤波器设计问题转化成为  $H_\infty$  优化问题, 给出了鲁棒故障诊断滤波器设计的 LMI 方法, 利用 Matlab 工具箱中的求解器可以方便地求解, 并用仿真实例和仿真结果验证了本方法的有效性.

## References

- 1 Chen J, Patton P R. Robust Model-based Fault Diagnosis for Dynamic Systems. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999
- 2 Ding S X, Jeinsch T, Frank P M, Ding E L. A unified approach to the optimization of fault detection systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2000, **14**(5): 725~745
- 3 Zhong M Y, Ding S X, Lam J, Wang H B. An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI systems. *Automatica*, 2003, **39**(3): 543~550
- 4 Patton R J, Chen J. Observer-based fault detection and isolation: Robustness and applications. *Control Engineering and Practice*, 1997, **5**(5): 671~682
- 5 Zhong M Y, Tang B Y, Ding S X. An LMI approach to design robust observer-based FD filter. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(6): 1101~1105
- 6 Rambeaux F, Hamelin F, Sauter D. Robust residual generation via LMI. In: Proceedings of 14th IFAC World Congress Conference, New York: Elsevier Science Inc., 1999. 241~246

- 7 Frank P M. Enhancement of robustness in observer-based fault detection. *International Journal of Control*, 1994, **59**(4): 955~981
- 8 Ding S X, Zhong M Y, Tang B Y. An LMI approach to the design of fault detection filter for time-delay LTI systems with unknown Inputs. In: Proceedings of the American Control Conference, Arlington, VA, USA: IEEE Press, 2001. 2137~2142

**白雷石** 1998 年于山东工业大学获学士学位, 2002 年于山东大学获硕士学位, 现为上海交通大学自动化系博士研究生。研究方向为时滞系统鲁棒故障诊断与容错控制。

(**BAI Lei-Shi** Received the bachelor and master degrees from Shandong University of Technology and Shandong University in 1998 and 2002, respectively. He is now a Ph.D. candidate in the Department of Automatic Control at Shanghai Jiaotong University. His research interests include robust fault detection and fault tolerance control for time-delay systems.)

**田作华** 上海交通大学自动化系教授。研究兴趣为控制系统远程故障诊断、智能控制。

(**TIAN Zuo-Hua** Professor in the Department of Automation at Shanghai Jiaotong University. His research interests include remote fault diagnosis and intelligent control.)

**施颂椒** 上海交通大学自动化系教授。目前主要研究兴趣为非线性系统鲁棒控制、自适应控制。

(**SHI Song-Jiao** Professor in the Department of Automation at Shanghai Jiaotong University. His research interests include robust control for nonlinear systems and adaptive control.)

**翁正新** 1989 年和 1995 年于哈尔滨工业大学分别获得硕士和博士学位, 现为上海交通大学自动化系副教授。目前主要研究兴趣为鲁棒控制、故障诊断与容错控制以及智能控制等。

(**WENG Zheng-Xin** Received the bachelor and Ph.D. degrees from Harbin Institute of Technology in 1989 and 1995, respectively. Now he is an associate professor at Shanghai Jiaotong University. His research interests include robust control, fault diagnosis, fault tolerance control, and intelligent control.)