第18卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 18, No. 5
1992年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1992

短文

线性不确定系统的鲁棒稳定控制器设计[1)]

倪茂林 吴宏鑫
(北京控制工程研究所，100080)

摘 要

对于满足匹配条件的线性不确定系统，本文根据 Lyapunov 稳定性原理给出一种鲁棒稳定控制器的设计方法，这种方法可以设计鲁棒稳定控制器对于标称系统是最优的. 本文还将这种方法推广到不满足匹配条件的线性不确定系统，并给出数值例子说明了这种方法的有效性.

关键词: 鲁棒控制，稳定性，最优调节器，不确定系统.

一、引言与问题描述

线性最优调节器具有许多优良品质，因而在控制系统设计中得到了广泛应用[1]. 然而，在实际工程应用中，由于环境条件变化或辨识不精确等因素，系统模型中常含有很大不确定性. 这样，按照标称参数设计的控制系统，在实际运行过程中可能会失去预期的性能指标. 近年来鲁棒稳定控制器的设计一直是学者们的主要研究课题[2-5]. 对于满足匹配条件[3]的线性不确定系统，文献[3]用试凑和数值搜索法讨论了鲁棒稳定控制器的设计. 文献[4]又给出了一种设计鲁棒稳定控制器的直接方法，但这种方法设计的控制器一般比较保守(反馈增益大). 文献[3, 4]中的 Lyapunov 方程要求标称系统矩阵渐近稳定，所以对于标称系统非稳定情况，这些方法需要预先设计稳定补偿器. 文献[5]提出的方法不能用来设计满足一般匹配条件的不确定系统.

本文根据 Lyapunov 稳定性原理并利用 Riccati 方程的解，给出了一种鲁棒稳定控制器的设计方法. 这种方法不需试凑和数值搜索，计算简单，而且所设计的控制器反馈增益小，实现方便. 另外还可以设计鲁棒控制器对于标称系统是最优的.

考虑线性不确定系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A+\Delta A(\boldsymbol{r}(t))]\boldsymbol{x}(t)+[B+\Delta B(\boldsymbol{s}(t))]\boldsymbol{u}(t), \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态变量，$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是控制变量，A,B 是适当维的标称系统矩阵和控制矩阵，且 (A,B) 可控. 假定系统可变参数向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{s}(t)$ 是勒贝格可测的，且有 $\boldsymbol{r}(t)\in\varphi\subset R^p$，$\boldsymbol{s}(t)\in\phi\subset R^q$，这里 φ 和 ϕ 均为有界紧集. 若存在连续矩阵函数 $D(*)$，$E(*)$ 满足条件

本文于1991年6月8日收到.
1) 国家自然科学基金资助课题.

$$\Delta A(\boldsymbol{r}) = BD(\boldsymbol{r}), \Delta B(\boldsymbol{s}) = BE(\boldsymbol{s}),\ \forall \boldsymbol{r} \in \varphi,\ \boldsymbol{s} \in \psi, \tag{2a}$$

$$2I + E(\boldsymbol{s}) + E'(\boldsymbol{s}) > 0, \forall \boldsymbol{s} \in \psi, \tag{2b}$$

则称不确定系统（1）是匹配的.

本文工作是对于不确定系统（1），确定一线性定常反馈控制

$$\boldsymbol{u}(t) = K\boldsymbol{x}(t) \tag{3}$$

使系统（1）对于所有可变参数 $\boldsymbol{r}(t) \in \varphi, \boldsymbol{s}(t) \in \psi$，均保持渐近稳定性.

二、满足匹配条件的不确定系统

定理 1. 对于线性不确定系统（1），若不确定性满足匹配条件（2），且由式(2b)知，存在 $\delta > 0$，满足

$$2I + E(\boldsymbol{s}) + E'(\boldsymbol{s}) \geqslant \delta I, \forall \boldsymbol{s} \in \psi, \tag{4}$$

则反馈控制

$$\boldsymbol{u}(t) = K\boldsymbol{x}(t), K = -\gamma B'P \tag{5}$$

可使系统（1）渐近稳定，且为二次稳定[5]，其中系数 γ 满足条件

$$\gamma > 1/\delta, \tag{6}$$

P 是 Riccati 方程

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \tag{7}$$

的正定解，其中加权阵

$$R = I/(\gamma\delta - 1), \tag{8a}$$

$$Q \geqslant [D(\boldsymbol{r})]'D(\boldsymbol{r}) + \varepsilon I, \forall \boldsymbol{r} \in \varphi, \tag{8b}$$

式中 I 为单位阵，ε 为任意小的正数.

进一步研究表明，上面设计的鲁棒控制器对于标称系统还是最优的.

