第 18 卷 第 5 期
1992 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 18, No. 5
Sep., 1992

短 文

递推自适应加权多步预测控制1)

徐立鸿 冯纯伯

(东南大学自动化研究所，南京 210018)

摘 要

本文给出了加权多步预测控制（WLPC）[1] 的递推自适应算法，该算法将每个采样时刻 WLPC 算法中计算量很大的极点配置方程求解问题化为一步递推的算法，大大减少了在线计算量，从而使 WLPC 成为一种实际可行的算法. 本文还证明了其闭环稳定性.

关键词： 预测控制，自适应控制，极点配置，闭环稳定性.

一、引 言

当系统模型参数未知时，按传统方法形成自适应加权多步预测控制算法后，将面临一个计算量很大的问题，即在每个采样时刻都要在线解一个极点配置方程，这很可能导致算法在快速采样时无效. 为了解决这个问题，本文给出了递推自适应加权多步预测控制算法. 该算法的特点是：用一步递推取代了在线解极点配置方程，从而大大减少了在线计算量，使它成为有效实用的算法. 由于递推算法的采用，使得该算法的闭环稳定性较容易被证明.

二、递推自适应 WLPC 算法

假定系统模型为

$$A(z^{-1})y(t)=B(z^{-1})u(t-1)+\xi(t), \tag{1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A(z^{-1})&=1+a_1z^{-1}+\cdots+a_{n_a}z^{-n_a}\\B(z^{-1})&=b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_{n_b}z^{-n_b}\end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

$\{y(t)\}$、$\{u(t)\}$ 和 $\{\xi(t)\}$ 分别表示系统的输出、输入和零均值的白噪声序列.

极小化的性能指标为

$$J=E\left\{\sum_{k=1}^{N}[P_k(z^{-1})y(t+k)-Q_k(z^{-1})r(t+k)]^2+\sum_{k=1}^{M}[R_k(z^{-1})u(t+k-1)]^2\right\}. \tag{3}$$

本文于 1991 年 7 月 8 日收到.
1) 国家自然科学基金资助的课题.

其中 $r(\cdot)$ 是参考输入，假定它已知且有界. N, M 分别是输出预报水平和控制水平，$N \geqslant M$. $P_k(z^{-1})$、$Q_k(z^{-1})$ 和 $R_k(z^{-1})$ 分别为加权因子，为保证闭环性能，选取它们为如下形式：

$$P_k(z^{-1}) \equiv P(z^{-1}), Q_k(z^{-1}) \equiv Q(z^{-1}), (k=1,2,\cdots,N).$$

$$R_k(z^{-1}) = \begin{cases} \lambda, & \text{当 } 2 \leqslant k \leqslant M, \\ \lambda + z^{-1}\dfrac{K_w(z^{-1})}{K_L(z^{-1})}, & \text{当 } k=1\ (K_L(0)=1). \end{cases} \tag{4}$$

这里，$P(z^{-1})$、$Q(z^{-1})$、$K_w(z^{-1})$ 和 $K_L(z^{-1})$ 为待选多项式.

极小化 (3) 式得到的 WLPC 控制律[1]为

$$\mathscr{D}u(t) + \mathscr{G}y(t) = \mathscr{L}r(t+N). \tag{5}$$

其中 $\mathscr{D}$、$\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{L}$ 均为 z^{-1} 的多项式. 闭环方程为

$$Ty(t) = z^{-1}B\mathscr{L}r(t+N) + \mathscr{D}\xi(t). \tag{6}$$

这里 T 是由设计者选取的具有期望零点的稳定多项式，它满足如下极点配置方程：

$$\mathscr{A}_1K_L + z^{-1}\mathscr{B}_1K_w = T. \tag{7}$$

其中，$\mathscr{A}_1$、$\mathscr{B}_1$ 为只与模型 A、B 有关的多项式，其定义见文 [1]. 当 A、B 互质时，$\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{B}_1$ 也互质，此时由 (7) 式可解出唯一的 K_w 和 K_L.

