



# 基于状态变换的非线性鲁棒 控制器设计<sup>1)</sup>

褚健 于杰 王骥程

(浙江大学工业控制研究所, 杭州 310027)

## 摘 要

本文对具有特定结构的非线性系统,介绍了一种非线性变换使之线性化,并利用线性鲁棒控制器的设计方法设计非线性鲁棒控制器,从而提高了闭环系统对参数变动的鲁棒性.文中还通过一个 CSTR 反应器模型的仿真说明该方法的有效性.

**关键词:** 非线性控制,鲁棒控制,可逆变换.

## 一、引 言

80年代以来非线性系统的控制一直是控制理论的热点.对于仿射非线性系统,已有比较系统的方法,如微分几何方法,输入输出线性化方法等.对结构更为特殊的系统,则可采用更为简明、直观的方法加以处理<sup>[1,2]</sup>.本文正是基于这种思想,讨论一类非线性鲁棒控制器的设计.

## 二、一种非线性变换

考虑具有下述形式的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\alpha, x_1, x_2) + d_1, \\ \vdots \\ \dot{x}_i = f_i(\alpha, x_1, \dots, x_{i+1}) + d_i, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\alpha, x_1, \dots, x_n, u) + d_n, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x_i, d_i \in R^m, i = 1, 2, \dots, n$ , 分别是第  $i$  个子系统的状态和扰动向量;  $u \in R^m$  是系统的操作变量;  $\alpha \in R^l$  是系统的参数向量,具有不确定性,其标称值为  $\alpha_0$ .不失一般性,假定  $(x, u) = (0, 0)$  为系统的平衡点,且不受  $\alpha$  的影响(否则可进行平移变换,并在  $d_i$  中引入补偿项).其中  $x^T = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_n^T]^T$ .对系统(1)考虑如下的变换:

本文于1991年6月26日收到.

1) 国家教委优秀年轻教师基金及国家自然科学基金资助课题.

2) 褚健等,一类非线性系统的状态变换及其控制器设计,中国自动化学会第四届过程控制科学报告会论文集,1991.

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_i = \dot{z}_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n. \\ v = \dot{z}_n, \end{cases} \quad (2)$$

则可得到如下的线性系统:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & I_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} v \triangleq Az + Bv, \quad (3)$$

其中  $z^T = [z_1^T, z_2^T, \dots, z_n^T]^T$  和  $v$  为变换系统的状态向量和控制向量,  $I_m$  代表  $m \times m$  单位阵.

为方便起见, 将变换 (2) 记为

$$\begin{cases} z = T_{zx}(\alpha, x), \\ v = T_{vu}(\alpha, x, u). \end{cases} \quad (4)$$

并将  $T_{zx}$  视为  $x_i$  向  $z_i$  的映射,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; 将  $T_{vu}$  视为  $u$  向  $v$  的映射. 其中的  $\alpha, x$  是映射的参量. 这样, 如果映射可逆, 则系统 (3) 的能控性就保证了原系统 (1) 的点态能达性. 下面定理给出了该变换可逆的条件.

**定理 1.** 对于非线性映射 (4), 逆映射

$$\begin{cases} T_{xz}(\alpha, z): z_i \rightarrow x_i, i = 1, 2, \dots, n. \\ T_{uv}(\alpha, x, v): v \rightarrow u. \end{cases} \quad (5)$$

存在的条件是

$$(a) \det\left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right) \neq 0, \quad (b) \det\left(\frac{\partial f_n}{\partial u}\right) \neq 0.$$

定理是显然成立的, 这由变换 (4) 的 Jacobian 矩阵的非奇异条件不难得出.

### 三、非线性鲁棒反馈控制器设计

若逆映射 (5) 存在, 则非线性反馈律  $u(x)$  的求取可转化为线性系统 (3) 的反馈控制设计. 并且, 只要将原系统 (1) 内的参数摄动转换到线性系统 (3) 之中, 就可通过对系统 (3) 进行鲁棒控制设计, 从而得到原非线性系统 (1) 的鲁棒控制器.

