自校正 α-β 跟踪滤波器[1)]

邓 自 立　　　　李 北 新
（黑龙江大学应用数学研究所哈尔滨 150080）　（东北输油管理局科研设计所）

摘　　要

本文用现代时间序列分析方法对雷达跟踪系统提出了一种新的自校正 α-β 跟踪滤波器，它有如下优点：1)可处理带未知噪声统计和含未知模型参数的跟踪系统；2)基于 ARMA 新息模型的在线辨识，可简单地计算 α-β 滤波器的参数；3)避免解稳态 Riccati 方程；4)具有渐近最优(自校正)性．仿真例子说明了其有效性．

关键词：雷达跟踪系统，α-β 跟踪滤波器，自校正 Kalman 滤波器．

一、引　　言

雷达跟踪系统[1]图 1 表示飞行目标的极坐 (R,θ)，其中 R 为斜距，θ 为方位角．令 $R_t,\dot{R}_t$ 和 $\theta_t,\dot{\theta}_t$ 分别表示在时刻 tT 时斜距及其速度和方位角及其角速度，其中 T 是采样周期，则有相同结构的模型[1]

$$x_{t+1}=x_t+\dot{x}_tT, \tag{1}$$

$$\dot{x}_{t+1}=\rho\dot{x}_t+w_t, \tag{2}$$

$$y_t=x_t+v_t, \tag{3}$$

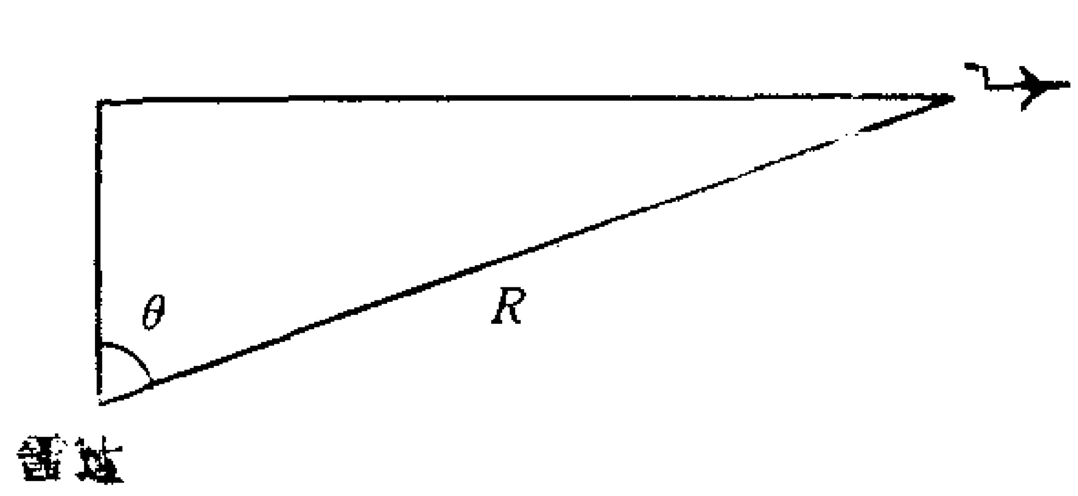

图 1　雷达跟踪系统的极坐系标

其中 x_t 表示 R_t 或 θ_t，$\dot{x}_t$ 表示 $\dot{R}_t$ 或 $\dot{\theta}_t$，y_t 表示 R_t 或 θ_t 的观测值．ρ 是模型参数，v_t 是观测噪声，w_t 和 v_t 是零均值、方差分别为 σ_w^2 和 σ_v^2 的独立的白噪声．假定参数 ρ 和方差 σ_w^2,σ_v^2 是未知的．雷达跟踪问题是求 R_t，$\dot{R}_t$ 和 θ_t，$\dot{\theta}_t$ 的稳态最优和渐近最优(自校正) Kalman 滤波器．

