第18卷 第5期　　自 动 化 学 报　　Vol. 18, No. 5
1992 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sep., 1992

短文

一类动态需求问题的预测方法

郭亚军　　潘德惠
（东北工学院管理工程系，沈阳　110006）

摘　　要

本文将某类耐用消费品的消费过程视为一个带有边界控制的 DPS，应用 DPS 理论，结合人口增长规律、人口政策及消费现状，提出了一种新的需求预测方法，并给出一个实例.

关键词：分布参数系统（DPS），需求函数，需求预测.

一、引　　言

与人们日常生活密切相关的某种耐用消费品的动态消费过程与消费者的动态变化过程是密不可分的. 但在以往的有关需求预测的方法中，却没有很好地将这两个动态过程有机地联系起来. 本文在文[1]的基础上，通过市场剩余需求容量函数将这两个动态过程联系起来，并视为一个带边界控制的DPS，应用 DPS 理论，结合人口的增长规律、人口政策及消费现状，提出了一种新的需求预测方法.

二、动态消费过程的描述

将与人们日常生活密切相关的某类耐用消费品简记为 G. 在稳态情况下，G的动态消费过程可描述为[1]

$$\frac{\partial w}{\partial q}+\frac{\partial w}{\partial t}=-m(q)w(q,t),\ 0<t<+\infty;\ 0<q<q_m, \tag{1}$$

$$w(q,0)=w_0(q),\ 0<q<q_m, \tag{2}$$

$$w(0,t)=u(R(t),j(t),i(t))=u(t),\ 0<t<+\infty, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p}{\partial t}=-n(r)p(r,t),\ 0<t<+\infty,\ 0<r<r_n, \tag{4}$$

$$p(r,0)=p_0(r),\qquad 0<r<r_n, \tag{5}$$

$$p(0,t)=v(t)=c\cdot\int_{r_1}^{r_2}a(r)h(r)p(r,t)\mathrm{d}r,0<t<+\infty, \tag{6}$$

式中 $w(q,t)=\partial E(q,t)/\partial q$ 为 t 时刻役龄为 q 的G的分布密度函数，$E(q,t)$ 为某地区 t 时刻(处于消费状态的）役龄小于或等于 q 的G的总数，$w_0(q)$ 为初始函数，$m(q)$ 为G的相对淘汰率函数，$u(t)$ 为 t 时刻(单位时间内)进入消费状态的G的总数，它与 t

本文于1990年7月4日收到.

时刻G的市场剩余需求容量 $R(t)$(其定义见(10)式)、G的价格 $j(t)$、消费者的收入 $i(t)$ 等因素有关. q_m 为G的最大役龄, $p(r,t)=\partial N(r,t)/\partial r$ 为消费者分布密度函数, $N(r,t)$ 为某地区 t 时刻年龄小于或等于 r 的消费者总数. $n(r)$ 为消费者相对死亡率函数, $p_0(r)$为初始函数, $v(t)$ 为 t 时刻(单位时间内)出生的婴儿数, c 为妇女平均生育率, $a(r)$ 为人口女性比例, $h(r)$ 为生育模式, $[r_1,r_2]$ 为妇女生育年龄区间, r_n 为人口的最高年龄.

系统(1)—(6)是一个带有两个边界控制的闭环系统,且边界控制 $u(t)$ 将取决于边界控制 $v(t)$, 其框图如图1所示.

