



MSLS 法的一个注记

姚福来

(熙康机电有限公司, 石家庄 050091)

关键词: 多步最小二乘法, 精度, 分析.

一、 MSLS 法

多步最小二乘法 (MSLS 法)^[1] 由于其运算简单, 不存在收敛性问题, 而一直受到人们的重视。在这个方法中, 系统模型和噪声模型的辨识是分成三步来完成的, 每一步所采用的方法都是简单的最小二乘法。第一步是辨识一个辅助模型参数; 第二步是估计原始系统模型的参数; 第三步是估计噪声模型的参数。如果不需要求噪声模型的参数, 第三步也可以省略。

考虑一个稳定的 n 阶线性离散时间系统, 其模型为

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + (1/C(q^{-1}))v(k), \quad (1)$$

其中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n},$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \cdots + b_nq^{-n},$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \cdots + c_mq^{-m}.$$

$y(k)$, $u(k)$ 和 $v(k)$ 分别为 k 时刻的系统输出、输入和 $(0, \lambda^2)$ 的正态白噪声。

假定系统模型阶次 n 和噪声模型阶数 m 为已知, (1) 式两边同乘 $C(q^{-1})$ 得一 $(m+n)$ 阶的辅助模型

$$C(q^{-1})A(q^{-1})y(k) = C(q^{-1})B(q^{-1})u(k) + v(k). \quad (2)$$

令多项式 $E(q^{-1})$ 和 $F(q^{-1})$ 分别为

$$E(q^{-1}) = C(q^{-1})A(q^{-1}),$$

$$F(q^{-1}) = C(q^{-1})B(q^{-1}).$$

于是式(2)化为

$$E(q^{-1})y(k) = F(q^{-1})u(k) + v(k). \quad (3)$$

式(3)可用一普通最小二乘法得出其无偏一致估计 $\hat{E}(q^{-1})$ 和 $\hat{F}(q^{-1})$, 利用恒等式

$$A(q^{-1})F(q^{-1}) = B(q^{-1})E(q^{-1}),$$

令两边 q^{-1} 的同次幂系数相等, 按幂次从低到高的原则排列 $(2n+m+1)$ 个关系式得

$$\mathbf{g}(\hat{e}, \hat{f}) = G(\hat{e}, \hat{f})\theta + \eta. \quad (4)$$

这里, $\mathbf{g}(\hat{e}, \hat{f})$ 表示以 \hat{e}_i, \hat{f}_i 为元素的 $(2n+m+1)$ 维向量, $G(\hat{e}, \hat{f})$ 表示以 \hat{e}_i, \hat{f}_i 为

元素的 $(2n+m+1) \times (2n+1)$ 维矩阵, η 是方程组中随机误差向量, $\theta = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n]^T$.

方程(4)可由普通最小二乘法进行估计, 得出结果 $\hat{A}(q^{-1})$ 和 $\hat{B}(q^{-1})$.

一般资料中^[1-3]对于(4)式的最小二乘估计通常是把所有的 $(2n+m+1)$ 个方程全部算完, 其实这样做往往得不到最好结果, 有时甚至差得很远, 并且噪声越大, 这种差别就越明显. 而只取前 $2n$ 个等式进行运算, 得出的结果反而最好.

二、实验结果

例 1. 设一系统为

$$\begin{aligned} y(k) + 1.1y(k-1) + 0.38y(k-2) + 0.04y(k-3) \\ = u(k-1) + 2u(k-2) + 0.96u(k-3) + 1/c(q^{-1}) \cdot v(k), \end{aligned}$$

其中 $C(q^{-1}) = 1 + 0.3q^{-1} + 0.2q^{-2} + 0.1q^{-3}$.

$v(k)$ 为 $(0, 0.1)$ 的正态白噪声. 利用多步最小二乘在 IBM-PC/XT 机上进行仿真实验, 先得出中间结果 \hat{e}_i 和 \hat{f}_i 如表 1 所示.

表 1

i	1	2	3	4	5	6
\hat{e}_i	1.477789	1.058975	0.661174	0.340414	0.082524	0.010415
\hat{f}_i	0.989902	2.377433	1.982461	1.072790	0.656978	0.196194

进而得出 \hat{a}_i 和 \hat{b}_i 如表 2 所示.

表 2

运算次数	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3
$2n$	1.141891	0.406979	0.038198	0.989902	2.044937	1.029845
$2n+1$	4.793391	1.773785	0.298975	0.994222	5.543451	5.753844
$2n+m+1$	0.083320	-0.029720	-0.018470	0.989113	1.031751	-0.347937

例 2. 上例中取

$$C(q^{-1}) = 1/A(q^{-1}) = 1/(1 - 0.3q^{-1} - 0.11q^{-2} - 0.007q^{-3}).$$

其它条件不变, 先得出中间结果 \hat{e}_i 和 \hat{f}_i 如表 3 所示.

表 3

i	1	2	3	4	5	6
\hat{e}_i	0.877302	0.002908	-0.298434	-0.184449	-0.049035	-0.004230
\hat{f}_i	0.999659	1.777514	0.382791	-0.586816	-0.349188	-0.113430

进而得出 \hat{a}_i 和 \hat{b}_i 如表 4 所示.

表 4

运算次数	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_3	\hat{b}_1	\hat{b}_2	\hat{b}_3
$2n$	1.130374	0.391594	0.042287	0.999659	2.030500	0.999242
$2n + 1$	1.062066	0.366196	0.036388	0.999541	1.967684	0.916134
$2n + m + 1$	1.526576	0.585005	0.057936	1.0007773	2.460419	1.553561

从以上两个例子可以看出只取前 $2n$ 个方程得出的结果最好, 而取全部等式运算得出的结果反而很差。

笔者对许多系统进行了仿真实验, 结果都是如此。

参 考 文 献

- [1] Hsia, T.C., On Multistage Least Squares Approach to Systems Identification, Proc. IFAC Sixth World Congress, Boston, 1975, 18. 2.
- [2] 徐南荣, 系统辨识导论, 电子工业出版社, 北京, 1986.
- [3] 徐宁寿, 系统辨识技术及应用, 机械工业出版社, 北京, 1986.

A REMARK ON MSLS METHOD

YAO FULAI

(Hebei Institute of Chemical Technology and Light Industry, 050091)

Key words: Multistage Least Squares; accuracy; analysis.