第19卷 第1期　　自 动 化 学 报　　Vol. 19, No. 1
1993年1月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1993

工业过程稳态模型估计误差的渐近正态性分析：SISO情形[1)]

陈庆新　万百五
（西安交通大学系统工程研究所　710049）

摘　要

本文研究了在相当弱的条件下工业过程稳态模型估计误差的渐近正态性．参数估计采用简单加权最小二乘法，并利用近似线性模型集．优化过程中正常的系统设定点阶跃变化作为辨识信号．据此证明了系统稳态模型估计误差渐近正态分布的结论．同时，还研究了估计量的收敛速度和对线性近似模型结构的渐近鲁棒性．仿真研究则探讨了在有限样本空间内，影响估计精度的若干因素．

关键词：系统辨识，随机系统，在线优化控制，稳态设定点优化．

一、引　言

对慢时变系统进行稳态优化已有许多方法．其中大多数在优化的过程中需要知道系统的稳态模型，而现有的多数稳态辨识方法都或多或少地存在一些不足，不易被工业界接受[1-3]，为此，文献[8]提出了一种利用系统对正常设定点优化阶跃响应这一动态信息的辨识方法．本文正是在这一方法的基础上，分析由这一方法提出的系统稳态模型估计误差的渐近性态，同时，还给出了这一估计量的收敛速度估计；并在可接受的条件下，给出了该估计量对线性近似模型结构的渐近鲁棒性．在仿真研究中，探讨了在有限采样数据的情况下，近似线性模型结构、系统噪声结构等因素对估计精度的影响．

二、主要结果

考虑以下的单输入单输出线性系统：

$$y(k)+\sum_{i=1}^{n_a} a_i(k)y(k-i)=\sum_{i=1}^{n_b} b_i(k)u(k-d-i)+v(k), \tag{1}$$

其中 n_a, n_b 和 d 分别为系统输出的阶、输入的阶和时延；并且如下关于系统、噪声和输入信号的假设成立．

本文于1991年4月6日收到．
1）本文获自然科学基金资助，曾在1991年12月全国自动化学会第三届全国学术年会(北京)上宣读．

关于系统的假设:

A1.
$$\lim_{N\to\infty}\sqrt{N}[a_i(N)-a_i]=0,\ i=1,2,\cdots\cdots,n_a, \tag{2a}$$
$$\lim_{N\to\infty}\sqrt{N}[b_i(N)-b_i]=0,\ i=1,2,\cdots\cdots,n_b, \tag{2b}$$

并且多项式 $r^{n_a}+\sum_{i=1}^{n_a}a_ir^{n_a-i}$ 的全部零点严格位于单位圆内；$a_i,i=1,2,\cdots\cdots,n_a;b_i$，$i=1,2,\cdots\cdots,n_b$ 皆为有限实常数；

关于噪声的假设：

A2. 存在 $\delta>0$，使得噪声 $v(k)$ 有直到 $4+\delta$ 阶一致有界的绝对矩；

A3.
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}E\{v(k)\}=0, \tag{3}$$

其中 E 是数学期望算子.

关于输入信号的假设：

输入信号是阶跃函数，即系统设定点在优化过程中的正常阶跃变化，设其从 σ_0 阶跃至 σ；

A4.
$$\sigma\neq 0. \tag{4}$$

在参数估计过程中，使用近似线性模型

$$y(k)+\sum_{i=1}^{m_a}a_{i,m}y(k-i)=\sum_{i=1}^{m_b}b_{i,m}u(k-d_m-i), \tag{5}$$

其中 m_a，m_b 和 d_m 分别是近似线性模型输出的阶、输入的阶和时延. 辨识采用简单加权最小二乘法，优化指标为

$$J_N=\frac{1}{N}\sum_{k=T}^{N}\beta_{k-T+1}[y(k)-\hat{y}(k)]^2, \tag{6}$$

其中 $\hat{y}(k)=-\sum_{i=1}^{m_a}\hat{a}_{i,N}y(k-i)+\sum_{i=1}^{m_b}\hat{b}_{i,N}u(k-d_m-i)$；$\hat{a}_{i,N}$ 是参数 $a_{i,m}$ 的估计值；$i=1,2,\cdots\cdots,m_a$；$\hat{b}_{i,N}$ 是参数 $b_{i,m}$ 的估计值；$i=1,2,\cdots\cdots,m_b$；共采集 N 组数据.