二、稳态最优 α-β 滤波器

系统(1)—(3)式的状态空间模型为

本文于 1989 年 3 月 1 日收到．
1) 黑龙江省自然科学基金资助的课题．本文曾在 1989 The 21st ISCIE Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications (Tokyo) 上宣读．

$$x_{t+1} = \Phi x_t + \Gamma w_t, \quad y_t = Hx_t + v_t. \tag{4)(5}$$

易知式(4),(5)是完全可观、完全可控的，其中

$$x_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \dot{x}_t \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad H = [1, 0], \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

于是有稳态 Kalman 滤波器为[2]

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_f e_t, \quad \hat{x}_{t|t-1} = \Phi \hat{x}_{t-1|t-1}, \quad e_t = y_t - H\hat{x}_{t|t-1}. \tag{7)(8)(9}$$

其中 e_t 是稳态新息过程，是带零均值的白噪声[2]。由式(7),(8)得稳态预报器为

$$\hat{x}_{t+1|t} = \Phi \hat{x}_{t|t-1} + K_p e_t, \tag{10}$$

其中稳态滤波增益 K_f 和预报增益 K_p 有关系式

$$K_p = \Phi K_f. \tag{11}$$

应用单位滞后算子 $q^{-1}, q^{-1}s_t = s_{t-1}$，由式(9),(10)有

$$y_t = H(I - q^{-1}\Phi)^{-1} K_p e_{t-1} + e_t. \tag{12}$$

由逆矩阵定义或 Fadeeva 公式[2]，有

$$(I - q^{-1}\Phi)^{-1} = F(q^{-1})/A(q^{-1}), \tag{13}$$

其中 I 是 2×2 单位阵，且

$$A(q^{-1}) = \det(I - q^{-1}\Phi) = (1 - \rho q^{-1})(1 - q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}, \tag{14}$$

$$F(q^{-1}) = \mathrm{adj}(I - q^{-1}\Phi) = I + F_1 q^{-1}, \tag{15}$$

其中

$$a_1 = -(1 + \rho), a_2 = \rho, \quad F_1 = \begin{bmatrix} -\rho & T \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

把(13)式代入(12)式引出 ARMA 新息模型为

$$A(q^{-1}) y_t = D(q^{-1}) e_t, \tag{17}$$

其中 $D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2}$。因 e_t 是稳态新息，所以 $D(q^{-1})$ 是稳定的[2]并且有关系

$$d_i = HK_p + a_i, \quad i = 1, 2 \tag{18}$$

由(18)式可得到预报增益 K_p 为

$$K_p = \begin{bmatrix} H \\ HF_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 - a_1 \\ d_2 - a_2 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

由式(6),(11),(19)经运算后得到 K_f 为

$$K_f = \Phi^{-1} K_p = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{T}{\rho} \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\rho}{T} & \frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 + 1 + \rho \\ d_2 - \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d_2}{\rho} \\ \left(d_1 + \rho + \frac{d_2}{\rho}\right) \Big/ T \end{bmatrix}, \tag{20}$$

这引出稳态滤波增益为 2×1 列向量

$$K_f = (\alpha, \beta/T)', \tag{21}$$

其中符号“'”为转置号，且

$$\alpha = 1 - \frac{d_2}{\rho}, \quad \beta = d_1 + \rho + \frac{d_2}{\rho}. \tag{22}$$

将(8),(9)式代入(7)式有稳态最优 α-β 滤波器为

$$\hat{x}_{t|t} = \Psi \hat{x}_{t-1|t-1} + K_f y_t, \tag{23}$$

其中 K_f 由(21)式计算,且根据(6),(21)式有

$$\Psi = (I - K_f H)\Phi = \begin{bmatrix} 1-\alpha, & (1-\alpha)T \\ -\dfrac{\beta}{T}, & \rho - \beta \end{bmatrix}. \tag{24}$$

三、自校正 α-β 跟踪滤波器

由(21—24)式得到,稳态最优 α-β 滤波器(23)式的参数 ρ, α, β 完全被 ARMA 新息模型(17)式的参数 ρ, d_1, d_2 决定.因此当 ρ, σ_w^2 和 σ_v^2 未知时,可避免辨识原始模型(4),(5)式,而直接在线辨识 ARMA 新息模型(17)式,就可实现 α-β 滤波器. 这样自校正 α-β 跟踪滤波器可由两步组成