假定 $\deg\mathscr{A}_1 = n_1, \deg\mathscr{B}_1 = n_2, \deg T = n \triangleq n_1 + n_2$，则有 $\deg K_w = n_1 - 1$, $\deg K_L = n_2$. 引进如下记号：

$$K^* = [1, k_{L1}, \cdots, k_{Ln_2}, k_{w1}, \cdots, k_{wn_1}]^T \tag{8}$$

$$t^* = [1, t_1, \cdots, t_n] \tag{9}$$

和

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & & \\ \alpha_1 & 1 & \ddots\ 0 & \beta_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \alpha_1 & 1 & \vdots & \ddots & \beta_0 \\ \alpha_{n_1} & \vdots & \ddots & \beta_{n_2} & & \vdots \\ & \vdots & \alpha_1 & & \ddots & \beta_{n_2} \\ & \alpha_{n_1} & \vdots & & & \\ & \ddots & \vdots & & & \\ & & \alpha_{n_1} & & & \end{bmatrix} \triangleq [d_1, d_2 \cdots, d_{n+1}] \tag{10}$$

其中 k_{Li}、k_{wi}、t_i、α_i 和 β_i 分别为多项式 K_L、K_w、T、$\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{B}_1$ 的系数. 于是 (7) 式可写成

$$D \cdot K^* = t^*. \tag{11}$$

解极点配置方程 (7)，等价于由 (11) 式解 K^*. 下面给出解 K^* 的递推公式

$$\left.\begin{aligned} K^*(t) &= K^*(t-1) + \frac{d_i^T e_k(t-1) I_i}{d_i^T d_i} \\ i &= i(t) = (t \bmod n) + 2 \\ e_k(t) &= t^* - DK^*(t) \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

其中 d_i 为 D 的第 i 列，I_i 为单位阵 I 的第 i 列.

为证明递推算法 (12) 的有效性，必须证明 $K^*(t) \to K^*$.

引理. 若 A、B 互质，则有 $\lim\limits_{t\to\infty} K^*(t) = D^{-1}t^* = K^*$.

证明. 若 A、B 互质,则 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{B}_1$ 互质,从而矩阵 D 非奇异。令

$$v(t) = e_k(t)^T e_k(t), \tag{13}$$

于是由 (12) 式有

$$e_k(t) = e_k(t-1) - \frac{d_i d_i^T e_k(t-1)}{d_i^T d_i}, \quad (i = i(t)), \tag{14}$$

从而

$$v(t) - v(t-1) = \frac{-[d_i^T e_k(t-1)]^2}{d_i^T d_i},$$

$$v(t) - v(0) = -\sum_{l=1}^{t} \frac{[d^T{}_{i(l)} e_k(l-1)]^2}{d^T{}_{i(l)} d_{i(l)}}. \tag{15}$$

对 $v(0) < \infty$, 上式蕴含着

$$\lim_{t\to\infty} d^T{}_{i(t)} e_k(t-1) = 0. \tag{16}$$

由 (14) 式得

$$\lim_{t\to\infty} \|e_k(t) - e_k(t-j)\| = 0, \ j < \infty. \tag{17}$$

由 (16) 式得

$$\lim_{t\to\infty} d^T{}_{i(t)} e_k(t-j) = 0, \ j < \infty. \tag{18}$$

故有

$$\lim_{t\to\infty} \bar{D}^T e_k(t) = 0, \tag{19}$$

其中,$\bar{D} = [d_2, d_3, \cdots, d_{n+1}]$,易证 $\mathrm{rank}\bar{D} = n$,故有

$$0 = \lim_{t\to\infty} e_k(t) = \lim_{t\to\infty} [t^* - DK^*(t)].$$

即 $\lim_{t\to\infty} K^*(t) = D^{-1}t^* = K^*$.

