

小波变换系数冗余性分析

郎方年¹ 袁晓^{1,2} 周激流³ 何坤¹

¹(四川大学电子信息学院 成都 610064)

²(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

³(四川大学计算机学院(软件学院) 成都 610064)

(E-mail: fnlang@163.com)

摘要 小波基的冗余可导致鲁棒性, 冗余使得低精度下获得的小波系数能在相对高的精度下重建原始信号. 本文详细讨论在连续和离散两种情况下小波变换系数在二维时间-尺度空间中的冗余性问题, 其中包括: 1) 小波基自身冗余性的分析, 2) 信号本身冗余性的分析, 3) 变换系数冗余性同小波基冗余性之间的关系, 4) 变换系数冗余性同信号冗余性之间的关系. 最后给出体现变换系数冗余性、小波基冗余性以及信号自身冗余性这三者之间关系的统一表达式.

关键词 小波基, 采样定理, 小波再生核函数, 自相似性, 完全重构

中图分类号 TP391.41

Redundancy Analysis of Wavelet Transform Coefficients

LANG Fang-Nian¹ YUAN Xiao^{1,2} ZHOU Ji-Liu³ HE Kun¹

¹(School of Electronic and Information, Sichuan University, Chengdu 610064)

²(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)

³(School of Computer (Software), Sichuan University, Chengdu 610064)

(E-mail: fnlang@163.com)

Abstract Redundancy of wavelet bases leads to robustness that the wavelet transform coefficient obtained in low accuracy can be used to reconstruct the original signal with comparative high accuracy. Redundancy of continuous and discrete wavelet coefficients in time-scale space is discussed in this paper, including: 1) redundancy analysis of wavelet bases, 2) redundancy analysis of signal, 3) relation between wavelet coefficient redundancy and wavelet base redundancy, 4) relation between coefficient redundancy and signal redundancy. Expression to represent the relation between coefficient redundancy, frame redundancy, and signal redundancy is proposed at last.

Key words Wavelet bases, sampling theory, wavelet reproducing kernel function, complete reconstruction

1 引言

小波分析是一种精确而简单的数学工具, 在许多行业有着广泛应用^[1]. 连续小波变换中小波族是由基小波经过伸缩和时间平移获得的, 同时连续小波变换又具有平移不变性和伸缩共变性, 所以连续小波变换系数之间具有一定程度的相关性, 也就是说, 在时间-尺度平面中相邻两点所对应的小波变换系数存在相关性. 靠得越近的两点, 这种相关性越强, 随着两点距离的增加, 它们之间的相关程度迅速减弱. 换句话说, 信号的连续小波变

收稿日期 2005-4-11 收修改稿日期 2005-12-27

Received April 11, 2005; in revised form December 27, 2005

换一定存在数据的冗余度, 也因此而增加了分析和解释小波变换结果的困难^[2]. 连续小波变换的基本理论, 对于实际应用具有原则性的指导意义, 但在工程上是难以实现的, 即使使用数字方式来直接实现也是很麻烦. 为了使小波变换理论得到广泛的实际应用, 必须研究其离散化问题, 这就要涉及变换系数的冗余性问题, 同时它也是小波分析中的主要内容之一.

本文从信号处理角度, 详细讨论了连续和离散两种情况下小波变换系数的冗余性问题. 通过分析信号、小波基与变换系数的内在联系, 得出反映信号冗余性、小波基冗余性以及变换系数冗余这三者之间的显示关系式, 从理论上弄清楚了形成时间-尺度平面信息冗余的原因, 对图象编码和压缩等需要尽量压缩信号, 力求能以最经济的形式完全重构原始信号的实际应用领域, 具有重要的参考价值和指导意义.

2 小波变换的再生核与冗余函数

对于信号 $S(t) \in L^2(IR)$, 给定 $\psi(t) \in L^2(IR)$, 定义能量恒等的连续小波变换

$$W_S(\tau, a) = \int_t S(t)\psi_{\tau,a}^*(r)dt = \langle S(t), \psi_{\tau,a}(t) \rangle \quad (1)$$

式中 $\psi_{\tau,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$, 其中 $a > 0$. 连续小波变换 (1) 式的反演公式为^[3]

$$S(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_a \int_x W_s(\tau, a)\psi_{\tau,a}(t)d\tau \frac{da}{|a|^2} \quad (2)$$

根据 (1) 和 (2), 在时间尺度平面-即 (τ, a) 平面上任意固定点 (τ_0, a_0) 容易推出

$$W_s(\tau_0, a_0) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(a, \tau)K_\psi(a, a_0; \tau, \tau_0)d\tau \frac{da}{a^2} \quad (3)$$

式中 C_ψ 为常数, 而 $K_\psi(\tau, a; \tau_0, a_0)$ 为再生核函数, 其定义为

$$K_\psi(\tau, a; \tau_0, a_0) = \langle \psi_{\tau_0, a_0}(t), \psi_{\tau, a}(t) \rangle \quad (4)$$

由 (3) 可知将 K_ψ 作用于 $W_S(a, \tau)$ 仍然得到 $W_S(a, \tau)$, 即小波变换系数值 $W_S(a_0, \tau_0)$ 可以表示成时频平面上其它各小波变换系数值 $W_S(a, \tau)$ 的总贡献. (4) 式定义的再生核函数实际上就是小波基函数本身的小波变换. 不同的母小波其再生核函数的相关情况是不一样的, 而作为体现小波基函数自身冗余性的再生核函数 K_ψ 是一个四变量函数, 我们很难直接观察和分析, 因此为了便于可视化分析和直接观察小波基函数的冗余性情况, 我们可以利用如下结论对函数 K_ψ 进行降维处理以便作进一步的分析.