定理 2. 对于线性不确定系统（1），若在定理 1 中有

$$Q_* = Q + (\gamma + 1 - \gamma\delta)PBB'P > 0 \tag{9}$$

成立，则按定理 1 得到的鲁棒控制（5）对于标称系统（A,B）是线性二次最优的，其中加权阵为 $\{Q_*, I/\gamma\}$，I 为单位阵.

例 1. 某磁悬浮列车系统可用方程（1）描述[4]，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 57000 & 1938 & -16 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -14.25 \end{bmatrix},$$

系统满足匹配条件（2），且

$$D(\boldsymbol{r}) = [-800\ \ 22.8\ \ 0.2246]\boldsymbol{r}(t), |\boldsymbol{r}(t)| \leqslant 1,\ \forall t \geqslant 0,$$

$$E(\boldsymbol{s}) = 0.2\boldsymbol{s}(t),\ |\boldsymbol{s}(t)| \leqslant 1, \forall t \geqslant 0.$$

若选取 $\delta = 1.6, \gamma = 7.2$，则由定理 1 得鲁棒稳定控制为

$$\boldsymbol{u}(t) = [6000.8\ \ 332.4\ \ 5.4]\boldsymbol{x}(t).$$

按文献 [4] 方法得到的鲁棒稳定控制为

$$\boldsymbol{u}(t) = [8800.0\ \ 483.3\ \ 7.7]\boldsymbol{x}(t)$$

显然，按本文方法设计的鲁棒稳定控制器反馈增益较小，实现方便.

三、不满足匹配条件的不确定系统

对于不满足匹配条件的系统，文献 [5,6] 将系统的不确定性分解为“匹配”和“不匹配”两部分. 若“不匹配量度”不超过“不匹配容限”，则系统仍可二次稳定[5]. 利用上述思想，将上一节提出的方法推广到不满足匹配条件的系统.

定义 1[5,6]. 对于系统 (1)，若存在连续矩阵函数 $\Delta A_m(*)$，$\Delta B_m(*)$，$\Delta\tilde{A}(*)$，$\Delta\tilde{B}(*)$ 满足

1) $\Delta A(\boldsymbol{r})=\Delta A_m(\boldsymbol{r})+\Delta\tilde{A}(\boldsymbol{r}),\forall\boldsymbol{r}\in\varphi$;

2) $\Delta B(\boldsymbol{s})=\Delta B_m(\boldsymbol{s})+\Delta\tilde{B}(\boldsymbol{s}),\forall\boldsymbol{s}\in\psi$;

3) 简化系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_m(t)=[A+\Delta A_m(\boldsymbol{r})]\boldsymbol{x}_m(t)+[B+\Delta B_m(\boldsymbol{s})]\boldsymbol{u}(t) \tag{10}$$

在某一反馈控制

$$\boldsymbol{u}_m(t)=K_m\boldsymbol{x}_m(t) \tag{11}$$

作用下，对于所有可变参数 $\boldsymbol{r}(t)\in\varphi,\boldsymbol{s}(t)\in\psi$ 均为二次稳定[5]，则称系统 (1) 是可分解的.

定义 2[5]，若系统 (1) 可分解，且其简化系统 (10) 是匹配的，则在控制函数 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)$ 作用下，系统 (1) 的不匹配量度为

$$M_e(K)=\max_{\boldsymbol{r}\in\varphi}\|\Delta\tilde{A}(\boldsymbol{r})\|+\max_{\boldsymbol{s}\in\psi}\|\Delta\tilde{B}(\boldsymbol{s})K\|. \tag{12}$$

定义 3[5]，假定系统 (1) 可分解，且其简化系统 (10) 是匹配的，若存在 $\alpha>0$，$P>0$ 满足条件

$$\begin{aligned}L_m(\boldsymbol{x}_m,t)&\equiv\boldsymbol{x}_m'[(A+\Delta A_m)'P+P(A+\Delta A_m)\\&\quad+2P(B+\Delta B_m)K_m]\boldsymbol{x}_m\\&\leqslant-\alpha\|\boldsymbol{x}_m\|^2,\ \forall\boldsymbol{x}_m\in R^n,\ \boldsymbol{r}\in\varphi,\ \boldsymbol{s}\in\psi,\ t\geqslant0,\end{aligned} \tag{13}$$

则系统 (1) 的不匹配容限为

$$M^*(\alpha,P)=0.5\alpha/\lambda_{\max}(P). \tag{14}$$

根据以上定义，下面给出一个使系统 (1) 二次稳定的充分条件.