注. 本引理更详细的证明可参看作者另文[1]. 证毕.

当 A、B 未知时,将模型 (1) 写成回归形式

$$y(t) = \varphi(t-1)^T\theta + \xi(t), \tag{20}$$

其中,

$$\varphi(t) = [-y(t), \cdots, -y(t-n_a+1), u(t), \cdots, u(t-n_b)]^T, \tag{21}$$

$$\theta = [a_1, \cdots, a_{n_a}, b_0, b_1, \cdots, b_{n_b}]^T. \tag{22}$$

为保证辨识模型 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 的互质性,对系统 (20) 作如下假定:

(A1) 存在一个已知的凸集 S_θ,使得 1) $\theta \in S_\theta$; 2) 对一切 $\hat{\theta} \in S_\theta$, 对应的 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 互质.

用限制 $\hat{\theta}(t) \in S_\theta$ 的最小二乘法估计 θ,得到 $\hat{\theta}(t)$, 从而得到 $\hat{D}(t)$ (其中 $\hat{D}(t)$ 中的元 α_i、β_i 均为 t 时刻的估计值 $\hat{\alpha}_i(t)$ 和 $\hat{\beta}_i(t)$), 再按以下递推算法在采样时刻 t 一步运算得到 $\hat{K}^*(t)$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{K}^*(t) = \hat{K}^*(t-1) + \frac{\hat{d}_i(t-1)^T \hat{e}_k(t-1) I_i}{\hat{d}_i(t-1)^T \hat{d}_i(t-1)} \\ &i = i(t) = (t \bmod n) + 2 \\ &\hat{e}_k(t) = t^* - \hat{D}(t)\hat{K}^*(t). \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

---

1) 徐立鸿,预测控制的研究,东南大学博士论文,1991.

其中 $\hat{x}(t)$ 表示 x 在 t 时刻的估计值．综上可得递推自适应 WLPC 算法如下：

初始条件． 选取具有期望零点的稳定多项式 $T(z^{-1})$、设计参数 N、M 和权因子 $P(z^{-1})$、$Q(z^{-1})$ 和 λ.

第一步．用限制 $\hat{\theta}(t)\in S_\theta$ 的限制最小二乘法估计系统参数 θ，得到 $\hat{\theta}(t)$，并按文[1] 的有关式子计算 $\hat{\mathscr{A}}_1(z^{-1},t)$ 和 $\hat{\mathscr{B}}_1(z^{-1},t)$,得到（10）式中的矩阵 $\hat{D}(t)$；

第二步．按（23）式递推计算 $\hat{K}^*(t)$,从而得到 $\hat{K}_L(z^{-1},t)$ 和 $\hat{K}_w(z^{-1},t)$；

第三步．按文 [1] 计算 $\hat{\mathscr{D}}(z^{-1},t)$、$\hat{\mathscr{G}}(z^{-1},t)$ 和 $\hat{\mathscr{L}}(z^{-1},t)$；

第四步．综合控制器 $u(t)=\dfrac{\hat{\mathscr{L}}}{\hat{\mathscr{D}}}r-\dfrac{\hat{\mathscr{G}}}{\hat{\mathscr{D}}}y(t)$；

第五步．对系统（20）输入 $u(t)$,赋 $t:=t+1$,回到第一步．

三、自适应 WLPC 的闭环稳定性

对系统的噪声作如下假定：

$$(A2)\quad \lim_{K\to\infty}\sup\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{k}|\xi(t+j)|^2<\infty,\forall t\geqslant 1,\text{a.s.}$$

在此“噪声功率有限”的假定下,稳定性为系统的内部特性．故以下不考虑噪声的影响．

定理．若系统（20）满足假定（$A1$）和（$A2$），则有

1）自适应 WLPC 算法是有界输入有界输出稳定的；

2）$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0\ \ (e(t)=y(t+1)-\varphi(t)^T\hat{\theta}(t))$.