假定对线性系统 (3) 采用线性状态反馈

$$v = K \cdot z = K \cdot T_{zx}(\alpha, x), \quad (6)$$

则闭环系统为  $\dot{z} = (A + BK)z \triangleq A_c z$ .

由于作用于实际系统 (1) 的控制变量是根据标称参数  $\alpha_0$  计算的, 即

$$u_0 = T_{uv}(\alpha_0, x, v_0). \quad (7)$$

而  $v_0 = K \cdot T_{zx}(\alpha_0, x) = T_{vu}(\alpha_0, x, u_0)$ , 故线性系统 (3) 中实际得到的控制变量已不再如式 (6) 所示, 而是如下式:

$$v_c = T_{vu}(\alpha, x, u_0). \quad (8)$$

若定义两者之差为  $d_z(\alpha, z) = d_x(\alpha, x) = v_c - v$ , (9)

则实际系统 (1) 所对应的线性变换系统应是

$$\dot{z} = A_c z + B d_z(\alpha, z). \quad (10)$$

$d_z(\alpha, z)$  的求取涉及两个多变量非线性变换的求逆, 一般难以实现, 故将其用级数展开.

**定理 2.** 将闭环系统 (10) 中的  $d_z(\alpha, z)$  关于  $\alpha, z$  在点  $(\alpha_0, 0)$  处进行泰勒级数展开, 则其最低次的项为

$$d_0 = \left( \sum_{i=1}^l \Delta\alpha_i D_i \right) z. \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} D_i = \frac{d}{dx} g_i(x) |_{x=0} \cdot \left( \frac{d}{dx} T_{zx}(\alpha_0, x) |_{x=0} \right)^{-1}, \\ g(x) = \frac{\partial}{\partial \alpha} T_{vu}(\alpha, x, u_0) |_{\alpha=\alpha_0} - K \frac{\partial}{\partial \alpha} T_{zx}(\alpha, x) |_{\alpha=\alpha_0}. \end{cases} \quad (12)$$

而  $g_i(x)$  为  $g(x)$  的第  $i$  列,  $\Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i0}, i = 1, 2, \dots, l$ .

证明. 由式 (7)–(9) 知

$$d_z(\alpha, z) = v_c - v = v_c - v_0 + v_0 - v,$$

而

$$\begin{aligned} v_c - v_0 &= T_{vu}(\alpha, x, u_0) - T_{vu}(\alpha_0, x, u_0) \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} T_{vu}(\alpha, x, u_0) |_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha + (\Delta\alpha \text{ 的高次项}), \\ v_0 - v &= K \cdot T_{zx}(\alpha_0, x) - K \cdot T_{zx}(\alpha, x) \\ &= -K \frac{\partial}{\partial \alpha} T_{zx}(\alpha, x) |_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha + (\Delta\alpha \text{ 的高次项}), \end{aligned}$$

故  $d_z(\alpha, z)$  关于  $\Delta\alpha$  的最低次项为

$$g(x) \Delta\alpha = \sum_{i=1}^l g_i(x) \Delta\alpha_i,$$

而  $g(x)$  由式 (12) 给出. 将  $g_i(x)$  在  $x = 0$  处展开有

$$g_i(x) = \frac{d}{dx} g_i(x) |_{x=0} \cdot x + (x \text{ 的高次项}).$$

由于

$$x = \frac{d}{dz} T_{zx}(\alpha_0, z) |_{z=0} \cdot z + (z \text{ 的高次项}),$$

故有

$$g_i(x) = \frac{d}{dx} g_i(x) |_{x=0} \cdot \frac{d}{dz} T_{zx}(\alpha_0, z) |_{z=0} \cdot z + (z \text{ 的高次项})$$

将其代入下式即得式 (11):

$$\frac{d}{dz} T_{zx}(\alpha_0, z) |_{z=0} = \left[ \frac{d}{dx} T_{zx}(\alpha_0, x) |_{x=0} \right]^{-1}.$$

证毕.