定理. 再生核函数具有自相似性^[4]

对于给定的母波 ψ , 将式 (4) 所定义的再生核函数 K_ψ 作简单的变换则有

$$K_\psi(\tau_0, a_0; \tau, a) = \frac{1}{a_0} K_\psi\left(0, 1; \frac{\tau - \tau_0}{a_0}, \frac{a}{a_0}\right) = \frac{1}{C_\psi} \frac{1}{a_0} R_\psi\left(\frac{\tau - \tau_0}{a_0}, \frac{a}{a_0}\right)$$

式中 $R_\psi(\tau, a) = W_\psi(\tau, a) = \langle \psi(t), \psi_{\tau, a}(t) \rangle$ 表示母波函数自身的连续小波变换.

该定理表明在时间-尺度相平面中, 任意一点 (τ_0, a_0) 所对应的再生核函数 $K_\psi(\tau_0, a_0; \tau, a)$ 与给定母波 ψ 自身的小波变换 $W_\psi(\tau, a)$ 是相似的, 所以 $R_\psi(\tau, a)$ 的冗余性同时也体现了小波基再生核函数的冗余性, 两者在数学本质上是完全一致的.

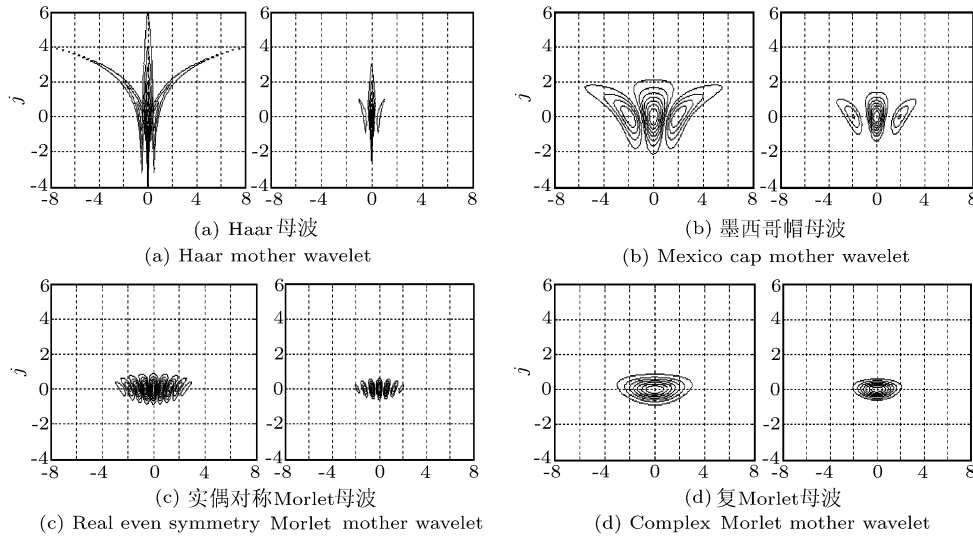


图 1 三种经典母波的冗余性函数的可视化视图

Fig. 1 View of reproducing kernel function of three classical mother wavelet

函数 $R_\psi(\tau, a)$ 为二维函数，所以可以方便的在二维平面上作可视化显示. 图 1 以等高线的图形形式给出 Haar 母波、Mexico Hat 母波以及实偶对称 Morlet 母波、复 Morlet 母波的 $|R_\psi(\tau, a)|$ 可视化图^[4]. 图 (a)、(b) 以及 (c)、(d) 中左边的图示为 $|R_\psi(\tau, a)|$ 的可视化图，而右边的图示为 $|R_\psi(\tau, a)|^2$ 的可视化图. 图中的横坐标为扫描时间 τ ，纵坐标为尺度坐标 $j = \log_2 a$.

很明显，从图中可以知道，越靠近坐标原点，函数值越大，意味着小波基函数的相关性越强，如果以这样的小波基函数对信号做变换，则小波系数之间的冗余性越大. 而远离坐标原点，则函数值呈现有规律性的变小，表明如此构成的小波基函数之间的相关性变小，同样，如果用这样的小波基函数对信号作变换，则小波系数值的冗余性变小.