证明．注意到所采用的自适应 WLPC 是递推型的,故可利用 C. Zhang 等人[2]关于递推自适应算法的稳定性结果来证明．易证,本文的参数估计算法有三个性质：$P1$）$\hat{\theta}(t)$ 有界,且

$\hat{\theta}(t)\in S_\theta$；$P2$）$\|\hat{\theta}(t)-\hat{\theta}(t-k)\|\in l_2,k<\infty$；$P3$）$e(t)/[1+\varphi(t)^T\varphi(t)]^{\frac{1}{2}}\in l_2$.

注意,$P1$)—$P3$）并不要求 $\hat{\theta}(t)$ 收敛到参数真值 θ_0.

由假定（$A1$)、引理和性质 $P1$)—$P3$),进一步有 $P4$）参数已知时,闭环系统(6)是渐近稳定的,且控制器参数 K^* 是 θ 的连续函数；$P5$）$\hat{K}^*(t)$ 有界,且是 $\hat{K}^*(t-1)$ 和 $\hat{\theta}(t-1)$ 的连续函数．

由定理的假定、引理和性质 $P1$)—$P5$）知,递推自适应闭环稳定性定理(见文[2] 中的定理 3.1)的条件 $A1$—$A4$ 和 $E1$—$E3$ 全部满足,从而由该定理可得本定理的结果．

四、仿　　真

在下面的仿真中,取阶次为 $n_a(\deg A)$、$n_b(\deg B)$ 的模型,采用带遗忘因子 0.95 的限制（$\theta\in$ 凸集 S_θ）最小二乘法在线估计模型参数,并用递推自适应 WLPC 算法得到实时控制律.设计参数取 $N=5,M=1,\lambda=1$．设定值为 ± 10 的方波．仿真系统如下：

$$y(t)-1.5y(t-1)+0.7y(t-2)=u(t-2)+1.5u(t-3)+0.1\xi(t).$$

分两种情况进行仿真

1) 模型阶次准确时(即 $n_a = n_b = 2$).

选取 $P(z^{-1}) = Q(z^{-1}) = 1$,闭环极点配置为 $-0.4, 0.3$,跟踪情况很好(见图 1).

2) 降阶建模时(取 $n_a = n_b = 1$).

选取 $P(z^{-1}) = Q(z^{-1}) = 1$,闭环极点配置为 $-0.1, 0.1$,跟踪情况仍是可接受的(见图2).

