第 18 卷 第 6 期 自 动 化 学 报 Vol. 18, No. 6
1992 年 11 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1992

平面控制系统的线性对称性[1)]

程代展 洪奕光
(中国科学院系统科学研究所,北京 100080)

摘 要

本文讨论了二维非线性系统在线性群作用下的对称性,及 GL(2,ℝ) 的所有连通子群.换言之,本文研究了控制系统的一切可能的线性对称性. 文中给出各种情况下的充分必要条件,并且对各类线性对称系统的构造给出完整的描述,从而显示了大量对称控制系统的存在性.

关键词: 线性对称性,一般线性群,李代数.

一、引 言

自从 J. W. Grizzle 等人[1]给出非线性系统对称性的一般描述后,非线性系统对称性的问题引起了人们很大的兴趣,国内张嗣瀛教授等作了许多开拓性的工作. 本文是在他们工作[2]的启发下完成的.

考虑一个二维非线性控制系统(解析)

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

本文研究该系统的一种特殊的对称性,即系统在状态空间线性变换下的对称性,设$A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, 定义 L_A 为线性变换,即 L_A: $x \longmapsto Ax$. 则上述对称性可严格定义如下:

定义 1.1. 设 $G \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 为一李子群. 系统(1.1)称为 G-对称的, 如果对任一 $A \in G$

$$(L_A)_* f(x) = f(Ax), \tag{1.2 a}$$

$$(L_A)_* g(x) = g(Ax). \tag{1.2 b}$$

这种对称性称为(状态)线性对称性,它是一般对称性的一种特殊形式[3]. 本文将集中讨论它的结构. 显然,关键在于找出 $f(x)$ 的形式,使式 (1.2 a) 成立.

对于这种对称性,文献[2]首先证明了

定理 1.2[2]. 令 $G = SO(2,\mathbb{R})$, 则 $f(x)$ 满足式 (1.2 a) 当且仅当

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (x_1^2 + x_2^2)^i \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

在证明上述定理的过程中,文献[2]也证明了下述结果(下述略有推广[3])

引理 1.3[2]. 设G为 GL(2,ℝ) 的一个连通李子群, $f(x)$ 满足式 (1.2 a), 则对任

本文于 1991 年 3 月 30 日收到.
1) 国家自然科学基金资助的课题.

何 $B \in \mathscr{L}(G)$ 均有

$$[Bx, f(x)] = 0, \tag{1.4}$$

这里 $\mathscr{L}(G)$ 是G的李代数.

本文试图解决的就是一般情况下具有线性对称的二阶系统的形式．为了以下讨论更有意义,限制式(1.1)为解析系统.

二、一维李子群下的对称性

这里从一维开始,是因为零维连通李子群 $G = \{I\}$，此时 $(L_A)_*$ 是恒等变换,这种情况没有意义．注意到一维连通李子群可表示成

$$G = \{e^{At} \mid A \in \mathscr{gl}(2, \boldsymbol{R}),\ t \in \boldsymbol{R}\}$$

的形式．因此,式(1.3)可写成

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) B_n x \tag{2.1}$$

的形式,这里 $p_n(x)$ 是 n 次齐次多项式

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x_1^{n-i} x_2^i,$$

并且 $p_n(x)$ 及 B_n 分别满足

$$L_{Sx} p_n(x) = 0, \tag{2.2 a}$$

$$[S, B_n]_L = 0. \tag{2.2 b}$$

为区别向量场的李括号，这里用 $[\ ,\ ]_L$ 来表示 $\mathscr{gl}(2, \boldsymbol{R})$ 中的李括号．满足式 (2.2 *a*) 的 $p_n(x)$ 称为S的不变多项式,这是因为[3]

$$p_n[(\exp S_t)x] = p_n(x).$$

不难检验,定理 1.2 与下述命题等价:

命题 2.1. 令 $G = SO(2, \boldsymbol{R})$，则 $f(x)$ 满足式 (1.2 *a*) 当且仅当 $f(x)$ 可写为式(2.1)的形式,其中 $p_n(x)$ 与 B_n 分别满足式 (2.2 *a*) 及 (2.2 *b*).

证明. 对任何 S，上述命题均成立,即

定理 2.2. 设

$$S \in \mathscr{gl}(2, \boldsymbol{R}),$$

$$G = \{e^{St} \mid t \in \boldsymbol{R}\}.$$

则系统(1.1)为G-对称的充要条件为：$f(x)$ 及 $g(x)$ 可分别表示为(2.1)式的形式，其中 $p_n(x)$ 及 B_n 分别满足式 (2.2 *a*) 及 (2.2 *b*).

