第 19 卷 第 1 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 1
1993 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1993

极点配置问题线性可解的充要条件[1)]

张 庆 灵

(东北工学院数学系,沈阳 110006)

摘　　要

本文研究线性系统在输出反馈作用下的极点配置问题。得到了系统可由“线性化”方法任意配置 n 个(等于系统的维数)闭环极点的充要条件。并给出了一种新的极点配置方法。

关键词: 线性系统,输出反馈,极点配置。

一、引　　言

多年来，线性系统在输出反馈作用下的极点配置问题始终是控制理论中的一个重要研究课题. 原因之一是: 这一基本问题的彻底解决将有可能使极点配置动态补偿器的最小阶数问题和静态输出反馈镇定等重大理论问题得到解决，因而受到国内外学者的关注与研究,使得有关成果不断发表. 但是,问题仍没有最终解决.

本文作者在用多项式理论研究广义系统时发现[1,2,3]: 一个给定系统的观控性、稳定性和极点可配置性，完全可以由它的闭环特征多项式的性质来刻化. 这个闭环特征多项式为有限多个多项式的线性组合，组合系数由反馈矩阵中的元素和数 1 构成. 系统的极点可配置性与这组多项式及其组合系数密切相关.

借助于上述想法,本文通过引入一些新概念,论证了几个本文有用的引理. 在此基础上,推导出了线性系统在输出反馈作用下,可以通过“线性化”方法任意配置 n 个闭环极点的充要条件.

二、准 备 知 识

考虑如下的线性系统:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x},\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 依次为 n 维状态向量，m 维输入向量和 l 维输出向量; A, B 和 C 分别为具有相应阶数的实数矩阵.

对应的输出反馈为

本文于 1991 年 4 月 18 日收到.
1) 国家自然科学基金资助.

$$u = Ky, \tag{2}$$

其中 K 为 $m \times l$ 阶的实数反馈矩阵。

为了给出系统(1)闭环特征多项式的表达式 $f_c(s) = \det[sI - A - BKC]$，引入如下记号：$B = [b_1 b_2 \cdots b_m], C^t = [c_1^t c_2^t \cdots c_l^t]$，$K = (k_{ij})_{m\times l}$。则

$$f_c(s) = \det\left[sI - A - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} b_i k_{ij} c_j\right].$$

等价于一个具有 $r(r = m \times l)$ 个单输入、单输出控制站的分散控制系统的闭环特征多项式。为了书写简便，经适当重记下标后有 $f_c(s) = \det\left[sI - A - \sum_{i=1}^{r} \tilde{b}_i \tilde{k}_i \tilde{c}_i\right]$。$\tilde{b}_i$ 和 $\tilde{c}_i$ 分别为 B 中的列和 C 中的行，$\tilde{k}_i$ 为 K 中的元素。每一项 $\tilde{b}_i \tilde{k}_i \tilde{c}_i$ 对应一项 $b_i k_{ij} c_j$。

再记 $f_0(s) = \det[sI - A]$，对于 $\{1,2,\cdots,r\}$ 的任一非空子集 $\{i_1, i_2, \cdots, i_t\}$，定义：

$$f_{i_1 i_2 \cdots i_t}(s) = \det\begin{bmatrix} sI - A & \tilde{b}_{i_1} & \tilde{b}_{i_2} \cdots \tilde{b}_{i_t} \\ \tilde{c}_{i_1} & 0 & 0 \cdots 0 \\ \tilde{c}_{i_2} & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \tilde{c}_{i_t} & 0 & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

由式(3)知，$\deg f_{i_1 i_2 \cdots i_t}(s) < n$。由文献[3]的引理 4 易证引理 1。

引理 1. 系统(1)的闭环特征多项式 $f_c(s)$ 可以表示为

$$f_c(s) = f_o(s) + \sum_{i=1}^{r} \tilde{k}_i f_i(s) + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant r-1 \\ j<i}} \tilde{k}_i \tilde{k}_j f_{ij}(s) + \cdots + \prod_{1\leqslant i\leqslant r} \tilde{k}_i f_{12\cdots r}(s). \tag{4}$$

