第18卷 第5期　　自 动 化 学 报　　Vol. 18, No. 5
1992 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sep., 1992

短文

关于离散情况波波夫不等式求解的第二子问题

王恒震
（天津理工学院自动化系，天津 300191）
姚妙新
（天津大学数学系，天津 300072）
李广义
（天津工业自动化仪表研究所）

摘　　要

本文讨论离散情况波波夫不等式解的第二子问题，探讨解的一般形式，进一步扩展了选取复杂自适应规律的范围，其中有的结果是 Landau 引理或其它文献中一些结果的推广和发展.

关键词: 离散模型参考自适应系统，超稳定性方法，波波夫不等式.

一、引　　言

为了使用超稳定性方法来综合离散模型参考自适应系统，需要解决下述问题：

考虑一个输入为 $\boldsymbol{v}$ 输出为 $\boldsymbol{w}$ 的方框. 这里 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 都是 n 维矢量，在 $k+1$ 瞬间分别为矢量

$$\boldsymbol{v}_{k+1}=\begin{bmatrix} v_1(k+1) \\ v_2(k+1) \\ \vdots \\ v_n(k+1) \end{bmatrix} \quad 和 \quad \boldsymbol{w}_{k+1}=\begin{bmatrix} w_1(k+1) \\ w_2(k+1) \\ \vdots \\ w_n(k+1) \end{bmatrix},$$

且

$$\boldsymbol{w}_{k+1}=\left[\sum_{l=0}^{k}\phi_1(\boldsymbol{v},k,l)+\phi_2(\boldsymbol{v},k)+A_0\right]\boldsymbol{y}_k.$$

其中，$\phi_1(\boldsymbol{v},k,l)$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的一个离散矩阵泛函，依赖于 $\boldsymbol{v}_l$，$0\leqslant l\leqslant k$，$\phi_2(\boldsymbol{v},k)$ 是 $\boldsymbol{v}_k$ 的一个矩阵函数，$\boldsymbol{y}_k$ 是 q 维的有限矢量在 k 瞬间的值，A_0 是一个 $n\times q$ 常数矩阵.

要求 $\phi_1(\boldsymbol{v},k,l)$ 和 $\phi_2(\boldsymbol{v},k)$ 的一般解使得

本文于 1990 年 6 月 5 日收到.

$$\eta(0,k_1) \triangleq \sum_{k=0}^{k_1} \boldsymbol{v}_{k+1}^T \boldsymbol{w}_{k+1} \geqslant -r_0^2 \quad \forall k_1 \geqslant 0$$

成立,式中 r_0^2 是一个有限正常数.

由此引出两个子问题[1],其中第二子问题是: 找出 $\phi_2(\boldsymbol{v},k)$ 的一般解,使得

$$(B),\quad \eta_2(0,k_1) \triangleq \sum_{k=0}^{k_1} \boldsymbol{v}_{k+1}^T \phi_2(\boldsymbol{v},k) \boldsymbol{y}_k \geqslant -r_2^2,$$

对所有 $k_1 \geqslant 0$ 成立,其中 r_2^2 是一个有限正常数.

Landau 已经给出某些结果，结合文献[2]在连续情况下的一些研究，本文在此给出更一般的结果,它们扩大了选取自适应规律的范围.

二、主 要 结 果

考虑

$$\phi_2(\boldsymbol{v},k) = [\phi_2^{ij}(\boldsymbol{v},k)]_{n\times q},$$

矩阵元素形如

$$\phi_2^{ij}(\boldsymbol{v},k) = \sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant q}} H_{ijpl} v_p(k+1) y_l(k),$$

其中 H_{ijpl} 为离散变量 k 的函数.