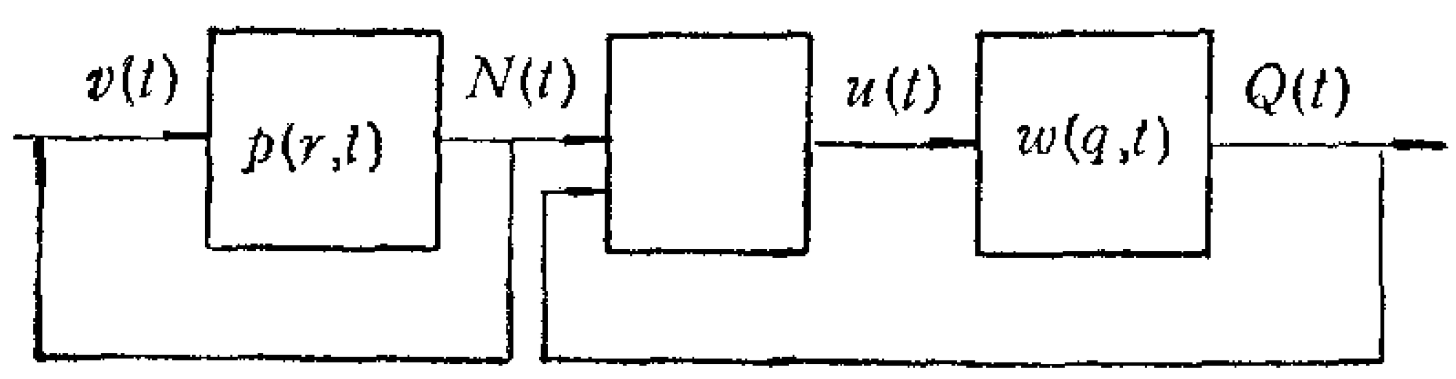

图1 消费系统框图

结论 1. 若系统(4)—(6)在李雅普诺夫意义下是稳定的, 则系统(1)—(3)在李雅普诺夫意义下也是稳定的.

开环系统(1)—(3)及(4)—(6)的解分别为[1,2]

$$w(q,t)=\begin{cases}u(t-q)\exp\left\{-\int_0^q m(\tau)d\tau\right\}, & q<t,\\ w_0(q-t)\exp\left\{-\int_{q-t}^q m(\tau)d\tau\right\}, & t\leqslant q.\end{cases} \tag{7}$$

$$p(r,t)=\begin{cases}v(t-r)\exp\left\{-\int_0^r n(\tau)d\tau\right\}, & r<t,\\ p_0(r-t)\exp\left\{-\int_{r-t}^r n(\tau)d\tau\right\}, & t\leqslant r.\end{cases} \tag{8}$$

在一般情况下,求解闭环系统(1)—(6)的解析解 $w(q,t)$ 是非常困难的, 在极特殊的情况下可求出其解析解 $w(q,t)$1).

三、市场需求函数

记

$$H(t)=\int_a^b \lambda(r,t)p(r,t)dr \tag{9}$$

为某地区 t 时刻关于G的市场需求容量函数, 式中 $[a,b]$ 为能够消费G的消费者年龄区间, $\lambda(r,t)$ 表示 t 时刻年龄为 r 的消费者(单位时间内)关于G的人均需求量. 定义

$$R(t)=H(t)-Q(t) \tag{10}$$

为G的市场剩余需求容量函数,式中

$$Q(t)=E(q_m,t)=\int_0^{q_m} w(q,t)dq \tag{11}$$

为 t 时刻处于消费状态的G的总数. 显然,当 $R(t)\equiv 0(t\in[t_0,T]$, 以下不妨取 $t_0=0)$ 时,则表明该地区在时间区间 $[0,T]$ 内关于G是处于消费饱和的状态. 否则是处于消费非饱和的状态.

1) 郭亚军, 一类动态系统的建模与控制, 东北工学院博士学位论文, 1990.

1）消费非饱和状态下的市场需求函数.

一般来说,当市场关于G的消费需求未达到饱和状态时,由于消费者相互攀比的心理及经济状况的改善，G的市场需求将随着时间的推移而逐渐趋于饱和的状态．可取此时(单位时间内)的市场需求函数为

$$u(t) = u_0\exp\{kt\}, t\in[0,T], \tag{12}$$

其中 u_0 为 $t=0$ 时G的需求量，k 为待定参数。即选择 k，使得

$$\int_0^T [H(t)-Q(t)]^2 dt = \min. \tag{13}$$

2）消费饱和状态下的市场需求函数.

若 $R(t)=0(t\in[0,T])$，有 $H(t)=Q(t)$，即

$$\int_a^b \lambda(r,t)p(r,t)dr = \int_0^{q_m} w(q,t)dq, \tag{14}$$

分别将(7)式和(8)式代入(14)式中并整理,得

$$\int_0^t u(t-\tau)s(\tau)d\tau = f(t), t\in[0,T]. \tag{15}$$

或者

$$\int_0^t u(\tau)s(t-\tau)d\tau = f(t), t\in[0,T]. \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned} f(t) = &\int_a^t \lambda(r,t)v(t-r)\exp\left\{-\int_0^r n(\tau)d\tau\right\}dr \\ &+\int_t^b \lambda(r,t)p_0(r-t)\exp\left\{-\int_{r-t}^r n(\tau)d\tau\right\}dr \\ &-\int_t^{q_m} w_0(q-t)\exp\left\{-\int_{q-t}^q m(\tau)d\tau\right\}dq, \end{aligned} \tag{17}$$

$$s(q) = \exp\left\{-\int_0^q m(\tau)d\tau\right\}, \tag{18}$$

称满足(16)(或(15))式的 $u(t)$ 为消费饱和状态下(单位时间内)G的市场需求函数.