从形式上看，式(4)中有 2^r 个多项式。但是，由于 $\operatorname{rank} B \leqslant m$，$\operatorname{rank} C \leqslant l$，所以式(4)中多项式的个数一般远远少于 2^r 个。记式(4)中多项式全体的集合为 $F_c(s)$，并记 $F_o(s) = F_c(s) - \{f_o\}$。易知，$F_c(s)(F_o(s))$ 中最多有 $n + 1(n)$ 个线性无关的多项式。设 $f_{m_1}(s), f_{m_2}(s), \cdots, f_{m_k}(s)$ 为 $F_c(s)$ 中的一个极大线性无关组，则由文献[3]的结果易证引理 2。

引理 2. 系统(1)能控能观的充要条件是

$$\operatorname{rank}[f_{m_1}(A) f_{m_2}(A) \cdots f_{m_k}(A)] = n, \tag{5}$$

即 $f_o(s)$ 与 $F_o(s)$ 中的某一极大线性无关组互素。

这一结果说明系统(1)的能控能观条件不能保证它在输出反馈作用下任意配置 n 个闭环极点。

由于目前的极点配置，大都强调线性化方法。例如，用能控标准型配置极点，状态反馈矩阵的求法实质上就是解线性方程组。所以，本文有如下定义。

定义 1. 系统(1)称为可任意配置极点，如果存在反馈矩阵 K，使 $f_c(s) = 0$ 有任意指定的 n 个共轭根；K 可以由线性化方法得到。

例如 用能控标准型配置极点时，在状态反馈矩阵中，首先令某些元素为常数，然后

再确定其它元素配置出给定的极点,就是线性化方法.

引理 3. 如果 $F_c(s)$ 中至少有两个非零多项式存在,则存在反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$,使 $f_c(s)=0$ 有一个实根.

证明. 显然,在上述条件下,除 $f_o(s)$ 外,至少还有一个多项式不为零. 如果 $f_i(s)\not\equiv 0$, 令式(4)中除 $\tilde{k}_i$ 以外的组合系数为零. 这时, 选实数 c 使 $f_i(c)\neq 0$. 令 $\tilde{k}_i=-f_o(c)/f_i(c)$, 则 $f_c(s)=0$ 有一实根 c. 如果所有 $f_i(s)\equiv 0$, 则在 $f_{ij}(s)$ 中重复上述配置方法,配出一个实根. 否则,再继续上述做法,经有限次后,即可配出 $f_c(s)=0$ 的一个实根. 证毕.

由于极点配置可通过多次反馈实现,不失一般性,可以假设 $f_0(s)=0$ 有一个实根. 显然,$f_o(s)$ 与 $-f_o(s)$当 s 在实数域上变化时张满整个实数域. 所以, n 个闭环极点s_p, $p=1,2,\cdots,n$,在实数域上相互独立变化时,对于任意给定的 n 个实数 a_p, $p=1,2,\cdots,n$ 或者有 $f_0(s_p)=a_p$, 或者有 $-f_o(s_p)=a_p$. 从而,在 $f_o(s_p)$ 前面添上适当的负号后, n 个 $f_o(s_p)$ 构成的向量 $[f_o(s_1)f_o(s_2)\cdots-f_o(s_p)\cdots-f_o(s_n)]'=[a_1a_2\cdots a_p\cdots a_n]'$ 张满了整个 n 维线性空间.

引理 4. 如果系统(1)可任意配置极点, 则 $F_c(s)$ 中含有秩为 $n+1$ 的极大线性无关组.