证明．先考虑S具有标准若当形的情况

情况 1. 设

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

为方便计,先设 λ_1, λ_2 为实数,注意到在线性变换下 $f(x)$ 的不同幂次间无交叉作用．因此,对称意味着各幂次均对称,不失一般性,设

$$f(x)=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n} a_i\, x_1^{n-i}\, x_2^i \\ \sum_{i=0}^{n} b_i\, x_1^{n-i}\, x_2^i\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

于是,由引理 1.3 可知

$$[Sx, f]=0.$$

经展开化简得

$$\begin{cases}[(n-i-1)\lambda_1+i\lambda_2]a_i=0, \\ [(n-j)\lambda_1+(j-1)\lambda_2]b_j=0.\end{cases} \quad i,j=0,\cdots,n \tag{2.4}$$

要得到非零解 a_i, b_j, 则必有

$$\det\begin{pmatrix}n-i-1 & i \\ n-j & j-1\end{pmatrix}=(j-i-1)(n-1)=0. \tag{2.5}$$

由于 $n=1$ 是线性情况,这时易证(2.2)式成立。 因此,下面考虑 $n>1$ 情况。 由式(2.5)得

$$j-i-1=0, \tag{2.6}$$

再由式(2.4)知

$$(n-j)\lambda_1+(j-1)\lambda_2=0. \tag{2.7}$$

因为 λ_1, λ_2 不能同时为零,否则退化为零维情况,不妨设 $\lambda_1 \neq 0$, 令

$$\mu=\lambda_2/\lambda_1,$$

则由式(2.7)知 μ 为有理数.

若 $\lambda_2 \neq 0$, 存在整数 p 和 q, 且互质

$$\mu=p/q. \tag{2.8}$$

由式(2.7)有

$$i=j-1=tq,\ q>0,\ p<0$$
$$n=t(q-p)+1.\ t=1,2,\cdots.$$

由此而得到相应的 $f(x)$ 为

$$f_{t(q-p)+1}(x)=x_1^{-tp}x_2^{tq}\begin{pmatrix}a_t & 0 \\ 0 & b_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix},\ t=1,2\cdots \tag{2.9}$$

再考虑 S 的不变多项式,设

$$p_{n-1}(x)=\sum_{k=0}^{n-1} c_k x_1^{n-k-1}x_2^k.$$

由 $L_{Sx}p_{n-1}(x)=0$, 可得

$$(n-k-1)\lambda_1+k\lambda_2=0. \tag{2.10}$$

比较式(2.10),(2.7)可知, $x_1^{-tp}x_2^{tq}$ 是在相应 λ_1,λ_2 条件下式(2.10)的解集。再由 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 可知,在这对 λ_1,λ_2 下,式(2.9)是满足式(2.2)的全部解.

当 $\lambda_2=0$ 时,满足式(1.4)的向量为

$$f_t(x)=x_2^{t-1}\begin{pmatrix}a_t & 0 \\ 0 & b_t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}.$$

它是式(2.2)相应于 $\lambda_2=0$ 的解集,其证明类似于 $\lambda_2\neq 0$ 的情况,故略去.

考虑 λ_1,λ_2 为复数的情况。只要允许复系数，则不难看出，上述讨论仍然有效，设 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta j$，则由式(2.7),(2.8)可推知 $\alpha=0$，$\mu=-1$，因此可取 S 为

$$S=\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

情况 2. 设

$$S=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

由引理 1.3 可知

$$[Sx\ f]=0,$$

即

$$\begin{cases}\lambda(n-1)a_i+(n-i+1)a_{i-1}-b_i=0, \\ \lambda(n-1)b_i+(n-i+1)b_{i-1}=0,\end{cases}\quad i=0,\cdots,n+1$$

其中为记号上的方便,引入

$$a_{-1}=b_{-1}=a_{n+1}=b_{n+1}=0.$$

先设 $\lambda\neq 0$，由上式中第二等式知：当 $i=0$ 时，$b_0=0$。再依次递推可知 $b_i=0$，代入第一式得 $a_i=0$，$i=0,\cdots,n+1$。故无非平凡解.