3 信号冗余性分析

对于信号 $S(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ，设其傅立叶变换为 $\hat{S}(t)$ ，即 $S(t)$ 和 $\hat{S}(t)$ 是信号的等价表示

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \hat{S}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \Leftrightarrow \hat{S}(t) = \int S(t) e^{-j\Omega t} dt$$

如果假定 $\hat{S}(t)$ 是紧支函数，即 $\Omega \in [-\Omega_m, \Omega_m]$ ，则我们有

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_m}^{\Omega_m} \hat{S}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_m}^{\Omega_m} \left[\int_{\tau} S(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau \right] e^{j\Omega t} d\Omega = \int_{\tau} S(\tau) \frac{\Omega_m}{\pi} \text{Sinc}\left[\frac{\Omega_m}{\pi}(t - \tau)\right] d\tau \tag{5}$$

由 (5) 可以很清楚的看出，信号 $S(t)$ 任意一点处的值均可由其余信号点 $S(\tau)$ 进行插值而得到，相应的插值函数为 Sinc 函数 $\frac{\Omega_m}{\pi} \text{Sinc}\left[\frac{\Omega_m}{\pi}(t - \tau)\right]$. 这意味着连续信号中存在相当大的冗余，可以想象能利用一定数量的采样点来完全重构原始信号.

4 小波变换系数冗余性与信号冗余性之间的关系

将 (5) 代入 (1) 有:

$$\begin{aligned} W_S(\tau, a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{\tau} S(y) \text{Sinc} \left[\frac{\Omega_m}{\pi} (t-y) dy \right] \right\} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt \\ &= \frac{\Omega_m}{\pi} \int_{\tau} S(y) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sinc} \left[\frac{\Omega_m}{\pi} (t-y) \right] \psi_{a,\tau}^*(t) dt \right] dy \end{aligned} \quad (6)$$

在 (6) 中融入了信号自身的重构表达式, 很明显 $W_S(\tau, a)$ 可由信号在各点的值进行插值而得到, 此时相应的插值函数则为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega_m}{\pi} \text{Sinc} \left[\frac{\Omega_m}{\pi} (t-y) \right] \psi_{a,\tau}^*(t) dt$. 显然, 由于原始信号 $S(y)$ 存在相当的冗余性, 所以该信号的小波变换系数 $W_S(\tau, a)$ 必然存在冗余, 要想消除变换系数的冗余信息, 则应该从信号本身以及插值函数两方面入手进行分析.

5 变换系数、信号以及再生核函数之间的冗余性关系

由 (3) 式和 (6) 式联合可知:

$$\begin{aligned} W_S(\tau_0, a_0) &= \frac{a}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_S(\tau, a) K_\psi(a, a_0; \tau, \tau_0) \frac{da}{a^2} d\tau = \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\Omega_m}{\pi} \int_{\tau} S(y) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sinc} \left[\frac{\Omega_m}{\pi} (t-y) \right] \psi_{a,\tau}^*(t) dt \right] dy \right\} K_\psi(a, a_0; \tau, \tau_0) \frac{da}{a^2} d\tau = \\ &= \int_{\tau} \underbrace{S(y)}_{(a)} \left\{ \frac{\Omega_m}{\pi C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\text{Sinc} \left[\frac{\Omega_m}{\pi} (t-\tau) \right] \psi_{a,\tau}^*(t) dt}_{(b)} \right] \underbrace{K_\psi(a_0, a_0; \tau, \tau_0) \frac{da}{a^2}}_{(c)} d\tau \right\} dy \end{aligned} \quad (7)$$

式中 (a) 为需要进行变换的原始信号, (b) 为信号重构时的 Sinc 插值函数与小波基函数的乘积在时间区间上的积分, (c) 为参与变换的小波基函数族的再生核函数. 由 (7) 可以看出变换系数冗余性与信号自身冗余性以及参与变换的小波基函数族冗余性之间的关系.

如果说对以上连续变换情况下的分析还不能很明显的看出它们之间的关系的的话, 下边离散化处理后的结果则更能说明小波变换系数的冗余性与参与变换的原始信号以及小波基函数冗余性之间的相互关系. 由于实际应用中都是以离散情况为主, 所以下边的分析更具有参考价值和指导意义.

6 离散小波变换系数冗余性分析

6.1 离散小波系数冗余性分析 - 再生核函数

将 (1) 在时间 - 尺度空间上做离散化处理, 则很容易知道离散小波变换的表达形式

$$W_S[i, k] = \frac{1}{\sqrt{ja_0}} \sum_n S(nT_s) \psi^* \left(\frac{nT_s - k\tau_0}{ja_0} \right) T_s$$

如果令 $\tau_0 = T_s = 1$, 则有

$$W_S[j, k] = \frac{1}{\sqrt{ja_0}} \sum_n S[n] \psi^* \left(\frac{n-k}{ja_0} \right) \quad (8)$$

信号重构公式的离散形式为^[4]

$$S[n] = \frac{1}{C_\psi} \int_{j_0=0}^{+\infty} \sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} W_S[j_0, k_0] \frac{1}{\sqrt{j_0 a_0}} \psi\left(\frac{n-k_0}{j_0 a_0}\right) \frac{1}{(j_0 a_0)^2} \quad (9)$$