这样, 只需求得  $T_{vu}$  的逆即可得到下面含有线性摄动项的线性系统

$$\dot{z} = \left( A + BK + B \sum_{i=1}^l \Delta\alpha_i D_i \right) z + (z, \Delta\alpha \text{ 的高次项}). \quad (13)$$

而这对仿射非线性系统是毫不困难的. 若忽略 (13) 式中的高次项, 就可运用线性系统的鲁棒反馈设计方法<sup>[2,3]</sup>求取反馈阵  $K$ , 经逆变换后得到非线性鲁棒控制器为

$$\begin{cases} u(x) = T_{uv}(\alpha_0, x, v_0), \\ v_0 = K \cdot T_{zx}(\alpha_0, x). \end{cases} \quad (14)$$

#### 四、一个 CSTR 的数值例子

考虑下面的二阶非线性 CSTR 化学反应器模型<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + D_a(1-x_1)e^{\frac{x_2}{1+x_2/\gamma}} + d_1, \\ \dot{x}_2 = -(1+\beta)x_2 + BD_a(1-x_1)e^{\frac{x_2}{1+x_2/\gamma}} + \beta u + d_2. \end{cases} \quad (15)$$

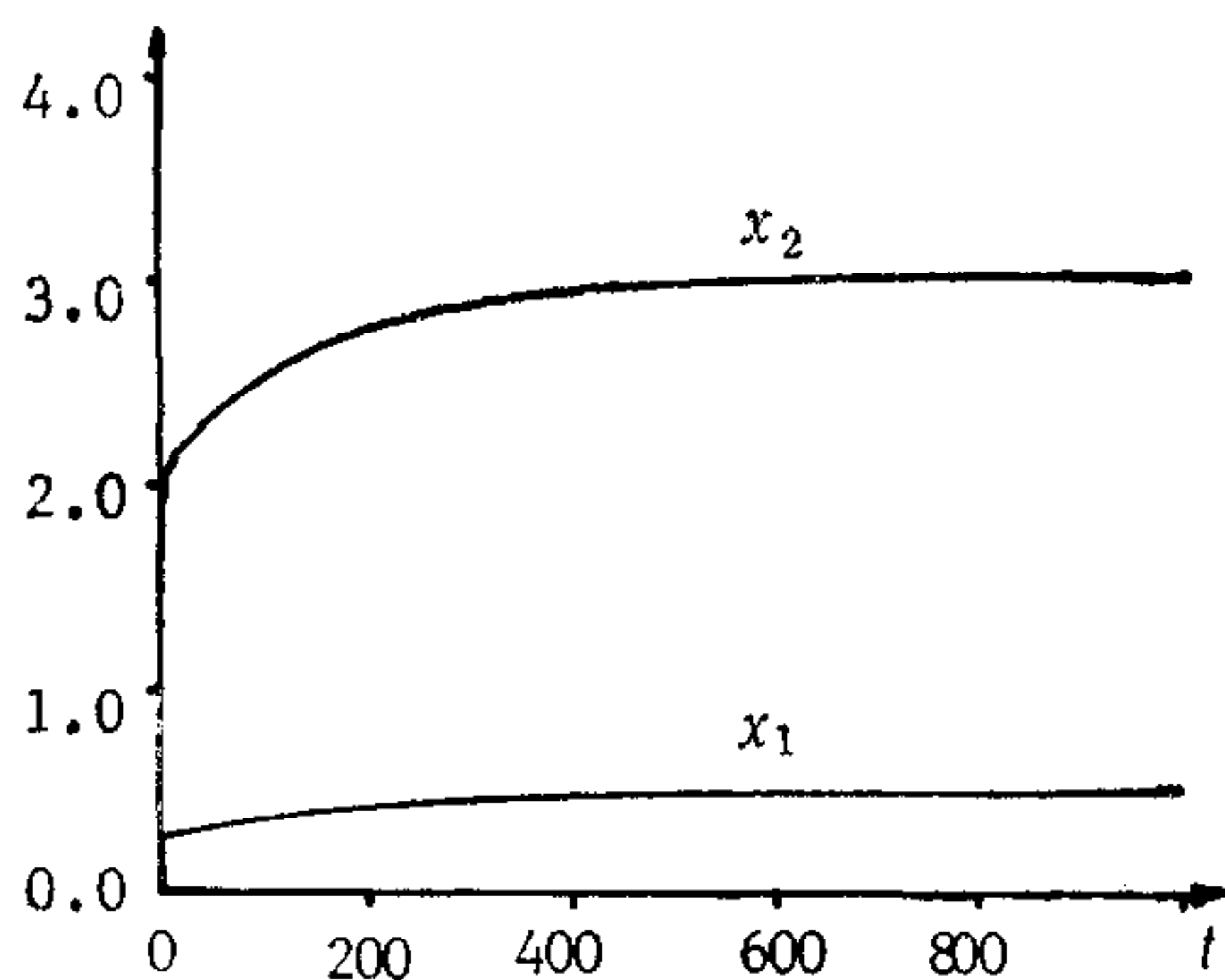
其中  $x_1, x_2$  为归一化后的反应器中的反应物浓度和温度变量,  $u$  为操作变量,  $d_1, d_2$  为平衡点的偏置量. 参数的标称值取为 ( $B_0 = 1.0, \beta_0 = 0.3, \gamma_0 = 20.0, D_{a0} = 0.072$ ), 并假定只有  $D_a$  会变化, 此时  $l = 1$ . 平衡点为 ( $x_1^* = 0.5, x_2^* = 3.03, u^* = 11.62$ ), 由于平衡点非零, 故需作平移. 但为了表达的简明, 各变量平移后符号不变. 对系统 (15) 实施反馈控制 (14) 后, 变换系统为