第 1 步. 用递推增广最小二乘法 (RELS)[2]在线辨识 ARMA 新息模型(17)式. 为此,置新的观测过程 $z_t = (1 - q^{-1})y_t$,则(17)式化为 ARMA 新息模型

$$(1 - \rho q^{-1})z_t = (1 + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2})e_t. \tag{25}$$

由(25)式可得到在时刻 t 的 RELS 参数估值 $\hat{\rho}(t)$,$\hat{d}_1(t)$ 和 $\hat{d}_2(t)$. 将它们代入(22),(21)和(24)式可得到估值 $\hat{\alpha}(t)$,$\hat{\beta}(t)$,$\hat{K}_f(t)$ 和 $\hat{\Psi}(t)$.

第 2 步. 将 $\hat{K}_f(t)$ 和 $\hat{\Psi}(t)$ 代入(23)式便得到自校正 α-β 跟踪滤波器为

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{\Psi}(t)\hat{x}_{t-1|t-1} + \hat{K}_f(t)y_t. \tag{26}$$

上述两步在每时刻 t 重复进行.

文献[3]证明假如 $D(q^{-1})$ 满足正实性条件

$$R_e\left[1/D(e^{i\omega}) - \frac{1}{2}\right] > 0, \quad -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi, \tag{27}$$

则 RELS 参数估计是一致的,即当 $t \to \infty$ 时, $\hat{\rho}(t) \to \rho$,$\hat{d}_i(t) \to d_i$, 于是也有$\hat{\Psi}(t) \to \Psi$,$\hat{K}_f(t) \to K_f$. 因而自校正 α-β 滤波器(26)式将渐近于稳态最优 α-β 滤波器(23)式.

四、仿 真 结 果

在雷达跟踪系统(1)—(3)式中, 用 x_t 和 $\dot{x}_t$ 分别代表方位角 θ_t 和角速度 $\dot{\theta}_t$. 在仿真中取 $T = 0.8$,$\rho = 1.015$, w_t 和 v_t 分别为正态 $N(0,1)$ 和 $N(0, 0.2)$ 独立的白噪声. ARMA 新息模型(25)式的 RELS 参数估计的收敛性如图 2 所示, 可得到估值 $\hat{\rho}(t)$ 收敛到真实值 $\rho = 1.015$. 方位角 θ_t 的自校正滤波估值 $\hat{\theta}_{t|t}$ 如图 3 所示, 它对真实值 θ_t 的跟踪有较高的精度. 而角速度 $\dot{\theta}_t$ 的自校正滤波估值 $\dot{\theta}_{t|t}$ 如图 4 所示, 滤波估值精度随递推次数

