第18卷 第5期 自动化学报 Vol. 18; No. 5
1992年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept, 1992

短文

线性系统时滞反馈镇定研究

张春曙
(上海智力开发研究所，200040)
王浣尘
(上海交通大学系统工程研究所，200052)

摘　要

本文研究线性系统状态反馈控制存在延迟时的镇定问题. 对于一般情形下的时滞镇定问题的判定，提出了一个充分条件；对于具有不稳定单根的单输入控制系统，提出了时滞镇定一个构造性的充分条件；并讨论了时滞反馈镇定控制器的实现问题.

关键词: 反馈时滞，镇定.

一、引　言

线性系统的状态反馈控制是一种很重要的控制方式. 考虑完全可控的线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x} \in R^n$, $\boldsymbol{u} \in R^m$，则总是存在矩阵 K，使得由下列(即时)状态反馈控制

$$\boldsymbol{u}(t) = K\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

形成的闭环系统具有一定的稳定性.

由于信息传递及处理各环节中广泛存在着延迟，所以有必要研究由时滞状态反馈控制

$$\boldsymbol{u}(t) = K\boldsymbol{x}(t-\tau) \tag{3}$$

形成的闭环系统的稳定性. 本文研究的具体问题是：1）是否存在矩阵 K，2）如何求得矩阵 K，使得闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + BK\boldsymbol{x}(t-\tau) \tag{4}$$

渐近稳定.

二、定义与理论准备

将系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-\tau)$ 记作 $[A, A_1; \tau]$，则系统(4)可记作 $[A, BK; \tau]$. 引入如下定义:

本文于1991年6月25日收到.

定义 1. 给定系统 $[A,B]$ 及 $\tau>0$。如果存在某一矩阵 K，使 $[A,BK;\tau]$ 渐近稳定,则系统 $[A,B]$ 是能时滞镇定的. 因为它总是相对于时滞常数 τ 而言的，所以又称之为 τ 镇定. 而使 $[A,BK;\tau]$ 渐近稳定的矩阵 K，称为时滞反馈镇定矩阵.

对于某一整函数 (entire function) $H(s)$，定义集合

$$Z(H)=Z(H(\cdot))\triangleq\{s\in C\,|\,H(s)=0\},\tag{5}$$

式中 C 表示复平面.

定义 2. 如果 $Z(H)\subseteq C^-$，则称整函数 $H(s)$ 是稳定的. 其中 C^-代表左半复平面.

引理 1. 设 $H(s)$ 是稳定的,则存在 $c\in R$，使得

$$H_1(s)=sH(s)+c\tag{6}$$

是稳定的.

引理 2. 设 $H(s)$ 是稳定的,则对任意的 $a>0$，存在 b、$c\in R$，使得

$$H_2(s)=(s^2+a^2)H(s)+bs+c\tag{7}$$

是稳定的.

引理 3. $H(s)=e^s$ 是稳定的.

引理 4. $H(s)=(s+a)e^s+b$ 是稳定的充要条件为: i) $a>-1$, ii) $-a<b<\xi\sin\xi-a\cos\xi$. 其中 ξ 是方程 $\xi=-a\tan\xi$ 的根,当 $a\neq0$ 时, $0<\xi<\pi$; 当 $a=0$ 时, $\xi=\pi/2$.

关于引理 1—4 的详细推导参见文献 [1,2].

定义整函数

$$p(s;A,A_1;\tau)\triangleq\det(sI-A-A_1e^{-\tau s}).\tag{8}$$

引理 5.[3] 系统 $[A,A_1;\tau]$ 渐近稳定的充要条件为

$$Z(p(\cdot;A,A_1;\tau)\subseteq C^-,\tag{9}$$

亦即整函数 $p(s;A,A_1;\tau)$ 是稳定的.

引理 6.[3] 给定 $[A,B]$ 及 $\tau>0$. $[A,B]$ 能时滞镇定的充要条件是 $[\tau A,B]$ 能单位时滞镇定,亦即 $[\tau A,B;1]$ 渐近稳定.

三、线性系统时滞反馈镇定条件

1. 一般情形下时滞镇定的一个充分条件

定理 1. 设 $[A,B]$ 完全可控，且系统矩阵可控标准形的对角子块为 A_i, $i=1,2,\cdots,l$, 如果

$$\sigma(A_i)\subseteq C^-\cup C^0\cup\{a_i>0\}^1,\tag{10}$$

其中 C^0 代表复平面上的虚轴、$\{a_i>0\}^1$ 代表在右半复平面上对应于 A_i 的单重不稳定极点的某一孤立点, a_i 满足 $\tau a_i<1$, 则 $[A,B]$ 是能 τ 镇定的.

值得指出的是,对于整个系统矩阵 A 而言，位于右半复平面上的极点可以不止一个; 重根的次数也可大于 1,所对应的 Jordan 块的阶次也可大于 1.

证明. 这里仅给出证明的主要步骤和思路,详细的推导参见注 1).

1) 张春曙,时滞、非经典信息模式控制/决策系统的镇定与优化,上海交通大学博士论文，1990.

1) 单输入的情形.

不失一般性,讨论下列可控标准形:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}, \tag{11}$$

(1) 根据引理 1—4,5, 证明满足定理条件下系统 $[A,\boldsymbol{b}]$ 是能单位时滞镇定的.

(2) 由上述结论,证明 $[\tau A,\boldsymbol{b}]$ 是能单位时滞镇定的.

(3) 根据引理 6,得证 $[A,\boldsymbol{b}]$ 是能 τ 镇定的.

2) 多输入情形.