证明. 由假设,取 n 个互异的实根 s_p 代入 $f_c(s)=0$ 后, 经过在 $f_0(s_p)$ 前面添上适当的负号,可以得到

$$\begin{bmatrix} -f_o(s_1)\\ -f_o(s_2)\\ \vdots\\ f_o(s_p)\\ \vdots\\ -f_o(s_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(s_1) & f_2(s_1) & \cdots & f_{12\cdots r}(s_1)\\ f_1(s_2) & f_2(s_2) & \cdots & f_{12\cdots r}(s_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -f_1(s_p) & -f_2(s_p) & \cdots & -f_{12\cdots r}(s_p)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_1(s_n) & f_2(s_n) & \cdots & f_{12\cdots r}(s_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{k}_1\\ \tilde{k}_2\\ \vdots\\ \\ \vdots\\ \tilde{k}_1\tilde{k}_2\cdots\tilde{k}_r\end{bmatrix}. \tag{6}$$

由定义 1 知,式(6)经线性化后所得到的线性方程组对任意的

$$[-f_o(s_1)-f_o(s_2)\cdots f_o(s_p)\cdots-f_o(s_n)]'$$

有解. 记这样的线性方程组为

$$A(s)\tilde{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{f}(s), \tag{7}$$

其中 $A(s)$ 为式(6)矩阵中的列组成的矩阵; $\tilde{\boldsymbol{K}}$ 为 $\tilde{k}_1,\tilde{k}_2,\cdots,\tilde{k}_r$ 的线性函数构成的向量; $\boldsymbol{f}(s)$ 由式(6)中左端向量和矩阵中某些列(去掉 $A(s)$ 的列)的常系数(由线性化时取 K 中某些元素为常数所产生)线性组合相加得到. 由于 $\deg f_o(s)=n>\deg f_{i_1i_2\cdots i_t}(s)$,所以当 n 个 s_p 相互独立变化时,向量 $\boldsymbol{f}(s)$ 仍然张满 n 维线性空间. 这时,如果 $F_o(s)$ 中不存在秩为 n 的极大线性无关组,则任一个线性方程组(7)的系数矩阵 $A(s)$ 不会行满秩[1]. 从而 $A(s)\tilde{\boldsymbol{K}}$ 当 $\tilde{\boldsymbol{K}}$ 变化时不会张满 n 维线性空间. 与定义 1 矛盾. 所以 $F_c(s)$ 中含有秩为 $n+1$ 的极大线性无关组.

如果 n 个实根 s_p 中有某个重数为 q 的根,则用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f_c(s_p)=0$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}f_c(s_p)=0,\cdots,\frac{\mathrm{d}^{q-1}}{\mathrm{d}s^{q-1}}f_c(s_p)=0$ 代替式(6)中的 $q-1$ 个方程. 仍有上述结论成立. 证毕.

由于 $F_c(s)$ 中含有 $n+1$ 个线性无关的多项式时,这组多项式必然互素[1]. 从而有

如下结论：如果系统(1)可任意配置极点，则该系统能控能观.

定义 2. $f_c(s)$ 称为可分解的，如果取 K 中某些元素为常数，其余元素任意变化时，系统(1)的极点可配置性保持不变，且 $f_c(s)$ 可以表示为

$$f_c(s) = f_{c_1}(s,\widetilde{K}_1)f_{c_2}(s,\widetilde{K}_2)\cdots f_{ch}(s,\widetilde{K}_h), \tag{8}$$

其中 $f_{c_i}(s,\widetilde{K}_i)$ 为多项式，$\deg f_{c_i}(s,\widetilde{K}_i) = n_i$，$\sum_{i=1}^{h} n_i = n$；$\widetilde{K}_i$ 为 K 中的元素，$\widetilde{K}_i$ 与 $\widetilde{K}_j$ $(i \neq j)$ 中元素的集合互不相交.