再设 $\lambda=0$，则上式中第二式有非零解 $b_n\neq 0$，其余 b_i $(i\neq n)$ 均为零,再代入第一式得，$a_n\neq 0$，$a_{n-1}=b_n\neq 0$,于是可得非平凡解 f_n 如下：

$$f_n=\begin{pmatrix} b_nx_1x_2^{n-1}+a_nx_2^n \\ b_nx_2^n \end{pmatrix}=x_2^{n-1}\begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

同样易证,它是满足(2.2)式的一切解的形式.

下面考虑 S 不是约当标准形的情况：令 $y=Tx$ $(T\in GL(2,\boldsymbol{R})$ 或 $GL(2,\boldsymbol{C}))$，则等式(1.4)对 y 变为

$$[T_*(Sx),T_*\boldsymbol{f}(x)]=0.$$

如果设 $\boldsymbol{f}(x)$ 仍为形如式(2.3)的齐次向量场,则由直接计算可知

$$T_*(Sx)=TAT^{-1}\boldsymbol{y},$$

$$T_*(\boldsymbol{f}(x))=\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n}\tilde{a}_i\,y_1^{n-i}\,y_2^i \\ \sum_{i=0}^{n}\tilde{b}_i\,y_1^{n-i}\,y_2^i \end{pmatrix}.$$

因此,如存在非线性系统,它对

$$G=\{e^{St}\mid t\in\boldsymbol{R}\}$$

对称,则非线性系统必存在,它对 G 的共轭群

$$TGT^{-1}=\{e^{TST^{-1}t}\mid t\in\boldsymbol{R}\}$$

对称.

又设向量场 $\boldsymbol{f}(x)$ 具有形式(2.1)即

$$f(x) = p_n(x)B_n x,$$

则

$$\begin{aligned} T_*(f) &= T_*(p_n(x)B_n x) \\ &= p_n(T^{-1}y)TB_nT^{-1}y. \end{aligned} \tag{2.13}$$

因此,要证明式(2.1)形式对 T 变换不变，只要证明：若 $p_n(x)$ 对 S 不变，则 $p_n(T^{-1}y)$ 对 TST^{-1} 不变即可．由微分几何[5]的基本知识可知

$$\begin{aligned} L_{TST^{-1}y}p(y) &= \langle (T^{-1})^* p(x), T_*(Sx)\rangle \\ &= \langle p(x), Sx\rangle = L_{Sx}p(x) = 0. \end{aligned}$$

这就证明了如果一个二阶系统对一维李群线性对称,则必可表示为式(2.1)的形式． 至于 n 维系统,任意子群 $G\subset \mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$ 的情况[3]结论类似．

三、高维李子群下的对称

设 $G\subset \mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$ 为任一连通李子群,其李代数为 $\mathscr{G}$． 设 $f(x)$ 是 G-对称的，且 $0 \neq A\in \mathscr{G}$．

先设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

则由定理 2.2 可知

$$f = \sum_t c_t p_t(x) \begin{pmatrix} a_t & 0 \\ 0 & b_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

这里 $$p_t(x) = x_1^{-tp}x_2^{tq}.$$

设 $$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{G},$$

则 $$\begin{aligned} L_{Bx}p_t(x) &= -tpx_1^{-tp-1}x_2^{tq}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) \\ &\quad + tqx_1^{-tp}x_2^{tq-1}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) = 0, \end{aligned}$$

即 $$-pb_{11}x_1x_2 - pb_{12}x_2^2 + qb_{21}x_1^2 + qb_{22}x_1x_2 = 0.$$

先设 $p \neq 0$ 则 $$-b_{11}p + b_{22}q = 0,\ b_{12} = b_{21} = 0,$$

则 $$b_{22}/b_{11} = p/q = \lambda_2/\lambda_1,$$

故 A, B 线性相关，$\dim(G) = 1$．

再设 $p = 0$，亦即

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 或等价地 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $B \in \mathscr{G}$，同上可知 $$b_{21} = b_{22} = 0,$$

因此 $$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

再由 $$\left[B, \begin{pmatrix} a_t & 0 \\ 0 & b_t \end{pmatrix}\right]_L = 0,$$

当 $b_{12} \neq 0$ 时，$a_t = b_t$。因此，得到

$$\mathscr{P} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}. \tag{3.1}$$

系统

$$\dot{x} = \sum_{t=0}^{\infty} a_t x_2^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \sum_{t=0}^{\infty} b_t x_2^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} u, \tag{3.2}$$

关于 $G(\mathscr{P})$ 对称，这里 $G(\mathscr{P})$ 指由 $\mathscr{P}$ 生成的连通群。
最后设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{P}.$$

类似上述对 $p = 0$ 的讨论可知，由 A 延拓出的最大李代数，使其对应的李群有非平凡对称系统，这就是式(3.1)中的 $\mathscr{P}$.