将 (9) 代入 (8), 则有

$$\begin{aligned} W_S[j, k] &= \sum_n S[n] \frac{1}{\sqrt{j a_0}} \psi^*\left(\frac{n-k}{j a_0}\right) = \\ &= \sum_n \left\{ \frac{1}{C_\psi} \sum_{j_0=0}^{+\infty} \sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} W_S[j_0, k_0] \frac{1}{\sqrt{j_0 a_0}} \left(\frac{n-k_0}{j_0 a_0}\right) \frac{1}{(j_0 a_0)^2} \right\} \frac{1}{\sqrt{j a_0}} \psi^*\left(\frac{n-k}{j a_0}\right) = \\ &= \frac{1}{C_\psi} \sum_{j_0=0}^{+\infty} \sum_{k_0=-\infty}^{+\infty} W_S[j_0, k_0] K_{D\psi}[j, j_0; k, k_0] \end{aligned} \quad (10)$$

由 (10) 可知离散小波变换系数的冗余性可由离散形式的再生核函数进行度量

$$\begin{aligned} K_{D\psi}[j, j_0; k, k_0] &= \sum_n \psi_{j a_0, k}[n] \psi_{j_0 a_0, k_0}[n] = \frac{1}{(j_0 a_0)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{j a_0}} = \\ &= \sum_n \psi\left(\frac{n-k_0}{j_0 a_0}\right) \psi^*\left(\frac{n-k}{j a_0}\right) \frac{1}{(j_0 a_0)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{j a_0}} \end{aligned}$$

6.2 离散信号本身冗余性分析

由经典采样定理可以知道, 设信号 $S(t)$ 的带宽为 W , 则在固定时间段 T_0 内信号有如下重构公式^[5]

$$S(t) = \sum_{n=n_1}^{n_1+N} a_n \varphi_n^{f_N}(t) \quad \text{其中} \quad \varphi_n^{f_N}(t) = \frac{\text{Sin}\pi f_N(t-n/f_N)}{\pi f_N(t-n/f_N)}$$

$\varphi_n^{f_N}(t)$ 为 Sinc 插值函数, f_N 为采样频率, N 为临界采样频率下的采样点数. 系数 a_n 可由下式计算得到: $a_n = \langle S(t), \varphi_n(t) \rangle = S(n/f_N)$, 其中 $\langle \rangle$ 为内积符号, 则有: $S(t) = \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S\left(\frac{n}{f_N}\right) \varphi_n^{f_N}(t)$, 令 $S\left(\frac{n}{f_N}\right) = S[n]$, 则可认为该式是由采样点序列恢复原始信号的重构表达式. 如果存在两个不同的采样点序列, 采样点数分别为 $M > N \geq 2T_0 W$ (即采样频率 $f_M > f_N$), 则有下式成立

$$S(t) = \sum_{m=m_1}^{m_1+M} S\left(\frac{m}{f_M}\right) \varphi_m^{f_M}(t) = \sum_{m=m_1}^{m_1+M} S[m] \varphi_m^{f_M}(t) = \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S\left(\frac{n}{f_N}\right) \varphi_n^{f_N}(t) = \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \varphi_n^{f_N}(t) \quad (11)$$

显然有如下关系式成立: $\sum_{m=m_1}^{m_1+M} S[m] \varphi_m^{f_M}(t) = \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \varphi_n^{f_N}(t)$, 该式两边同乘 $\varphi_K^{f_M}(t)$ 且对时间 t 在无穷区间上进行积分运算有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{m=m_1}^{m_1+M} S[m] \varphi_m^{f_M}(t) \right\} \varphi_K^{f_M}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \varphi_n^{f_N}(t) \right\} \varphi_K^{f_M}(t) dt$$

由插值函数的正交性可得出如下关系式

$$S[k] = \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{f_N}(t) \varphi_K^{f_M}(t) dt \right\} \quad (12a)$$

将 (12a) 作离散化处理则可知

$$S[k] = \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \left[\sum_{p \in Z} \varphi_n^{f_N} \left(\frac{p}{f_N} \right) \varphi_k^{f_M} \left(\frac{p}{f_N} \right) \right] = \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \left[\sum_{p \in Z} \varphi_n^{f_N}[p] \varphi_k^{f_M}[p] \right] \quad (12b)$$

(12b) 表明了采样点列之间的线性关系, 其组合系数为 $\sum_{p \in Z} \varphi_n^{f_N}[p] \varphi_k^{f_M}[p]$. 因此由 (12) 可以

知道, 如果以不同的频率 f_M, f_N 对同一连续信号进行采样, 得到的两采样序列可以相互线性表示. 同时 (12) 也体现了信号自身的冗余性关系, 如果 $f_N = 2T_0W$ (即 Nyquist 采样率), 则序列 $S[n]$ 自身不存在信息冗余, 而以频率 $f_M > 2T_0W$ 进行采样得到的采样序列则存在一定程度的冗余性.