记

$$I(k) \triangleq \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \phi_2^{ij}(\boldsymbol{v},k) v_i(k+1) y_j(k),$$

$$V_k \triangleq \|\boldsymbol{v}(k)\| = \left[\sum_{i=1}^{n} v_i^2(k)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$Y_k \triangleq \|\boldsymbol{y}(k)\| = \left[\sum_{l=1}^{q} y_l^2(k)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

并记

$$\beta(V,Y) \triangleq \left\{\xi(k) \mid \xi(k) \text{ 是离散变量 } k \text{ 的非负函数,满足 } \sum_{k=0}^{\infty} \xi(k) V_{k+1}^2 Y_k^2 < +\infty\right\}.$$

显然 $\beta(V,Y)$ 对于加法和非负数乘是封闭的,且对任意的 $\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{y}$, 零函数总属于 $\beta(V,Y)$. 此外对离散变量 k 的任一函数 $\eta=\eta(k)$, 记

$$\eta^+(k) \triangleq \max\{0,\eta(k)\},\quad \eta^-(k) \triangleq \max\{0,-\eta(k)\},$$

并分别称为 η 的正部和负部.

命题 1. 若成立

(H_1): 对任何 i,j,p,l, $H_{ijpl}^+ + H_{ijpl}^- \in \beta(V,Y)$ 则(B)成立.

证.(以下为简单计,常略写下标范围)

$$I(k) = \sum_{i,j}\left(\sum_{p,l} H_{ijpl} v_p(k+1) y_l(k)\right) v_i(k+1) y_j(k)$$

$$\geqslant -\sum_{i,j,p,l}(H^+_{ijpl}+H^-_{ijpl})|v_i(k+1)v_p(k+1)y_j(k)y_l(k)|$$

$$\geqslant -\sum_{i,j,p,l}(H^+_{ijpl}+H^-_{ijpl})\|\boldsymbol{v}(k+1)\|^2\|\boldsymbol{y}(k)\|^2.$$

令 $r_2^2=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i,j,p,l}(H^+_{ijpl}+H^-_{ijpl})\|\boldsymbol{v}(k+1)\|^2\|\boldsymbol{y}(k)\|^2$，由 $\eta_2(0,k_1)=\sum_{k=0}^{k_1}I(k)$，立即得出 (B) 成立.

现记实对称矩阵 F 的特征值正部之和为 Λ_F^+，其特征值负部之和为 Λ_F^-，矩阵 F 的迹(即对角元素之和)为 J_F，有下述命题.

命题 2. 若成立

(H_2): $H_{ijpl}=F_{ip}(k)G_{lj}(k)$，$1\leqslant i,p\leqslant n$，$1\leqslant j,l\leqslant q$，

矩阵 $F\triangleq[F_{ip}(k)]$，$G\triangleq[G_{lj}(k)]$，

对每一 $k\geqslant 0$ 皆实对称. 且 $\Lambda_F^+\Lambda_G^-+\Lambda_F^-\Lambda_G^+\in\beta(V,Y)$，则 (B) 成立.

证. 设正交矩阵 $f\triangleq[f_{ip}(k)]_{n\times n}$，$g\triangleq[g_{lj}(k)]_{q\times q}$ 使得

$$fFf^T=\mathrm{diag}[\lambda_1(k),\lambda_2(k),\cdots,\lambda_n(k)],$$

$$gGg^T=\mathrm{diag}[\mu_1(k),\mu_2(k),\cdots,\mu_q(k)],$$

则对每一 k 值，

$$\sum_{i,p}F_{ip}(k)v_i(k+1)v_p(k+1)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(k)(f_k\boldsymbol{v}_{k+1})_i^2$$

$$=\sum_i\lambda_i^+(f_k\boldsymbol{v}_{k+1})_i^2+\sum_i(-\lambda_i^-)(f_k\boldsymbol{v}_{k+1})_i^2,$$

这里 $(f_k\boldsymbol{v}_{k+1})_i\triangleq\sum_{p=1}^{n}f_{ip}(k)v_p(k+1)$，这种表示法后面将类似地应用，类似地

$$\sum_{l,j}G_{lj}(k)y_l(k)y_j(k)=\sum_j\mu_j^+(g_k\boldsymbol{y}_k)_j^2+\sum_j(-\mu_j^-)(g_k\boldsymbol{y}_k)_j^2.$$