不失一般性,讨论下列可控标准形:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_{12}\cdots A_{1l} \\ & A_2\cdots A_{2l} \\ & \ddots \ \vdots \\ 0 & A_l \end{pmatrix}_{n\times n},\quad B=\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & & 0 & \times \\ & \boldsymbol{b}_2 & & \times \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & \boldsymbol{b}_l & \times \end{pmatrix}_{n\times m} \tag{12}$$

其中“×”代表不关心的子块, A_i、$\boldsymbol{b}_i$ 具有类似 (11) 式的形式. 令

$$K_c=\begin{pmatrix}\hat{K}\\ \hline 0\end{pmatrix}_{m\times n}, \tag{13}$$

其中 $\hat{K}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{k}_1^T,\boldsymbol{k}_2^T,\cdots,\boldsymbol{k}_l^T\}$, 则有

$$p(s;A,BK_c;\tau)=\prod_{i=1}^{l}p(s;A_i,\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{k}_i^T;\tau) \tag{14}$$

因此,当所有单输入子系统 $[A_i,\boldsymbol{b}_i]$ 能时滞镇定时,整个复合系统 $[A,\ B]$ 能时滞镇定.

2. 一种特殊情形下时滞镇定的一个构造性充分条件

考察系统只有一个不稳定单根情形,有

定理 2. 给定单输入系统 $[A,\boldsymbol{b}]$ 及控制器 $u(t)=\boldsymbol{k}^Tx(t-\tau)$, $\tau>0$. 设

$\sigma(A)=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}\}\subseteq C^-\cup\{a\geqslant 0\}^1$;

$\alpha_i<0, i=1,\cdots,n-1,\ 0<\tau\alpha_0<1$;

$\boldsymbol{k}^T=\{-k_0,-k_1,\cdots,-k_{n-1}\}$, 且 $k_i=k\cdot g_{n-i-1}$

则 $[A,\boldsymbol{b}]$ 当下式成立时能时滞镇定

$$\tau\alpha_0<\tau k<\xi\sin\xi+\tau\alpha_0\cos\xi. \tag{15}$$

式中 ξ 是方程 $\xi=\tau\alpha_0\tan\xi$ 的根,当 $\alpha_0\neq 0$ 时, $0<\xi<\pi$, 当 $\alpha_0=0$ 时, $\xi=\pi/2$; 而系数 g_{n-i-1} 由下式确定:

$$\left.\begin{aligned} &g_i\triangleq\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_i\leqslant n-1}(-1)^i\alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_i},\ i=1,\cdots,n-1\\ &g_0\triangleq 1\end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

证明. 设 A、$\boldsymbol{b}$ 由 (11) 式给定,则有

$$p(s;A,\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^T;\tau)=\det(sI-A-\boldsymbol{b}\boldsymbol{k}^Te^{-s\tau})$$

$$
\begin{aligned}
&= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 + e^{-s\tau}(k_{n-1}s^{n-1} + \cdots + k_0) \\
&= (s^{n-1} + g_1 s^{n-2} + \cdots + g_{n-1})[(s-\alpha_0)e^{s\tau} + k_i]e^{-s\tau} \\
&= \prod_{i=1}^{n-1}(s-\alpha_i)\cdot[(\tau s - \tau\alpha_0)e^{\tau s} + \tau k_i]e^{-s\tau}/\tau.
\end{aligned}
$$

根据引理4易知，$p(s;A,\boldsymbol{bk}^T;\tau)$ 是稳定的当且仅当 (15) 式成立．再由引理 5 知，系统 $[A,\boldsymbol{bk}^T;\tau]$ 渐近稳定的充要条件是 (15) 式成立．

四、时滞反馈镇定控制器的设计

给定完全可控系统 $[A,B]$，其时滞状态反馈增益矩阵为 K，对于定义 1，时滞反馈镇定控制的设计步骤如下：

1）求可控标准形 (12)，得变换矩阵P．

2）对应于每一对子块 $[A_i,\boldsymbol{b}_i]$ 构成的单输入子系统，求出其时滞反馈矩阵 $\boldsymbol{k}_i$．

3）形成 (13) 式中的 K_c．

4）计算 $K_\tau = K_c P$．

例．考察如下多输入系统 $[A,B]$：

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}
$$

根据上述步骤，计算得

$$
K_\tau = -k\cdot\left(\frac{2\ \ 1\ \ 1\ \ 15\ -1\ \ 0}{0_{2\times 6}}\right), \tag{18}
$$

式中 $0 < k < \pi/2\tau$．由 $[A,B]$ 及控制 $u(t) = K_\tau\cdot x(t-\tau)$ 形成的闭环系统是渐近稳定的．

参　考　文　献

[1] Hale, J. K., Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, 1977.

[2] Bellman, R. and Cooke, K., Differential Difference Equations, Academic Press, 1963.

[3] Yong, J., Stabilization of Linear Systems by Time-delay Feedback Controls, *Quarterly of Applied Mathematics*, **XLV**(1987), (2), 377—388.

A RESEARCH ON STABILIZATION OF LINEAR SYSTEMS BY TIME-DELAY FEEDBACK CONTROLS

ZHANG CHUNSHU

(Shanghai Institute of Human Resource Development)

WANG HUANCHEN

(Shanghai Jiao Tong University)

ABSTRACT

This paper studies the stabilization problem of the linear control systems in which there exists time-delay in the state feedback. A sufficient condition of time-delay stabilization for general case is presented. Moreover, we present a necessary and sufficient condition of time-delay stabilization for the single-input control system with no more than one unstable pole Finally, the design problem of the time-delay stabilizing-controller is discussed.

Key words : Linear systems; time-delay feedback; stabilization.