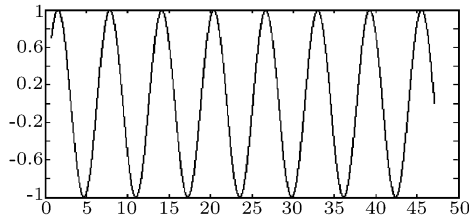


图 2 连续正弦信号

Fig. 2 Continuous sine signal

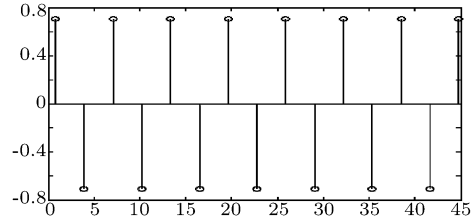


图 3 临界采样信号

Fig. 3 Critical sampling signal sequence

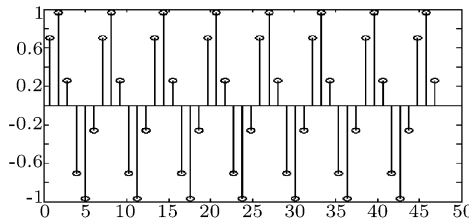


图 4 超临界采样信号

Fig. 4 Oversampling signal sequence

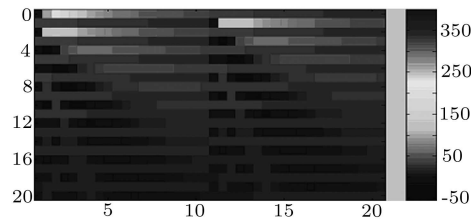


图 5 系数相关度

Fig. 5 Relation degree of coefficient

关于信号序列冗余程度的度量问题, 无疑连续信号的信息冗余程度最大, 临界采样信号序列的冗余程度最小, 但如何具体度量不同采样频率下采样序列的冗余性, 本文则做了如下分析: 设两序列采样频率分别为 f_N, f_M , 为恢复原始信号而采用的插值函数为 $\varphi_n^{f_N}(t) = \frac{\sin \pi f_N(t - n/f_N)}{\pi f_N(t - n/f_N)}$, $\varphi_n^{f_M}(t) = \frac{\sin \pi f_M(t - n/f_M)}{\pi f_M(t - n/f_M)}$ 本文采用过采样序列与临界采样序列的插值函数之间的相关度来说明超采样信号序列的冗余度, 即用 $\Phi(n, m; f_N, f_M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{f_N}(t) \varphi_m^{f_M}(t) dt$ 的大小来说明. 该式为四元函数, 不能直接作出其图形进行观察分析, 所以为方便使用图形来显示, 则需要对该式进行变换处理. 本文采用的做法同小波再生核函数的降维处理方法类似, 即使用扫描时间的差值与采样频率的差值来取代以前的四个变量, 这样的降维处理方法并不影响结果的合理性以及正确性, 降维后的表达式为 $\Phi(n - m; f_N - f_M) = \Phi(\Delta n, \Delta f)$.

本文采用 Matlab 6.5 进行仿真, 图 2 为连续正弦信号, 其临界采样序列如图 3, 而超临界采样序列如图 4. 图 5 则为 $\Phi(\Delta n, \Delta f)$ 的仿真结果, 纵坐标为 Δn , 横坐标为频率差值 Δf , 相关系数值的不同大小则由二维平面中各点颜色的不同来表示, 具体由图示右边的颜色列表可以知道. 图中如果颜色越偏向于暖色, 表明值越大, 则说明该过采样序列的冗余性越大; 反之颜色越偏向于冷色调, 表明函数值越小, 也就是说该过采样序列的信息冗余性越小. 由图 5 很清楚的知道 $\Delta n, \Delta f$ 越靠近原点, 其值越大, 则相关性越大; 反之则越小.

6.3 小波变换系数冗余性与信号冗余性之间的关系

将 (11) 代入小波变换定义表达式 (1) 则可知

$$W_S(a, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt = \int_{T_0} \left\{ \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \varphi_n^{f_N}(t) \right\} \psi_{a,\tau}^*(t) dt = \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \left[\int_{T_0} \varphi_n^{f_N}(t) \psi_{a,\tau}^*(t) dt \right] \quad (13)$$

由 (13) 可知, 小波变换系数在时频平面上任意一点的值可由信号抽样点序列线性组合而得到, 且 $W_S(a, \tau)$ 和 $S[n]$ 之间相关性的大小可统一由式

$$\Phi_n(a, \tau) = \int_{T_0} \varphi_n^{f_N}(t) \psi_{a,\tau}^*(t) dt \quad (14)$$

进行度量, 同时 (13) 也说明了小波变换系数与信号自身的具体关系表达式. 因此, 如果 $S[n]$ 序列存在冗余性, 由 $S[n]$ 线性组合而得到的 $W_S(a, \tau)$ 必然存在一定程度的冗余性, 其冗余程度不但与序列自身的冗余程度有关而且与线性组合系数 $\Phi_n(a, \tau)$ 有关. 作以下进一步的分析可以更清楚的知道.