综上讨论，可得到

推论 3.1. 设 $G \subset \mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$，则当 $\dim(G) \geqslant 3$ 时，不存在关于 G 的非平凡对称系统。

推论 3.2. 设 $G \subset \mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$ 为连通群，其李代数为 $\mathscr{P}$，则系统(1.1)关于 G 对称，当且仅当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 与 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 可分别表示为式(2.1)的形式，使得对每一 $S \in \mathscr{P}$，$p_n(\boldsymbol{x})$ 与 $B_{\bullet}$ 分别满足式 (2.2 a) 与 (2.2 b)。

四、对称系统的形式

将所有可能的二阶线性系统对称情况归结为如下定理·

定理 4.1. 设系统(1.1)关于非平凡连通群 $G \subset \mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$ 对称，则 G 只可能共轭于以下四类群之一：

$$G_1 = \left\{\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} t \,\middle|\, t \in \boldsymbol{R}\right\},$$

其中 $\lambda_2/\lambda_1 = p/q$，$q > 0$ $p \leqslant 0$，$p = 0$ 时令 $q = 1$；

$$G_2 = \left\{\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \,\middle|\, t \in \boldsymbol{R}\right\};$$

$$G_3 = \left\{\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t \,\middle|\, t \in \boldsymbol{R}\right\};$$

$$G_4 = \left\{\prod_{i<\infty} \exp A_i t_i \,\middle|\, A_i \in \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, t_i \in \boldsymbol{R}\right\}.$$

其中 G_1, G_2, G_3 为一维子群，G_4 为二维子群。设 $G = TG_iT^{-1}$，$T \in \mathrm{GL}(2,\boldsymbol{R})$，则相应的对称系统可表达为

$$\boldsymbol{y} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n^i (T^{-1}\boldsymbol{y}) T B_n^i T^{-1} \boldsymbol{y}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} b_n p_n^i(T^{-1}\boldsymbol{y})T\widetilde{B}_n^i T^{-1}\boldsymbol{y}u. \tag{4.1}$$

其中 $p_n^1(\boldsymbol{x}) = x_1^{-np}x_2^{nq}$,

$$B_n^1 = \begin{pmatrix}\alpha_n & 0\\ 0 & \beta_n\end{pmatrix},\quad \widetilde{B}_n^1 = \begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_n & 0\\ 0 & \tilde{\beta}_n\end{pmatrix};$$

$$p_n^2(\boldsymbol{x}) = x_2^n,$$

$$B_n^2 = \begin{pmatrix}\alpha_n & \beta_n\\ 0 & \alpha_n\end{pmatrix},\quad \widetilde{B}_n^2 = \begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_n & \tilde{\beta}_n\\ 0 & \tilde{\alpha}_n\end{pmatrix},$$

$$p_n^3(\boldsymbol{x}) = (x_1^2 + x_2^2)^n,$$

$$B_n^3 = \begin{pmatrix}\alpha_n & \beta_n\\ -\beta_n & \alpha_n\end{pmatrix},\quad \widetilde{B}_n^3 = \begin{pmatrix}\tilde{\alpha}_n & \tilde{\beta}_n\\ -\tilde{\beta}_n & \tilde{\alpha}_n\end{pmatrix},$$

$$p_n^4(\boldsymbol{x}) = x_2^n,$$

$$B_n^4 = \widetilde{B}_n^4 = I.$$

注意: 1) 在 G_1 情况时,若设 $\lambda_2 \neq 0$, 则 x_1, x_2 可互换; 2) 在 G_3 情况时的证明可以从矩阵(2.11)即

$$S = \begin{pmatrix} j & 0\\ 0 & -j\end{pmatrix}$$

得到,其对应多项式为 $p_{2n} = a_n y_1^n y_2^n$.