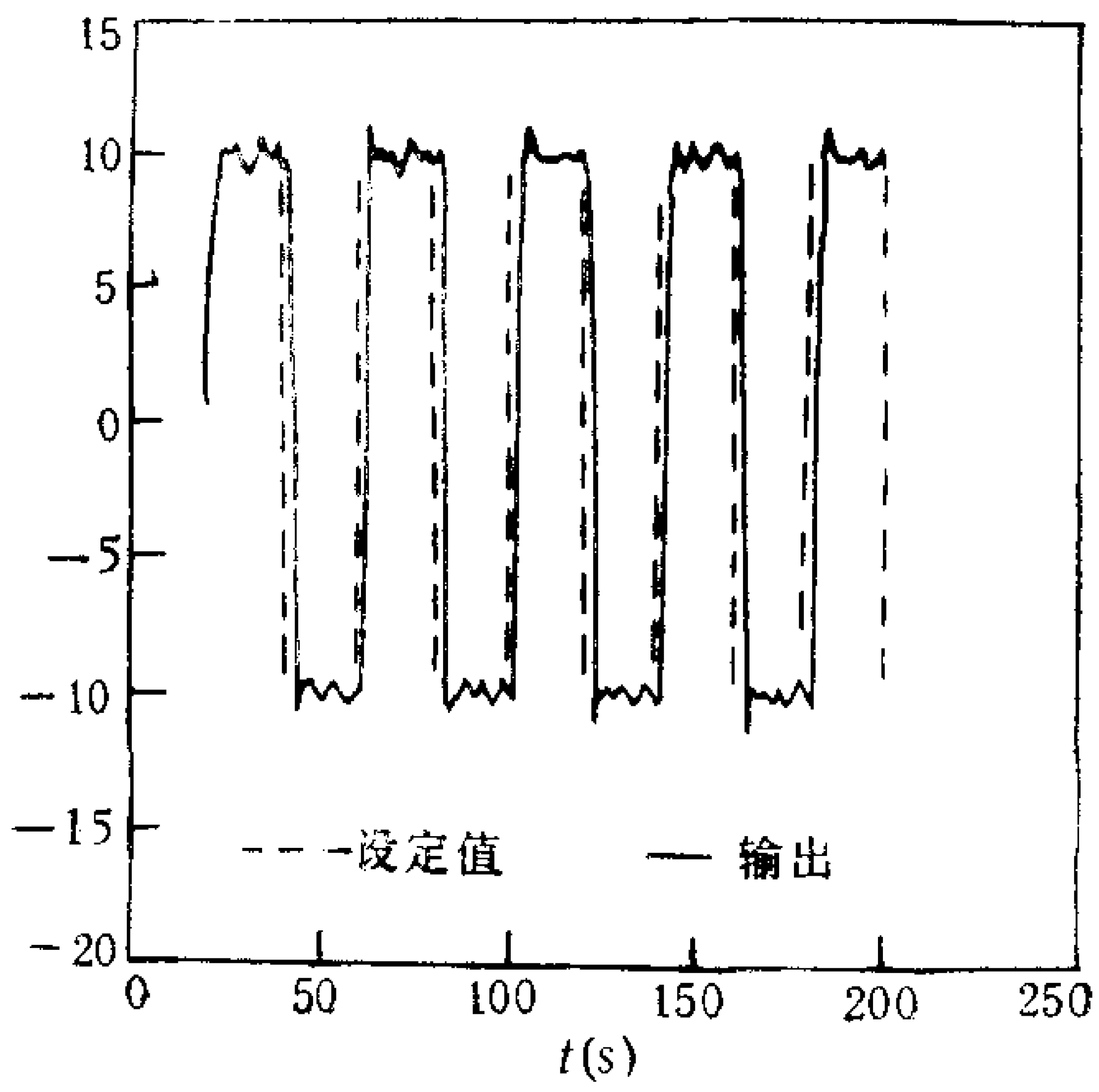

图 1 模型阶次准确时 WLPC 算法的跟踪情况

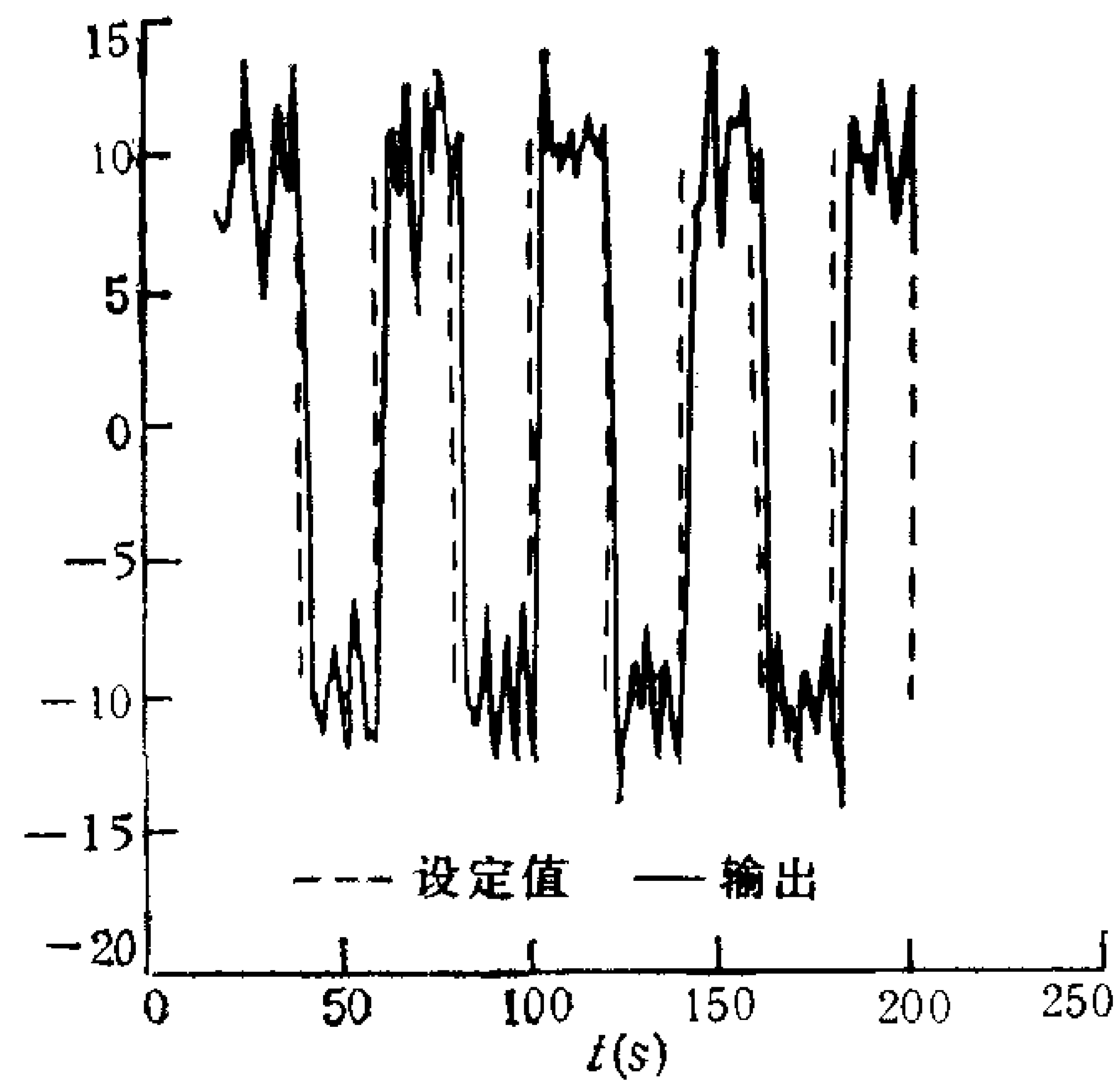

图 2 降阶建模时 WLPC 算法的跟踪情况

本文给出的递推自适应 WLPC 算法具有两个优点:一是将每个采样时刻解极点配置方程问题简化为一步递推的算法,大大减少了在线计算量;二是使自适应 WLPC 算法的闭环稳定性容易被证明.

参 考 文 献

[1] 徐立鸿、冯纯伯,加权多步预测控制,自动化学报,**17**(1991),(6),658—667.

[2] Zhang, C. and Evans, R. J., A Stable Iterative Adaptive Control, *IEEE Trans. on A.C.*, AC—35 (1990), (1), 88—92.

RECURSIVE ADAPTIVE WEIGHTED LONG-RANGE PREDICTIVE CONTROL

Xu Lihong Feng Chunbo

(*Research Institute of Automation Southeast University, Nanjing* 210018)

Abstract

A recursive adaptive weighted long-range predictive control (RAWLPC) algorithm is given in this paper. This algorithm is one-step recursive that replaces the requirement of solving the equations of the pole placement so that the on-line computation is greatly reduced and it appears more practicable. The closed-loop s ability of such algorithm is also proved.

Key words: Predictive control; adapt ve control; pole-placement; closed-loop stability.