假设采样频率 $f_M > f_N = 2T_0W$, $S[n]$ 各数据点之间不存在信息冗余, 而 $S[m]$ 为过采样序列, 数据点之间存在一定程度的冗余性. 为了便于分析, 将 (12a) 作符号变换为如下: (注: 这样作不会影响分析的正确性, 因为仅仅对原表达式的符号作了变换而已) $S[m] = \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{f_N}(\tau) \varphi_m^{f_M}(\tau) d\tau \right\}$, 并将其代入对 (13) 作符号变换后的如下表达式: (注: 同上, 这种变换不会影响分析的正确性)

$$W_S(a, \tau) = \sum_{m=m_1}^{m_1+M} S[m] \left\{ \int_{T_0} \varphi_m^{f_M}(t) \psi_{a,\tau}^*(t) dt \right\}$$

则由以上两表达式可以知道

$$W_S(a, \tau) = \sum_{m=m_1}^{m_1+M} \left\{ \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \left[\int \varphi_n^{f_N}(\tau) \varphi_m^{f_M}(\tau) d\tau \right] \right\} \left[\int_{T_0} \varphi_m^{f_M}(t) \psi_{a,\tau}^*(t) dt \right] = \sum_{m=m_1}^{m_1+M} \sum_{n=n_1}^{n_1+N} \underbrace{S[n]}_{(a)} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{f_N}(\tau) \varphi_m^{f_M}(\tau) d\tau \right]}_{(b)} \underbrace{\left[\int_{T_0} \varphi_m^{f_M}(t) \psi_{a,\tau}^*(t) dt \right]}_{(c)} \quad (15)$$

其中 (a) 为 Nyquist 采样率下的采样点序列, (b) 可视为过采样点列冗余程度的度量, (c) 变换系数由点列线性组合的组合系数. 由该式可以很清楚的看出变换系数的冗余性与信号自身冗余性的关系.

对 (13) 作离散化处理, 则有

$$W_S[j, k] = \frac{1}{\sqrt{ja_0}} \sum_n S[n] \psi^* \left(\frac{n-k}{ja_0} \right) = \frac{1}{\sqrt{ja_0}} \sum_n \left\{ \sum_{m=m_1}^{m_1+M} S[m] \varphi_m^{f_M}[n] \right\} \psi^* \left(\frac{n-k}{ja_0} \right) = \sum_{m=m_1}^{m_1+M} S[m] \left\{ \sum_n \frac{1}{\sqrt{ja_0}} \varphi_m^{f_M}[n] \psi^* \left(\frac{n-k}{ja_0} \right) \right\} = \sum_{m=m_1}^{m_1+M} S[m] \Phi_{Dm}[j, k] \quad (16)$$

其中 $\Phi_{Dm}[j, k] = \sum_n \frac{1}{\sqrt{ja_0}} \varphi_m^{f_M}[n] \psi^* \left(\frac{n-k}{ja_0} \right)$, 由 (16) 式可知, 离散小波变换系数可由信号采样点序列线性表示, 其线性表示的权值大小为 $\Phi_{Dm}[j, k]$. 如果 $S[n]$ 为过采样点列, 则无论小波基函数族冗余与否, $W_S[j, k]$ 必存在冗余性.

对 (15) 同样作离散化处理, 则可知

$$W_S[j, k] = \frac{1}{\sqrt{ja_0}} \sum_n \left\{ \sum_{m=m_1}^{m_1+M} S[m] \varphi_m^{f_M}[n] \right\} \psi^* \left(\frac{n-k}{ja_0} \right) \\ \sum_{m=m_1}^{m_1+M} \sum_{q=q_1}^{q_1+Q} \underbrace{S[m]}_{(a)} \underbrace{\left[\sum_{p \in Z} \varphi_q^{f_Q}[p] \varphi_m^{f_M}[p] \right]}_{(b)} \underbrace{\left\{ \sum_n \frac{1}{\sqrt{ja_0}} \varphi_m^{f_M}[n] \psi^* \left[\frac{n-k}{ja_0} \right] \right\}}_{(c)} \quad (17)$$

其中 (a) 过采样点列, (b) 可视为采样点列冗余性的反映, (c) 小波变换系数由点列线形组合的组合系数. 同式 (7) 式连续情况一样, 由该式可清楚的知道离散情况下小波变换系数的冗余性与信号自身冗余性的显示表达.