为将 S 表示成实形式,取 $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ 其中

$$T = \begin{pmatrix}1 & 1\\ j & -j\end{pmatrix}.$$

于是参考式(2.13)可知

$$T_*(S\boldsymbol{y}) = TST^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$(T^{-1})^* p_{2n} = p_{2n}(T^{-1}\boldsymbol{x}) = \frac{a_n}{2^n}(x_1^2 + x_2^2)^n.$$

例. 设

$$G = \{\exp A_t \mid t \in \boldsymbol{R}\},$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a & 4\\ -8 & 7\end{pmatrix}$, a 为某常数.

A 的特征值

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(a+7) \pm \sqrt{(a+7)^2 - 4(7a+32)}\right].$$

若 $(a+7)^2 - 4(7a+32)$ 小于零或不是平方数,由上面讨论知,均不可能存在 G-对称系统,故只需讨论是平方数的情形. 为了方便只讨论 $a = -5$ 的情况,此时

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3.$$

取

$$T = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

有

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

对称系统为

$$\dot{x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{p}_n(x) B_n x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{p}_n(x) \tilde{B}_n x n,$$

其中 $\tilde{p}_n(x) = p_n^1(T^{-1}x) = (-8x_1^4 + 20x_1^4 x_2 - 18x_1^2 x_2^2 + 7x_1 x_2^3 - x_2^4)^n$,

$$B_n = TB_n^1 T^{-1} = \begin{pmatrix} 2\alpha_n - \beta_n & -\alpha_n + \beta_n \\ 2\alpha_n - 2\beta_n & -\alpha_n + 2\beta_n \end{pmatrix}, \ \tilde{B}_n \text{ 类似.}$$

参　考　文　献

[1] Grizzle, J. W. and Marcus, S. I., The Structure of nonlinear Control Systems Possessing Symmetries, *IEEE Trans. Aut. Contr.* AC-30(1985), (3), 248—258.

[2] 谢小信，刘晓平，张嗣瀛，二阶旋转对称非线性系统的结构和性质的研究，系统科学与数学，待发表(1993).

[3] Cheng, D., et al., Symmetries of Control Systems, Submitted for Pub.

[4] Varadarajan, V. S., Lie Group, Lie Algebra, and Their Representations, Springer-Verlag, New York. (1984).

[5] Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Publish or Perish Inc. (1979).

ON LINEAR SYMMETRY OF PLANE CONTROL SYSTEMS

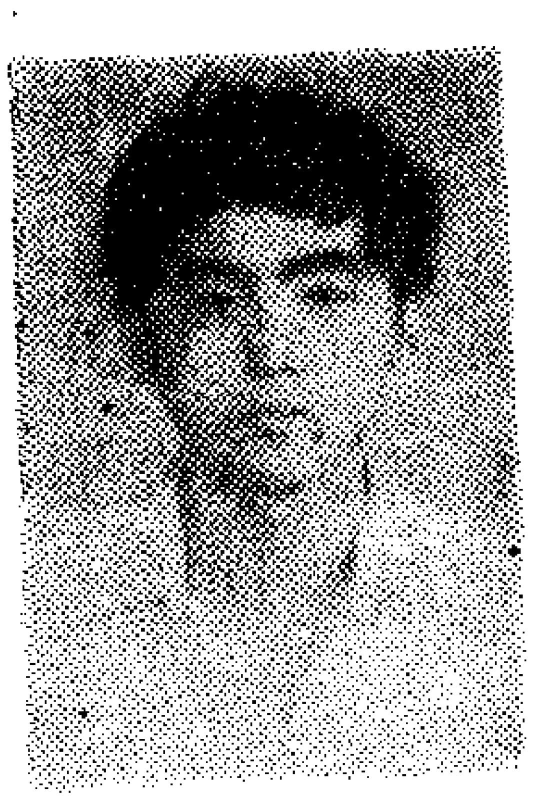
Cheng Daizhan　　Hong Yiguang

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract

In this paper, we consider the symmetry of two dimensional control systems under linear groups. All connected Lie subgroups of GL(2,ℝ) have been discussed, i.e., all possible linear symmetry of control systems are under investigation. Necessary and sufficient conditions are obtained for each case. The structures of all kinds of symmetric systems are presented, showing that there are plenty of symmetric control systems.

Key words: Symmetry; general linear group; Lie algebra.



洪奕光　1987 年北京大学力学系本科毕业。之后在该系继续进行研究生学习，在此期间进行了一些线性系统鲁棒性方面的研究。1990 年获硕士学位，现在中国科学院系统所攻读博士学位，研究方向是非线性系统的几何方法。

程代展简介见本刊 17 卷 2 期。