可以推出，每个 $f_{c_i}(s,\widetilde{K}_i)$ 有类似于 $f_c(s)$ 的结构和性质. 且可以由 $f_{c_i}(s,\widetilde{K}_i)$ 来配置系统(1)的闭环极点. 限于篇幅，$f_c(s)$ 可分解的条件这里不予讨论.

定义 3. 实数域上 r 个相互独立变化的一组数 $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_r$ 称为基数，如果它们按不同数相乘的形式产生如下形式的一组数：$\tilde{a}_1\tilde{a}_2, \tilde{a}_1\tilde{a}_3, \cdots \tilde{a}_1\tilde{a}_r, \cdots, \tilde{a}_{r-1}\tilde{a}_r, \cdots, \tilde{a}_1\tilde{a}_2\cdots\tilde{a}_r$；且把后边的这组数称做派生数；基数与派生数的全体集合记为 $\tilde{a}(r)$.

容易从式(4)中看出，对应 $F_o(s)$ 中多项式的组合系数全体为 $\tilde{a}(r)$ 的一个子集.

定义 4. $\tilde{a}(r)$中的一个非空子集称为独立子集，如果去掉它的余集，或者将 $\tilde{a}(r)$ 中某些元素取为常数时，这个非空子集中元素可以相互独立地取任意常数.

独立子集中的元素称独立数. 独立数与非零常数的积仍为独立数. 为了方便，基数与非零常数的积也称为基数.

引理 5. $\tilde{a}(r)$ 中任一个独立子集的元素个数不会超过 r；且独立数可以线性化（将某些基数取为常数)为基数.

证. 由定义 4 知，独立子集中的每一个元素至少含有一个不同的基数. 所以，$\tilde{a}(r)$ 中任一独立子集中元素的个数不会超过 r. 下面证第二个结论. 如独立数本身就是基数，则无需再证. 否则，将派生数中相同的基数取为非零常数，这个非空子集仍为独立子集. 不然的话，说明将 $\tilde{a}(r)$ 中某些元素取为常数时，影响了这个独立子集中的元素的独立变化. 与定义 4 矛盾. 所以经有限次线性化后，这组独立数转化为基数. 证毕.

在极点配置中，由 K 产生的独立子集被用于配置闭环极点. 而去掉的余集等价于它的元素作为式(4)中组合系数时，对应的多项式为零.

三、主要结果

定理 1. 如果系统 (1) 可任意配置极点，则 $F_c(s)$ 中有秩为 $n+1$ 的极大线性无关组.

证明. 由假设，存在某个反馈矩阵 K^0 使 $f_c(s) = 0$ 有一实根. 那末，用 $K_0 + K$ 代替式(4)中的 K，可以得到

$$f_c(s) = f_o(s) + \sum_{i=1}^{r} (\tilde{k}_i^0 + \tilde{k}_i)f_i(s) + \cdots + \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} (\tilde{k}_i^0 + \tilde{k}_i)f_{12\cdots r}(s), \tag{9}$$

其中 $\tilde{k}_i^0 + \tilde{k}_i$ 为 $K^0 + K$ 中元素，$\tilde{k}_i^0$ 取定. 由式(9)知，两次反馈的结果等价于 $F_c(s)$ 中的 $f_o(s)$ 由含有一个实根的同次多项式来替换；其它多项式保持不变； 且又产生一些由 $F_o(s)$中某些多项式乘以非零倍数的多项式. 这样并不改变它们的线性无关性和系统