6.4 离散小波系数、采样点列及再生核函数之间的关系

利用信号的重构表达式以及小波变换的定义式可以得出如下的结论

$$W_S(a_0, \tau_0) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_S(a, \tau) K_\psi(a, a_0; \tau, \tau_0) \frac{da}{a^2} d\tau = \\ \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \psi_{a,\tau}^* dt \right] K_\psi(a, a_0; \tau, \tau_0) \frac{da}{a^2} d\tau = \\ \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{f_N}(t) \psi_{a,\tau}^*(t) dt \right] \right\} K_\psi(a, a_0; \tau, \tau_0) \frac{da}{a^2} d\tau = \\ \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \left\{ \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_\psi[a, a_0; \tau, \tau_0] \Phi_n(a, \tau) \frac{da}{a^2} d\tau \right\} \quad (18)$$

由 (18) 可知, 小波变换系数在时间 - 尺度平面上任意一点的值可由采样点序列线性表示, 并且各系数点与各采样点的相关性大小可由下式度量: $\frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} K_\psi(a, a_0; \tau, \tau_0) \Phi_n(a, \tau) \frac{da}{a^2} d\tau$. 如果 $f_M > f_N = 2T_0W$, 将 (12a) 式代入对 (18) 式作符号变换后的表达式, 则可知

$$W_S(a_0, \tau_0) = \sum_{m=m_1}^{m_1+M} S[m] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_\psi[a, a_0; \tau, \tau_0] \Phi_m(a, \tau) \frac{da}{a^2} d\tau \right\} = \\ \sum_{m=m_1}^{m_1+M} \left\{ \sum_{n=n_1}^{n_1+N} S[n] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{f_N}(t) \varphi_m^{f_M}(t) dt \right] \right\} \left\{ \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_\psi(a, a_0; \tau, \tau_0) \Phi_m(a, \tau) \frac{da}{a^2} d\tau \right\} = \\ \sum_{m=m_1}^{m_1+M} \sum_{n=n_1}^{n_1+N} \underbrace{S[n]}_{(a)} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{f_N}(t) \varphi_m^{f_M}(t) dt \right]}_{(b)} \underbrace{\left[\frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_\psi(a, a_0; \tau, \tau_0) \Phi_m(a, \tau) \frac{da}{a^2} d\tau \right]}_{(c)} \quad (19)$$

式中 (a) 为临界采样点序列, (b) 为信号自身冗余性反映, (c) 为再生核函数 (小波基函数冗余性的反映). 该式很清楚的表明时间 - 尺度平面上各变换系数的冗余性与信号本身的冗余性以及小波基函数冗余性之间的相互关系. 图 6 为正弦信号的临界采样点列、过采样点列

在正交小波、冗余小波下的变换系数可视化图示，而本文选用的标准正交小波为 Haar 小波，非正交小波选用 Mexican Hat(mexh) 小波。

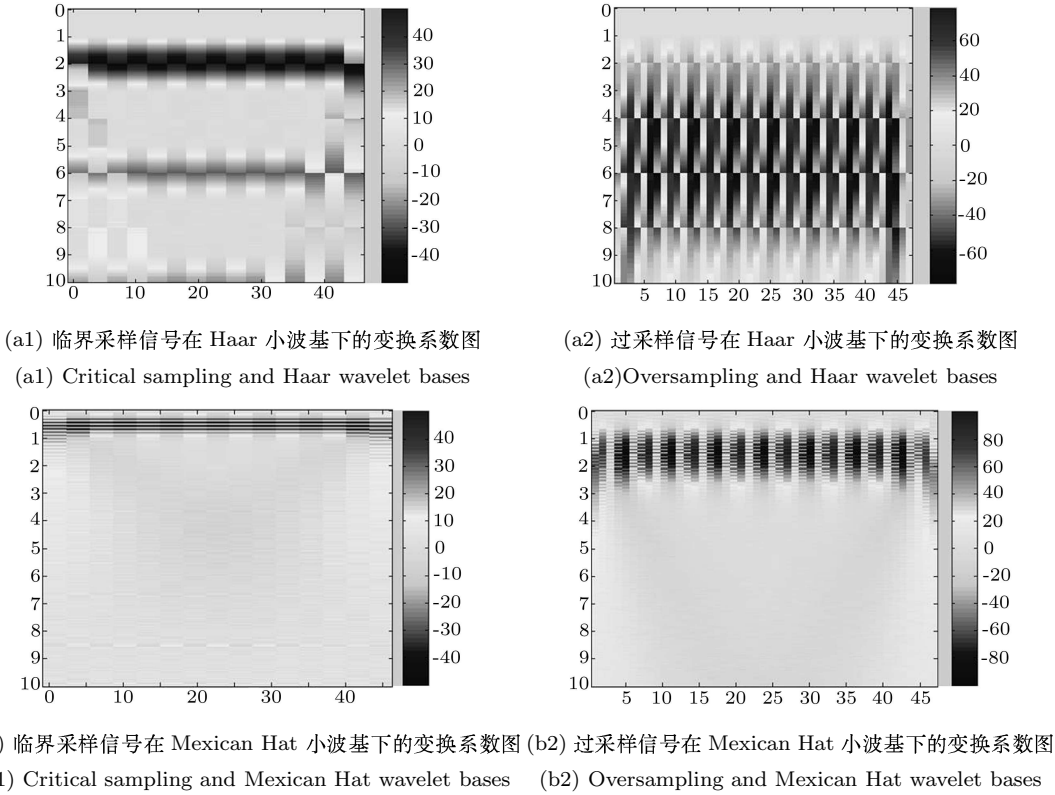


图 6 信号临界采样点列、过采样点列在正交小波、冗余小波下的变换系数可视化图

Fig. 6 Views of critical sampling sequence transformed by orthogonal and redundancy wavelet bases, views of oversampling sequence transformed by orthogonal and redundancy wavelet bases