故

$$I(k)=\sum_{i,p}F_{ip}(k)v_i(k+1)v_p(k+1)\cdot\sum_{l,j}G_{lj}(k)y_l(k)y_j(k)$$

$$\geqslant -(\Lambda_F^+\Lambda_G^-+\Lambda_F^-\Lambda_G^+)\|\boldsymbol{v}(k+1)\|^2\|\boldsymbol{y}(k)\|^2.$$

这里用到了

$$\sum_{i=1}^{n}(f_k\boldsymbol{v}_{k+1})_i^2=\|\boldsymbol{v}(k+1)\|^2$$

及

$$\sum_{j=1}^{q}(g_k\boldsymbol{y}_k)_j^2=\|\boldsymbol{y}(k)\|^2,$$

故易得(B)成立.

注 1. 记 F_k,G_k 为 F,G 在 k 瞬间的值，当每个 F_k,G_k 为正半定，则有

$$\Lambda_F^+\Lambda_G^-+\Lambda_F^-\Lambda_G^+=0,\ \in\beta(V,Y),$$

从而（B）成立。此时有

$$\phi_2(\boldsymbol{v},k)=F_k\boldsymbol{v}_{k+1}[G_k\boldsymbol{y}_k]^T,$$

这正是文献[1]中引理 $D.2$-2 的情形。

注 2. 当 $\phi_2(\boldsymbol{v},k)=F_k\boldsymbol{v}_{k+1}[G_k\boldsymbol{y}_k]^T$，而 F_k, G_k 可分别表示为 k 的两个正半定矩阵函数之差 $F_k=F_1(k)-F_2(k)$, $G_k=G_1(k)-G_2(k)$. 则从命题2易得：只要 $J_{F1}J_{G2}+J_{F2}J_{G1}\in\beta(V,Y)$，就有($B$)成立。Landau 的引理 $D.2$-2 正是 F_2, G_2 皆为零矩阵的特殊情况。

注 3. 当 $\|\boldsymbol{v}(k)\|$ 和 $\|\boldsymbol{y}(k)\|$ 皆有界，显然形如 $b/(a+k)^p$ 的任意函数（$b>0$, $a>0$, $p>1$）属于 $\beta(V,Y)$ 故可见在 Landau 的引理 $D.2$-2 中的矩阵 F' 和 G' 只要迹有界，就可以从主对角线上各元素减去任意形如 $\dfrac{b}{(a+k)^p}$ 或 $\dfrac{b}{a+k^p}$ 的函数（$a,b>0$, $p>1$），或者加上任意非负有界函数，系统的渐近超稳定性将不受影响。

上述注 1—3 可反映出本文的结果对原有结果的推广及其实用性。此外还有如下一些命题也发展了文献[2]中的相应结果。

命题 3. 若成立 (H_3): $H_{ijpl}=\delta_{ip}\delta_{jl}\alpha_{ij}$, $1\leqslant i,p\leqslant n$, $1\leqslant j,l\leqslant q$ 且 $\alpha_{ij}^-\in\beta(V,Y)$ 则(B)成立。

证. 只需注意到

$$\begin{aligned}I(k)&=\sum_{i,j}\alpha_{ij}(v_i(k+1))^2(y_j(k))^2\\&\geqslant-\sum_{i,j}\alpha_{ij}^-V_{k+1}^2Y_k^2.\end{aligned}$$

以及 $\beta(V,Y)$ 关于加法的封闭性即可。

注 4. 当 α_{ij} 皆非负，则 $\alpha_{ij}^-=0\in\beta(V,Y)$，这正是相应于 Landau 的引理 $D.1$-6 的情形。当 $\alpha_{ij}\geqslant\dfrac{b_{ij}}{(a_{ij}+k)^{p_{ij}}}$，而 $|v_i(k+1)y_j(k)|$ 有界，显然 $\alpha_{ij}^-\in\beta(V,Y)$，这正相应于文献[2]命题 3 的情形。