(1)的极点可配置性。由引理 4 得证结论成立。证毕。

定理 2. 如果 $F_o(s)$ 中有一个秩为 n 的极大线性无关组，在式(4)中对应的组合系数全体为独立子集，则系统(1)可任意配置极点。

证明 不失一般性，设 $F_o(s)$中的一个极大线性无关组为 $f_{m_1}(s), f_{m_2}(s), \cdots, f_{m_n}(s)$，对应的组合系数由引理 5 线性化后记为 $\{\tilde{k}_{m_1}, \tilde{k}_{m_2}, \cdots, \tilde{k}_{m_n}\}$。式(4)中其它多项式的线性组合记为 $\tilde{f}_o(s)$，由定义 4 和引理 5 知，$\tilde{f}_o(s)$为 n 次常系数多项式，与 $f_{m_1}(s), f_{m_2}(s), \cdots, f_{m_n}(s)$ 合为 $n+1$ 个线性无关多项式。由证引理 4 的方法可任意配置出 n 个闭环极点。反馈矩阵K由确定独立子集、线性化和配置极点逐步求出。证毕。

记式(8)中 $f_{c_i}(s, \tilde{K}_i)$ 的全体多项式集合为 $F_{c_i}(s)$，在 $F_{c_i}(s)$ 中去掉次数为 n_i 的多项式后，剩下的余集记为 $F_{o_i}(s)$ (参阅 $F_c(s)$ 和 $F_o(s)$ 的定义)。

定理 3. 系统(1)可任意配置极点的充要条件是或者 $F_o(s)$中有一个秩为 n 的极大线性无关组，在式(4)中对应的组合系数全体为独立子集；或者 $f_o(s)$ 有分解式(8)，这时，$F_{o_i}(s)$ 中有一个秩为 n_i 的极大线性无关组，对应的组合系数全体为独立子集。

证明. 充分性：当满足上述条件之一时，由定义 2 或定理 2 易证。详细推导从略。

必要性：由定理 1 知，$F_o(s)$ 中极大线性无关组的秩为 n。由于在状态空间中，系统(1)可以有不同的描述形式，即状态向量之间存在着不同的坐标变换形式，从而，在极点配置中，将可能解不同形式的以K中元素为未知元的线性方程组。然而，它们的闭环特征多项式却是唯一的。可以想到，这些不同形式的解法在式(4)中表现为：首先适当选取K中某些元素为常数，使其余的K中元素构成线性方程组的未知元。然后由给定的闭环极点确定出这些未知元。从而得到反馈矩阵 K。因此，可利用式(4)，将$f_c(s)$ 分不可分解和可分解两种情况来证明必要性。

当 $f_c(s)$ 不可分解的，记式(6)为

$$\boldsymbol{f} = F_1\boldsymbol{K}_1 + F_2\boldsymbol{K}_2, \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{f}^t = [-f_o(s_1) - f_o(s_2)\cdots f_o(s_p)\cdots - f_o(s_n)]^t$；$F_1$ 为式(6)中系数矩阵的任一 n 阶满秩子矩阵，$\boldsymbol{K}_1$ 为 $[\tilde{k}_1\ \tilde{k}_2\cdots\tilde{k}_1\ \tilde{k}_2\cdots\tilde{k}_r]^t$ 中对应这个子矩阵的向量；$F_2\boldsymbol{K}_2$ 为式(6)右端余下的部分。如果任一个 $\boldsymbol{K}_1$ 中的 n 个元素都不是独立子集，则由定义 4 知，对任一个取定的 $\boldsymbol{K}_2$，或者使 $\boldsymbol{K}_1$ 中某些元素不能独立变化，或者使 $\boldsymbol{K}_1$ 中某些元素不能取任意值。两种情况都表明不存在极点配置的线性方法，即无法通过取定K中某些元素，使式(10)化为线性方程组。与该系统可任意配置极点矛盾。所以在 $f_c(s)$ 不可分解情况下必要性成立。

当 $f_c(s)$ 可分解时，由定义 2 知，系统(1)可任意配置极点等价于每个 $f_{c_i}(s, \tilde{K}_i)$ 任意给定 n_i 个共轭根时，存在可以线性化解出的 $\tilde{K}_i$ 使 $f_{c_i}(s, \tilde{K}_i) = 0$ 有预定的 n_i 个根。用类似于上面的证法，可以推出：$F_{o_i}(s)$ 中有一个秩为 n_i 的极大线性无关组，对应的组合系数全体为独立子集。证毕。

定理 3 从理论上首次给出了线性系统在输出反馈作用下，可由线性化方法任意配置极点的充要条件。

推论 1. 系统 (A, B) 能控的充要条件是它的闭环特征多项式中有 n 个次数小于 n 的线性无关多项式，对应的组合系数全体为独立子集。

证明. 充分性由定理 3 (取 $C=I$) 易证.