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1 + \Delta_r)k_1 - \Delta_r k_2 + \tilde{d}_1 \Delta_r & k_2 + \tilde{d}_2 \Delta_r \end{bmatrix} z + (\Delta D_a \text{ 的高次项}), \quad (16)$$

其中  $K = [k_1 \ k_2], \Delta_r = \Delta D_a / D_{a0}, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2$  与  $K$  无关. 当  $k_1, k_2 < 0$ , 且  $|\tilde{d}_1|, |\tilde{d}_2|$  远小于  $|k_1|, |k_2|$  时, 系统 (16) 在原点的局部稳定性条件为

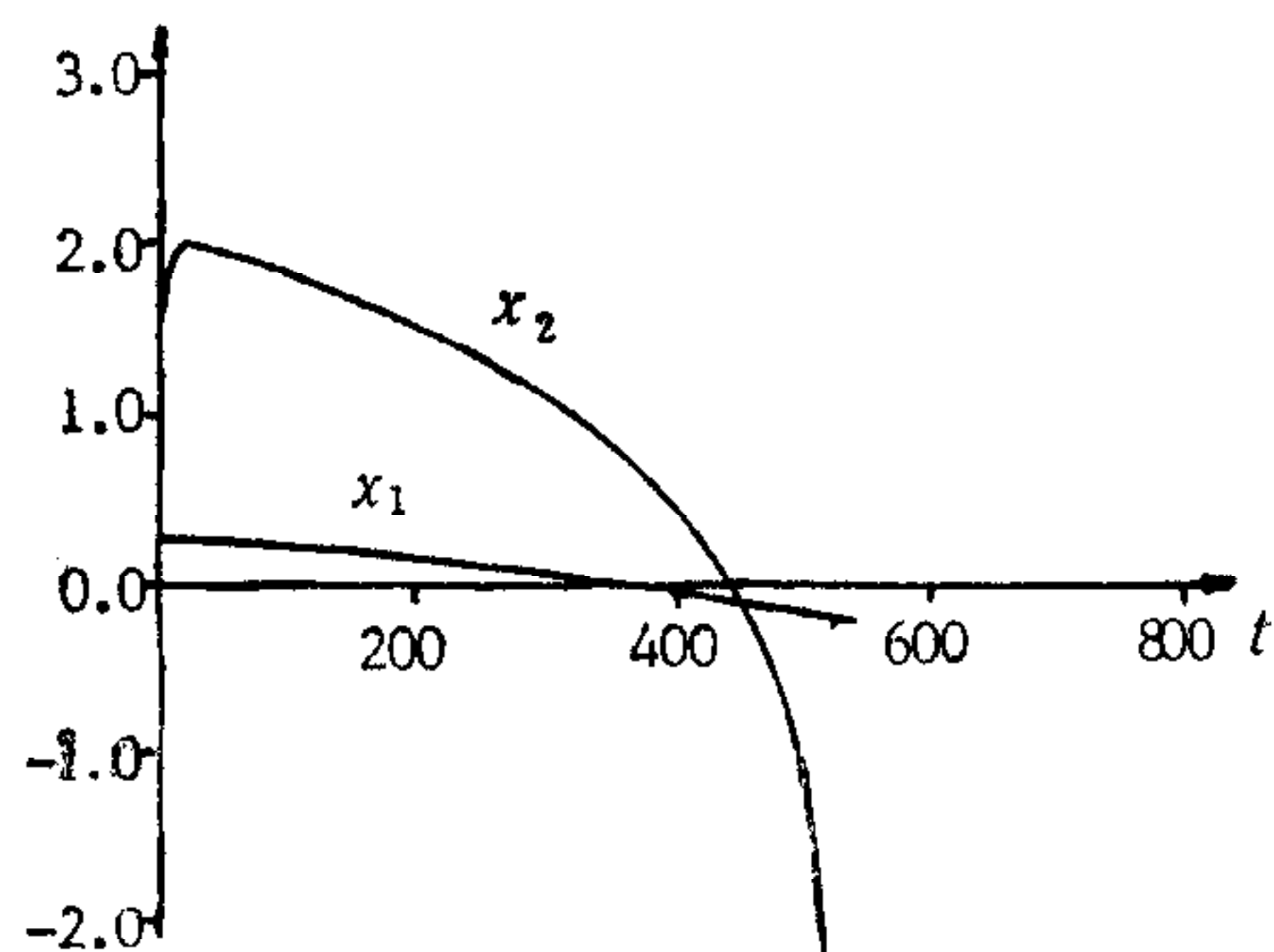
$$K_r \triangleq \frac{k_1}{k_2} > \frac{\Delta_{r\max}}{1 + \Delta_{r\max}}. \quad (17)$$

其中  $\Delta_{r\max}$  是  $D_a$  的最大相对变化量. 当  $\Delta_{r\max} = 70\%$ , 即  $D_a$  由 0.072 变至 0.12 时,



$K_r = 25\%, D_a = 0.072$

图 1



$K_r = 25\%, D_a = 0.12$

图 2



对两组  $K$  的仿真结果证实了式 (17) 的结论。图1,图2 分别是  $K_1 = [-5, -20]$  作用下标称系统和摄动后闭环系统的响应,图3 是  $K_2 = [-10, -20]$  的结果。其中  $x_1(0) = x_2(0) = 0.3$ 。