定理 3. 假定系统 (1) 可分解，且其简化系统 (10) 满足匹配条件 (2)，依据定理 1 对系统 (10) 进行鲁棒设计，所得控制器增益为 K_m，又根据式 (8b) 设

$$\alpha=\min_{\boldsymbol{r}\in\varphi}\lambda_{\min}[Q-D'(\boldsymbol{r})D(\boldsymbol{r})], \tag{15}$$

则控制器 K_m 能使系统 (1) 二次稳定的充分条件为

$$M_e(K_m)<M^*(\alpha,P), \tag{16}$$

其中 P,K_m 由定理 1 得到，M_e 和 M^* 分别由 (12),(14) 式定义.

为了增大系统的不匹配容限 M^*，给出下面结果.

推论 1. 由定理 3 设计系统 (1)时，若 (7),(8),(15) 式中的 Q 选为可调矩阵

$$Q(\beta)=(1+\beta)Q_0,\quad\beta\in[0,+\infty), \tag{17}$$

其中 $Q_0 > D'D$ 按定理 1 中的方法选择,则定理 3 的结果仍成立,但 (16) 式中的不匹配容限 M^* 定义如下

$$M^*(\beta) = 0.5\beta\lambda_{\min}(Q_0)/\lambda_{\max}[P(\beta)]. \tag{18}$$

定理 4. 若 $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2$,则 (18) 式中

$$M^*(\beta_1) \leqslant M^*(\beta_2). \tag{19}$$

例 2. 某双积分系统可用方程 (1) 描述,其中[5]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

不确定性为

$$\Delta A(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ r_2 & r_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta B(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中可变参数 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{s}(t)$ 满足

$$|r_1(t)| \leqslant 0.2, |r_2(t)| \leqslant 1, |r_3(t)| \leqslant 1, \forall t \geqslant 0.$$

可以验证,系统是可分解的,其中

$$\Delta A_m(\boldsymbol{r}) = BD(\boldsymbol{r}), \ D(\boldsymbol{r}) = [r_2 \ \ r_3],$$
$$\Delta B_m(\boldsymbol{s}) = BE(\boldsymbol{s}), \ E(\boldsymbol{s}) = 0,$$
$$\Delta\widetilde{A}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\widetilde{B}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

根据定理 3、推论 1 和定理 1 可知,$Q_0 = \mathrm{diag}(2.1, 2.1)$,若取 $\beta = 2$,则得 $Q = \mathrm{diag}(6.3, 6.3)$。由定理 1,选 $\delta = 2$,并取 $\gamma = 1.4$,可得反馈阵 $K_m = [-2.619 \ \ -3.307]$。由 (18)、(12) 式易得 $M^* = 0.2464$,$M_e = 0.2$,显然有 $M_e < M^*$。根据推论 1 可知,这样得到的鲁棒控制器可使整个系统二次稳定。

文献 [5] 得到的反馈阵为 $K_0 = [-2.646, -3.506]$,而不匹配容限 M^* 只为 0.2377。

显然,按本文方法设计的鲁棒控制器,其增益幅值较小,而不匹配容限却较大,从而显示了本文方法的优越性。

致谢. 本文工作在杨嘉墀教授的指导下完成,在此深表感谢!

参 考 文 献

[1] Ni, M. L., A Note on the Maximum Solutions of Riccati Equations, *Automatica*, **27**(1991),1059—1060.

[2] 倪茂林,一种次最优鲁棒调节器的设计方法,控制理论与应用,**6**(1989),112—116.

[3] Schmitendorf, W.E., Design Methodology for Robust Stabilizing Controllers, *AIAA J. Guidance, Control, Dyn.*, **10**(1987), 250—254.

[4] Jabbari, F. and Schmitendorf, W.E., A Noniterative Method for the Design of Linear Robust Controllers, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **35**(1990), 954—957.

[5] Tsay, S.C. et al., Robust Linear Quadratic Optimal Control for Systems with Linear Uncertainties, *Int. J. Control*, **53**(1991), 81—96.

[6] Barmish, B. R. and Leitmann, G., On Ultimate Boundedness Control of Uncertain Systems in the Absence of Matching Conditions, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **27**(1982), 153—158.

THE DESIGN OF ROBUST STABILIZING CONTROLLERS FOR UNCERTAIN SYSTEMS

NI MAOLIN WU HONGXIN
(*Beijing Institute of Control Engineering*, 100080)

ABSTRACT

For a linear system containing time-varying matched uncertaintyies, based on the Lyapunov stability criterion, we present a new method for designing a robust stabilizing controller in this paper. The method is simple in compuation and the resulting controller is easy in implementation. Meanwhile, the robust control law can be made linear quadratic optimal with respect to an index function for the nominal system. This method is also generalized to linear mismatched uncertain systems. The examples have bown the effectiveness of this method.

Key words: Robust control; stability; optimal regulators; uncertain systems.