对 (18) 作离散化处理，则可知

$$\begin{aligned}
 W_S[j_0, k_0] &= \frac{1}{C_\psi} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{m=m_1}^{m_1+M} S[m] \Phi_{Dm}[j, k] \right\} K_{D\psi}[j, j_0; k, k_0] \frac{1}{(ja_0)^2} = \\
 &\sum_{m=m_1}^{m_1+M} S[m] \left\{ \frac{1}{C_\psi} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_{Dm}[j, k] K_{D\psi}[j, j_0; k, k_0] \frac{1}{(ja_0)^2} \right\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

由 (20) 可知，小波变换系数与信号以及再生核函数之间的相互关系。同样对 (19) 式作离散化处理，则可以更清楚的知道三者之间的关系。

$$\begin{aligned}
 W_S[j_0, k_0] &= \\
 &\sum_{m=m_1}^{m_1+M} \left\{ \sum_{q=q_1}^{q_1+Q} S[n] \left[\sum_{p \in Z} \varphi_q^{f_Q}[p] \varphi_m^{f_M}[p] \right] \right\} \left\{ \frac{1}{C_\psi} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_{Dm}[j, k] K_{D\psi}[j, j_0; k, k_0] \frac{1}{(ja_0)^2} \right\} \\
 &\sum_{m=m_1}^{m_1+M} \sum_{n=n_1}^{n_1+N} \underbrace{S[n]}_{(a)} \underbrace{\left\{ \sum_{p \in Z} \varphi_q^{f_Q}[p] \varphi_m^{f_M}[p] \right\}}_{(b)} \left\{ \frac{1}{C_\psi} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_{Dm}[j, k] \underbrace{K_{D\psi}[j, j_0; k, k_0]}_{(c)} \frac{1}{(ja_0)^2} \right\} \quad (21)
 \end{aligned}$$

其中 (a) 为临界采样点列, (b) 体现采样点列自身冗余性的信号完全重构时的系数, (c) 小波基函数冗余性的体现, 由该式很清楚的知道任意一小波变换系数均可以由信号采样点列通过插值的方式得到. 因此小波变换系数的冗余性必然与采样点列、信号的重构系数以及小波基的再生核函数有直接的关系, 如果尽量降低信号序列以及小波基函数的冗余程度, 则势必在很大程度上减少了变换小波系数的冗余程度, 这一点由 (21) 式可以得到很好的体现. 所以连续小波变换系数以及离散小波变换系数的冗余性与信号本身冗余性以及小波基函数冗余性之间的关系在式 (7)、(15) 以及 (17)、(21) 中均得到很好的体现.

7 结论

本文分别就连续和离散两种情况, 详细讨论了小波变换系数冗余性同选用的小波基函数的冗余性以及信号自身的冗余性之间的关系. 其中包括: 小波基函数自身冗余性分析 (由再生核函数得以体现); 小波变换系数同小波基函数自身冗余性之间的关系; 信号自身的冗余性分析; 小波变换系数同信号冗余之间的关系. 最后得出小波变换系数的冗余性同小波基函数的冗余性以及信号的冗余性三者之间的统一关系式.

References

- 1 Ingrid Daubechies. Ten Lectures on Wavelets. U.S. Society for Industrial Applied Mathematics, Vii~Xii, 1992
- 2 Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods. Digital Image Processing. Second Edition, Academic Press, 1999
- 3 Stephane Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing. Translated by Yang L H, Dai D Q, Huang W L, Chen Q H, Beijing: China Machine Press, 2002. 94~95
- 4 Yuan X. Wavelet Lectures. Chengdu: School of Electronic and Information, Sichuan University, 2003
- 5 Li X M. Commulication Theory and Commulication Network. Chengdu: School of Electronic and Information, Sichuan University, 2003. 70~82
- 6 Stephane Mallat: A Wavelet Tour of Signal Processing. Second Ection. Beijing: China Machine Press, 1998. 94~96

郎方年 四川大学博士研究生. 研究方向为数字图像处理、生物特征识别以及人工智能.

(**LANG Fan-Nian** Ph.D. candidate at Sichuan University. His research interests include digital image processing, biology feature recognition, and artificial intelligence.)

袁晓 博士. 研究方向为电路与系统、神经网络以及数字通信等.

(**YUAN XIAO** Ph.D. His research interests include circuit and system, neural network, and digital communication.)

周激流 四川大学教授, 博士生导师. 研究方向为数字水印、信息处理以及生物特征识别.

(**ZHOU Ji-Liu** Professor at Sichuan University. His research interests include digital watermarking, signal processing, and biology feature recognition.)

何坤 四川大学博士研究生. 研究方向为数字图像处理、生物特征识别以及人工智能.

(**HE Kun** Ph.D. candidate at Sichuan University. His research interests include digital image processing, biology feature recognition, and artificial intelligence.)