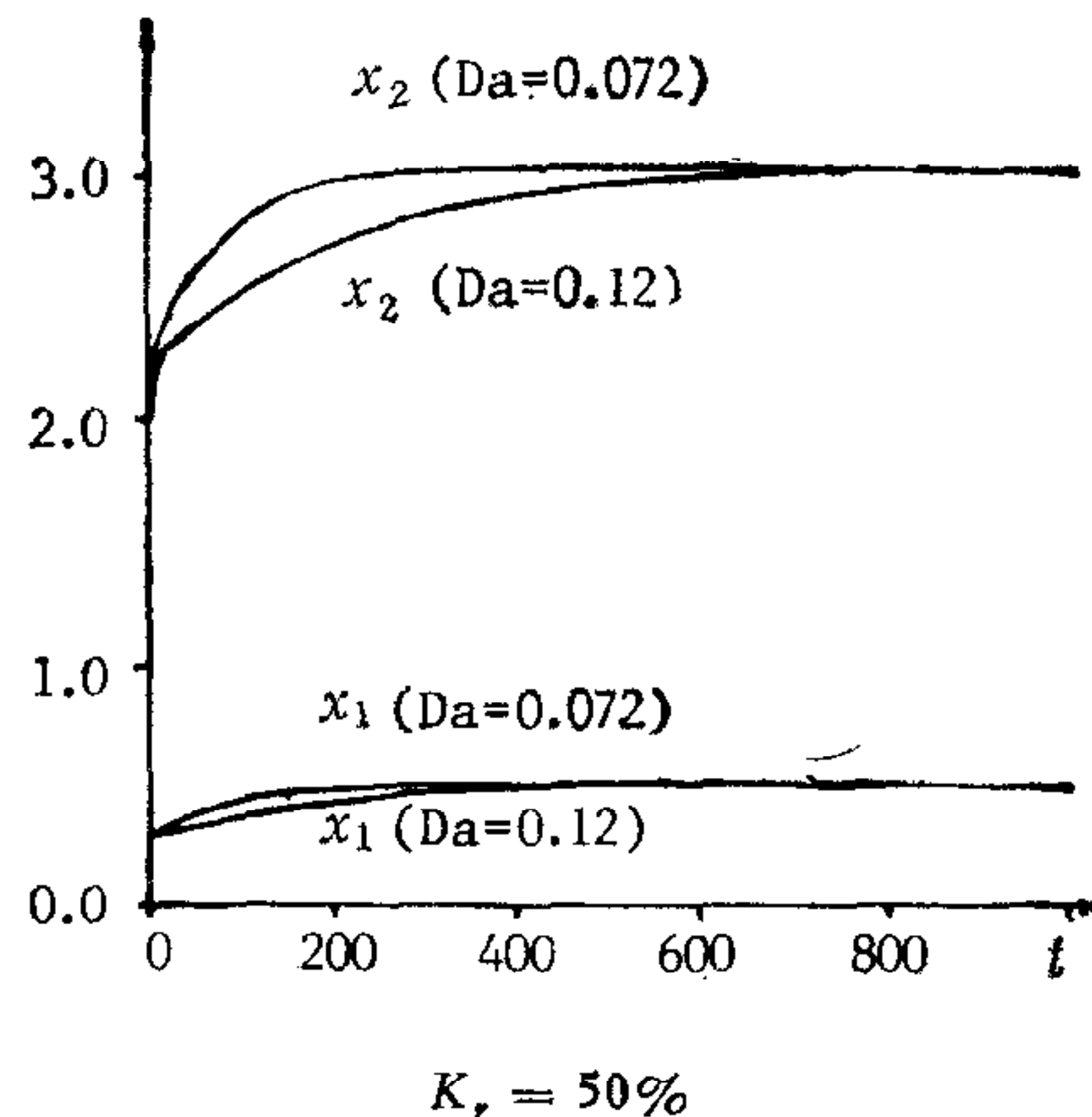


图 3

仿真结果表明,本文提出的非线性鲁棒反馈控制器的设计方法用于一类仿射非线性系统时,是可行的,也是有效的。

### 参 考 文 献

- [1] 韩京清,反馈系统中的线性与非线性,控制与决策,3(1988),(2),27—32.
- [2] Kosmidon, O. I., Robust Stability and Performance of Systems with Structured and Bounded Uncertainties: An Extension of the Guaranteed Cost Control Approach., *Int. J. Contr.*, 52 (1990), (3), 627.
- [3] Keel, L. H. et al., Robust Control with Structured Perturbation, *IEEE Trans. AC*, AC-33 (1988), (1), 68.
- [4] Ray, W. H., *Advanced Process Control*, McGraw-Hill Book Company, 1981.

## DESIGN OF A NONLINEAR ROBUST CONTROLLER BASED ON STATE TRANSFORMATION

CHU JIAN YU JIE WANG JICHENG

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

### ABSTRACT

This paper introduces a nonlinear state transformation that transforms a type of nonlinear systems into linear systems, which enables the design methods of robust control for the linear system to be extended to the type of nonlinear ones. Therefore, the degree of the robustness of such systems can be increased. A simulation using a CSTR system is presented to illustrate the effectiveness of this approach.

**Key words :** Nonlinear control; robust control; invertible transformation.