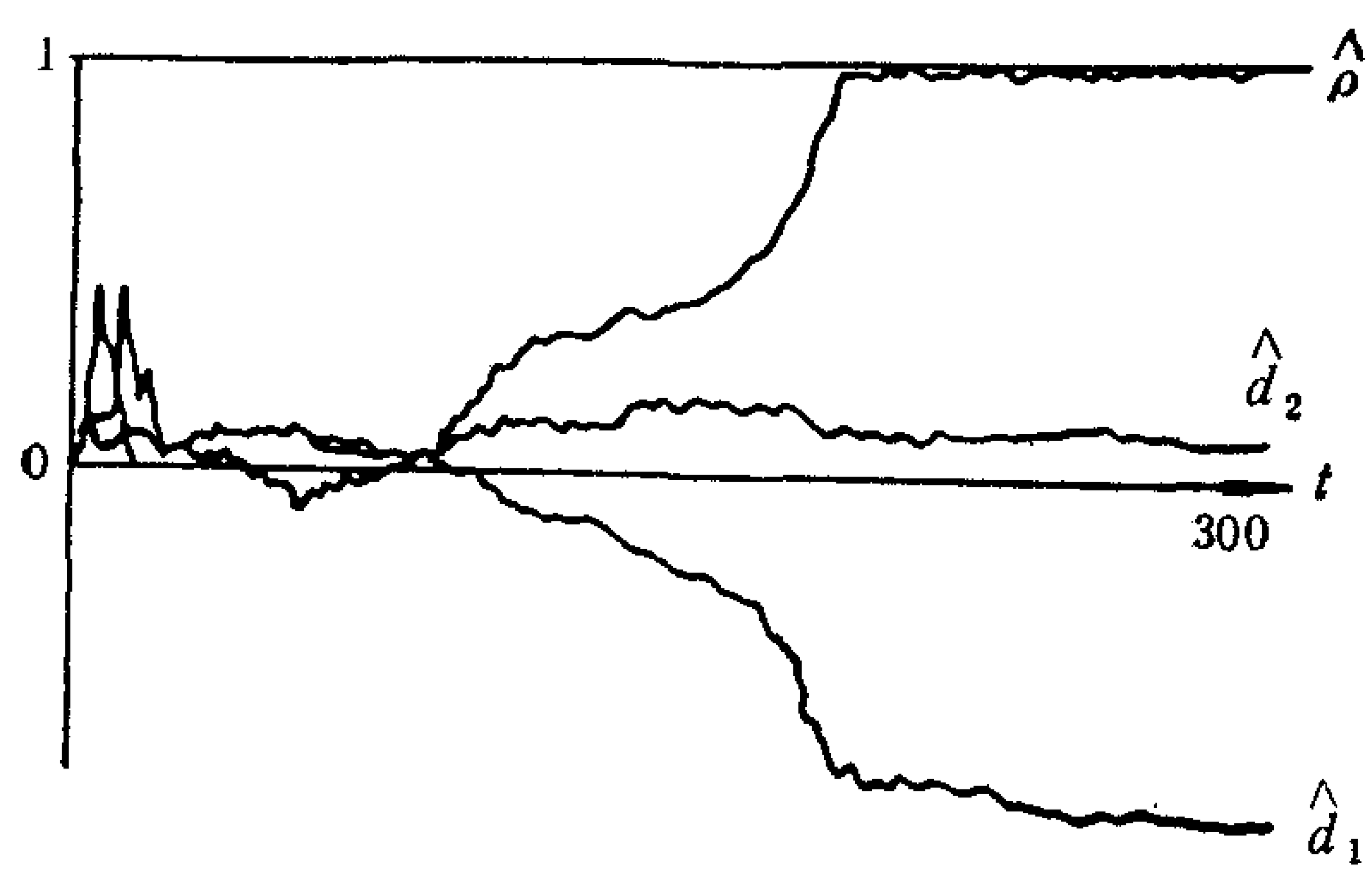

图 2 RELS 参数估计的收敛性

增加而提高，明显体现了渐近最优（自校正）性．对于斜距 R_t 和速度 $\dot{R}_t$ 有类似的仿真结果，从略．

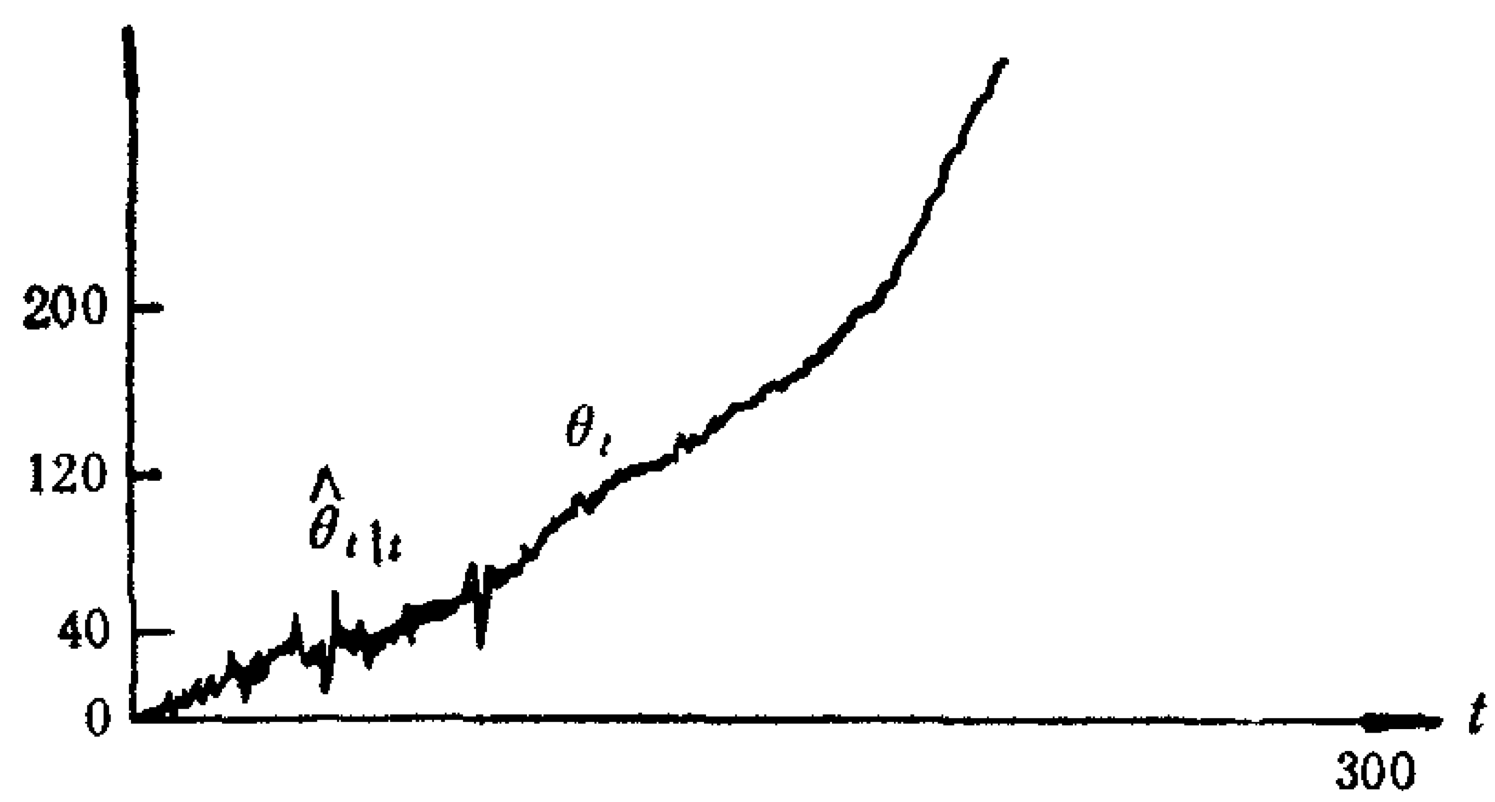

图 3　方位角 θ_t 与自校正滤波器 $\hat{\theta}_{t|t}$

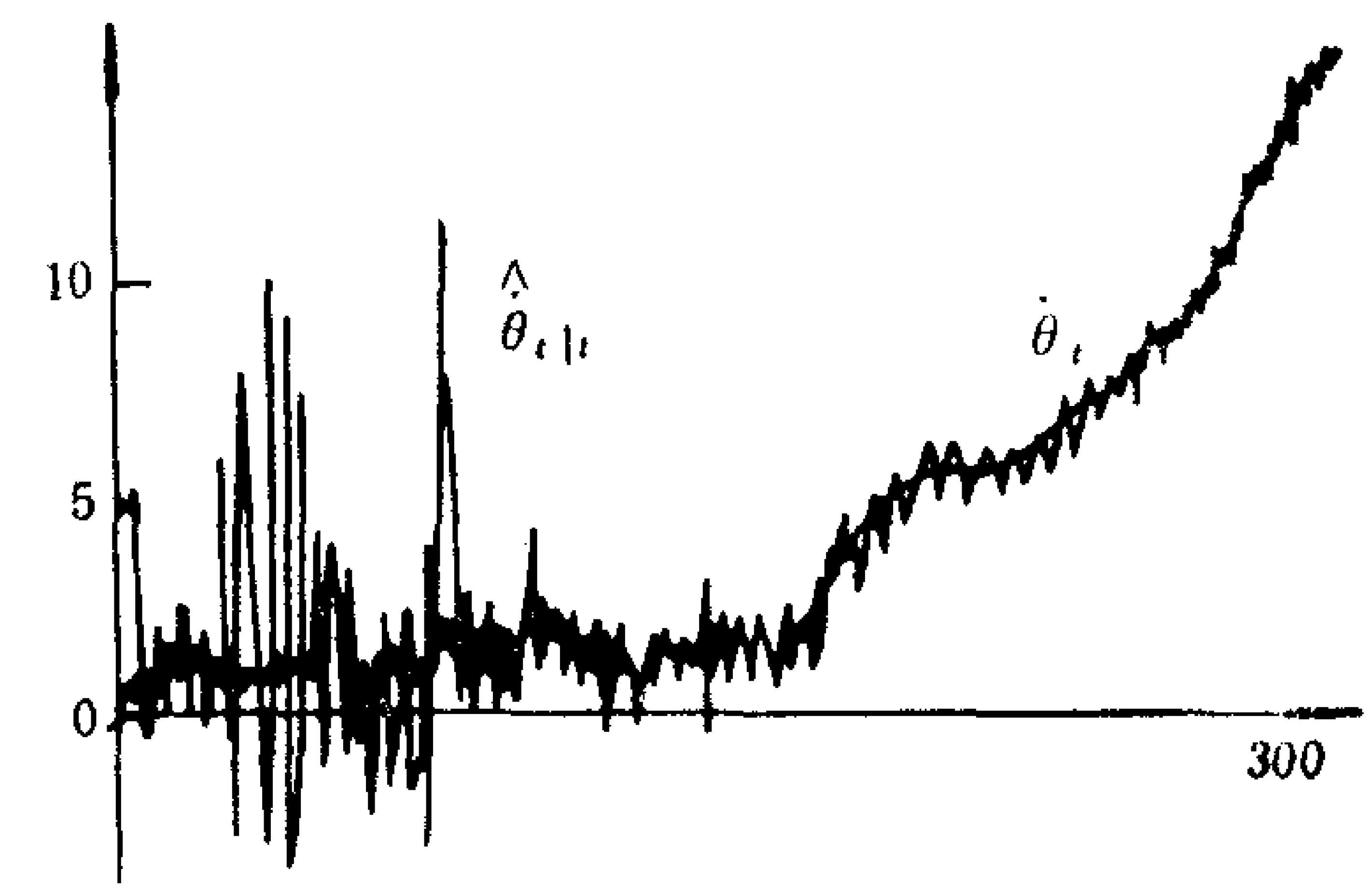

图 4　角速度 $\dot{\theta}_t$ 与自校正滤波器 $\hat{\dot{\theta}}_{t|t}$

参　考　文　献

[1] 杨学珊，杨孝先，系统中含有未知参数的常增益滤波器的最优控制的追踪算法，信息与控制，12(1983)，(1)，7—13。

[2] 邓自立，郭一新，现代时间序列分析及其应用——建模、滤波、去卷、预报和控制，知识出版社，1989

[3] Ljung, L., On Positive Real Transfer Function and the Convergence of Some Recursive Schemes, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC-22(1977), 539—551.

A SELF-TUNING α-β TRACKING FILTER

DENG ZILI

(*Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin* 150080)

LI BEIXIN

(*Science Research and Design Institute of Northeast Oil Transportation Administration*)

ABSTRACT

For the radar tracking systems, this paper presents a new self-tuning α-β tracking filter, which has the following advantages: 1) The tracking systems with unknown noise statistics and model parameters can be handled; 2) Ba ed on the on-line identification of ARMA innovation model, the parameters of the α-β filter can simply be calculated; 3) To avoid solving the steady-state Riccati equation, and 4) It has the assymptotically optimal (self-tuning) behaviour. A simulation example shows the usefulness of the proposed results.

Key words: Radar tracking systems; α β tracking filter; self-tuning Kalman filter.