此外,由(15)(或(16))式可得

结论 2. 不失一般性,以下假定 $a=0$，对任一 $t\in(0,h^*)(h^*=\min\{q_m,r_n\})$，若

$$w_0(q-t)\exp\left\{-\int_{q-t}^q m(\tau)d\tau\right\} = p_0(q-t)\lambda(q,t)\exp\left\{-\int_{q-t}^q n(\tau)d\tau\right\}, \tag{19}$$

成立,则

i) 当 $b=q_m$ 时,有

$$u(t-q) = v(t-q)\lambda(q,t)\exp\left\{\int_0^q (m(\tau)-n(\tau))d\tau\right\}, q\in(0,t). \tag{20}$$

ii) 当 $q_m<b$ 时,有

$$u(t-q) > v(t-q)\lambda(q,t)\exp\left\{\int_0^q (m(\tau)-n(\tau))d\tau\right\}, q\in(0,t). \tag{21}$$

iii) 当 $q_m>b$ 时,有

$$u(t-q) < v(t-q)\lambda(q,t)\exp\left\{\int_0^q (m(\tau)-n(\tau))d\tau\right\}, q\in(0,t). \tag{22}$$

此结论当 $b = r_n$ 时仍成立.

以上只就个人消费者的情形进行讨论的，这种讨论可以推广到集团消费者的情形.

四、实 例

本文将住宅视为特殊的耐用消费品,应用上述方法，对 L 省 P 市某新区未来 10 年住宅的年需求量作了预测.

1）消费者年增长量.

依该新区的实际情况,取 $r_1 = 20$（岁),$r_2 = 40$（岁)，因各年龄组中的女性比例系数变化不大,故取其平均值,即取 $a(r) = 0.491$，且取规范化的生育模式为

$$h(r) = \begin{cases} 1/2, 20 \leqslant r \leqslant 22, \\ 1/10, 23 \leqslant r \leqslant 25, \\ 1/14, 26 \leqslant r \leqslant 29, \\ 1/18, 30 \leqslant r \leqslant 34, \\ 1/25, 35 \leqslant r \leqslant 40. \end{cases} \tag{23}$$

记 v_i, v_i' 分别为相应于 $c = 1$ 及 $c = 1.2$ 时第 i 年出生的婴儿总数（$i = 1, 2, \cdots, 10$). 将 $n(r), p_0(r)$，$a(r)$，$h(r)$ 的数据及 (8) 式代入 (6) 式中并将其离散化，可分别求得 v_i 及 v_i' 的数据(见表 1).

表 1

年度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v（人)	3216	3275	3340	3400	3439	3478	3465	3400	3357	3348
v'（人)	3859	3929	4009	4080	4127	4173	4158	4086	4029	4018
$u(m^2)$	47524	49826	53704	56012	60928	61325	63567	64221	61079	59320
$u'(m^2)$	57026	59776	64461	67214	73117	73579	76262	77839	73306	71191

2）住宅年需求量.

目前该新区的居住水平已超过本世纪末人均居住面积 8m² 的标准,按这个标准计,该新区的住宅需求已达到饱和状态. 现按 $\lambda(r, t) = 10\text{m}^2$（约折合建筑面积 18.75m²)且仅就其“饱和”的情形，给出今后 10 年(砖混结构)住宅需求量的预测. 这里取 $a = 0$，$b = r_n = 100$（岁)，$q_m = 100$（年). 分别将 v_i（或 v_i')、$n(r)$、$m(q)$、$w_0(q)$、$p_0(r)$ 的数据及 (7), (8) 式代入 (16) 式并将其离散化,再分别令 $t = 1, 2, \cdots, 10$，即得该新区今后 10 年的住宅需求量 u_i 及 u_i' 见表1（u_i、u_i' 是分别与 v_i、v_i' 相对应的).

参 考 文 献

[1] Guo, Y., The Eolution Equation and Optimal Tactics for House-population, Proc. of 11th IFAC, 6(1990), 221—224.

[2] 宋健、于景元，人口控制论，科学出版社，1985.

THE FORECAST METHOD OF A DYNAMIC DEMAND PROBLEM

Guo Yajun　　Pan Dehui

(*Dept. of Management Engg., Northeast Univ. of Technology, Shenyang* 110006)

Abstract

In this paper, the consumption process of a kind of durable goods G is regarded as a DPS with boundary input functions. For this kind of goods G, the conception of market demand function and calculation method is discussed with the theory of DPS in terms of the law of population growth, the policy of population and the consumed state of G. Finally, an application example is given.

Key words: Distributed parameter system (DPS); demand function; demand forecast.