必要性：由假设,存在矩阵 $F_o\in R^{m\times n}$，使 $(A+BF_0,b_i)$ 能控. 由文献[1]的结果易证：$(A+BF,b_i)$ 的闭环特征多项式中有 n 个次数小于 n 的线性无关多项式,对应的组合系数全体为独立子集. 注意到 $\det[sI-A-BF_o-b_if_i]=\det[sI-A-BF]$，其中 $F=F_o+\begin{bmatrix}0\\f_i\\0\end{bmatrix}_{m\times n}$ i 行，$F\in R^{m\times n}$，f_i 为 n 维向量,由此得证必要性. 证毕.

四、算法与例子

设已求得 $f_c(s)$,并确定出 $F_o(s)$ 中秩为 n 的极大线性无关组以及对应的独立子集，与 $f_o(s)$合到一起得式(10). 取定 $\boldsymbol{K}_2$ 得线性方程组. 解出 $\boldsymbol{K}_1$，得 K. $f_c(s)$ 可分解时，配置方法类似.

例 1[4]. 取系统(1)中矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix},\tag{11}$$

计算得

$$f_c(s)=s^3(s+1)-k_{22}s(s+1)^2-k_{12}s(s+1)-k_{21}(s+1)-k_{11},\tag{12}$$

显然,满足定理 3, 因此,可任意配置极点.

例 2. 取系统(1)中矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad C^t=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\tag{13}$$

取 $k_{21}=k_{22}=k_{31}=k_{32}=k_{13}=0$，则 $f_c(s)$ 可以分解为

$$f_c(s)=(s^2-1-k_{12}s-k_{11})(s^2+1-k_{23}s-k_{33}),\tag{14}$$

同样满足定理 3, 可任意配置极点.

结　束　语

在本文基础上，可以进一步研究与极点配置有关的静态镇定和动态补偿器最小阶等问题以及极点配置问题的非线性解法. 并且对这些多年来悬而未决的重大理论问题会有不同程度的解决.

参　考　文　献

[1] 张庆灵,广义线性单输入系统的镇定,极点配置和可控性,控制理论与应用,8(1991), No. 2, 220.
[2] Zhang Qingling, Analysis of Descriptor Systems by Means of Polynominal Method, Proc. of Int. Conf. on Signals & Systems, 3(1990), 1: Also to Appear in Advances in Modelling and

Simulation, **28**(1992), No. 4, 23.
[3] Zhang Qingling, On Generalized Decentralized Fixed Modes in Descriptor Systems, *Systems and Control Letters*, **15**(1990), 4, 295.
[4] 张福恩,输出反馈极点配置的直接方法,自动化学报,**13**(1987), No. 2, 101.

A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR POLE ASSIGNMENT USING LINEAR APPROACH

ZHANG QINGLING
(Department of Mathematics, Northeast University of Technology, 110006)

ABSTRACT

In this paper, the problem of pole assignment for linear systems under output feedback is considered. A necessary and sufficient condition for the n (equals to dimension of the systems) closed-loop poles to be placed arbitrarily by linear method is obtained. A new method is developed to assign the poles.

Key words: Linear systems; output feedback; pole assignment.

张庆灵 东北工学院数学系副教授. 1985 年获应用数学专业硕士学位. 目前从事科研和教学工作.主要研究方向为广义系统、分散控制和最优控制. 在国内外发表学术论文四十余篇. 并多次获奖.