命题 4. 若成立

$$(H_4):\ H_{ijpl}=F_{ijp}(k)\delta_{jl},\ 1\leqslant i,\ p\leqslant n,\ 1\leqslant j,\ l\leqslant q$$

且对 $1\leqslant j\leqslant q$，矩阵 $F_j\triangleq[F_{ijp}(k)]$, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant p\leqslant q$，对于每个 k 为实对称，并有 $\Lambda_{F_j}^-\in\beta(V,Y)$，则($B$)成立。

证. 对 $1\leqslant j\leqslant q$，设正交矩阵 $f_j\triangleq[f_{ip}(k)]_{n\times n}$ 使得

$$f_jF_jf_j^T=\mathrm{diag}[\lambda_1^j(k),\ \lambda_2^j(k),\cdots,\lambda_n^j(k)],$$

则

$$\begin{aligned}I(k)&=\sum_j\Big(\sum_{i,p}F_{ijp}(k)v_i(k+1)v_p(k+1)v_p(k+1)\Big)(y_j(k))^2\\&=\sum_j\Big(\sum_i\lambda_i^j(k)(f_j\boldsymbol{v}(k+1))_i^2\Big)(y_j(k))^2\\&\geqslant-\sum_j(\Lambda_{F_j}^-\|f_j\boldsymbol{v}(k+1)\|^2)(y_j(k))^2\geqslant-\Big(\sum_j\Lambda_{F_j}^-\Big)V_{k+1}^2Y_k^2.\end{aligned}$$

由 $\beta(V,Y)$ 关于加法的封闭性，易得(B)成立.

注 5. 当每个 $F_i(k)$ 为正半定,则 $\Lambda_{F_i}^- = 0 \in \beta(V, Y)$，这相应于文献[2]中命题 1 的情形. 本文结果表明,若在上述各 F_i 的主对角元素加上任意非负函数或减去任意属于 $\beta(V,Y)$ 的函数,是不影响系统的渐近超稳定性的.

类似地,有下述命题,它推广了相应于文献[2]中命题 2 的结果.

命题 5. 若成立 (H_5): $H_{iipl} = \delta_{ip}G_{iil}(k)$，$1 \leqslant i$, $p \leqslant n$，$1 \leqslant i$, $l \leqslant q$ 且对 $1 \leqslant i \leqslant n$，矩阵 $G_i \triangleq \{G_{iil}(k)\}$ 对每一 k 为实对称,且有 $\Lambda_{G_i}^- \in \beta(V,Y)$，则($B$)成立.

证. 完全类似于命题 4 的证明.

命题 6. 当 $H_{iipl} = \sum_{m=1}^{5} H_{iipl}^{(m)}$ 且 $H_{iipl}^{(m)}$ 满足 (H_m)，$m = 1,2,\cdots,5$ 则 (B) 成立.

注 6. 作为命题 6 的应用，综合命题 1 和 2，可得到在 Landau 的引理 D.2-2 中的 F_k' 和 G_k' 若有有界迹,那么可以在它们的任何元素上加上或减去任何属于 $\beta(V,Y)$ 的函数,由此得出的新的自适应规律仍可使系统是渐近超稳定的.

参　考　文　献

[1] Landau I. D., Adaptive Control, The Model Reference Approach, Marcel Dekker, New York, 1979.

[2] 王礼信,周俊荣,关于 MRAS Landau 设计方法的一个注记,自动化学报，**13**(1987),(3),229—231.

ON THE SECOND SUBPROBLEM FOR SOLVING THE POPOV'S INEQUALITY IN DISCRETE-TIME MRAS

Wang Hengzhen

(Dept. of Automation, Tianjin Institute of Technology 300191)

Yao Miaoxin

(Dept. of Mathematics, Tianjin University 300072)

Li Guangyi

(Tianjin Institute for Process Automation and Instrumentation)

Abstract

In this paper, a more general form of the solution to the second subproblem for solving the Popov's inequality in discrete-time MRAS is given, hence the correponding results in [1] are extended and more freedom in selecting the adaptation laws can be obtained.

Key words: MRAS; superstability method; Popov's inequality.