设
$$\hat{\theta}_N\triangleq[\hat{a}_{1,N},\hat{a}_{2,N},\cdots\cdots,\hat{a}_{m_a,N},\hat{b}_{1,N},\hat{b}_{2,N},\cdots\cdots,\hat{b}_{m_b,N}]^T, \tag{7}$$
$$Y_N\triangleq[y(T),y(T+1),\cdots\cdots,y(N)]^T, \tag{8}$$
$$T\triangleq\max[m_a,d_m+m_b], \tag{9}$$
$$B\triangleq\mathrm{diag}[\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_{N-T+1}], \tag{10}$$

$$\phi_N\triangleq\begin{bmatrix}-y(T-1) & -y(T-2),\cdots,-y(T-m_a) & u(T-d_m-1)\cdots u(T-d_m-m_b)\\ -y(T) & -y(T-1),\cdots,-y(T-m_a+1) & u(T-d_m)\cdots u(T-d_m-m_b+1)\\ \vdots & \vdots\qquad\qquad\vdots & \vdots\qquad\qquad\vdots\\ -y(N-1) & -y(N-2),\cdots,-y(N-m_a) & u(N-d_m-1)\cdots u(N-d_m-m_b)\end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\Phi\triangleq\phi_N^TB\phi_N. \tag{12}$$

由最小二乘准则可得

$$\hat{\theta}_N=\Phi^{-1}(\phi_N^TBY_N). \tag{13}$$

类似地，可以设 θ_N^* 为 $E\{J_N\}$ 的最小点，其中的 $\hat{y}(k)$ 由(5)式给出．因此，与(7)式相对应

$$\theta_N^* \triangleq [a_{1,N}^*, a_{2,N}^*, \cdots\cdots, a_{m_a,N}^*, b_{1,N}^*, b_{2,N}^*, \cdots\cdots, b_{m_b,N}^*]^T, \tag{14}$$

采样点的安排使得

$$u(k-d_m-1)=\begin{cases}\sigma, & k \geq T,\\ \sigma_0, & k<T.\end{cases} \tag{15}$$

关于加权因子的假设：

A5. $\beta_k > 0$，且 $\lim\limits_{N\to\infty}\sqrt{N}(\beta_N-1)=0$，$k=1,2,\cdots$．　(16)

引理．考虑线性系统(1)且假设 A1—A5 成立时，如果以下条件满足：

A6.
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E\{y(k)\}=\alpha, \tag{17a}$$

存在 $N_0 \geq n_a$，当 $|j| \leq N_0$ 时有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E\{y(k)y(k-j)\}=\alpha_j, \tag{17b}$$

其中 α，α_j 都是有限实常数；$j=0,\pm1,\cdots,\pm N_0$.

A7. 存在某个数 N_1，对任意 $N \geq N_1$，噪声 $v(k)$ 使得矩阵 F 是正定阵，

$$F \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum\limits_{k=T}^{N}E\{y(k-1)y(k-1)\}\cdots & \frac{1}{N}\sum\limits_{k=T}^{N}E\{y(k-1)y(k-m_a)\} & \frac{1}{N}\sum\limits_{k=T}^{N}E\{y(k-1)\} \\ \vdots \quad \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{N}\sum\limits_{k=T}^{N}E\{y(k-m_a)y(k-1)\}\cdots & \frac{1}{N}\sum\limits_{k=T}^{N}E\{y(k-m_a)y(k-m_a)\} & \frac{1}{N}\sum\limits_{k=T}^{N}E\{y(k-m_a)\} \\ \frac{1}{N}\sum\limits_{k=T}^{N}E\{y(k-1)\} \quad \cdots & \frac{1}{N}\sum\limits_{k=T}^{N}E\{y(k-m_a)\} & \frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}E\{I\} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

A8.
$$\det A \neq 0, \tag{19}$$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots\cdots\alpha_{m_a-1} & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots\cdots\alpha_{m_a-2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots & \vdots \\ \alpha_{m_a-1} & \alpha_{m_a-2} & \cdots\cdots \alpha_0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots \alpha_{m_a} & 1 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

则可以得到

1）存在某个 N_2，使得对于任意 $N \geq N_2$，矩阵 Φ　$a.s.$ 可逆；

2）如果 C1 成立，则 $\left(1+\sum\limits_{i=1}^{m_a}\hat{a}_{i,N}\right)\neq 0$，$a.s.$；

3）同时存在某个 N_3，对任意 $N \geq N_3$，$\left(1+\sum\limits_{i=1}^{m_a}a_{i,N}^*\right)\neq 0$.

证明过程见脚注 1)

1) 陈庆新，工业过程稳态模型辨识的新方法研究，西安交通大学博士论文，1991 年.

定义. 系统(1)的无噪声稳态模型为

$$y=\left(1+\sum_{i=1}^{n_a}a_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n_b}b_i\right)u, \tag{21}$$

定义其稳态增益为

$$\lambda\triangleq\left(1+\sum_{i=1}^{n_a}a_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n_b}b_i\right). \tag{22}$$

上述定义是有意义的,因为由 A1 可知

$$\left(1+\sum_{i=1}^{n_a}a_i\right)>0. \tag{23}$$

类似地,可以定义 λ 的估计量 $\hat{\lambda}_N$

$$\hat{\lambda}_N\triangleq\left(1+\sum_{i=1}^{m_a}\hat{a}_{i,N}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m_b}\hat{b}_{i,N}\right) \tag{24}$$

和 λ_N^*

$$\lambda_N^*\triangleq\left(1+\sum_{i=1}^{m_a}a_{i,N}^*\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m_b}b_{i,N}^*\right). \tag{25}$$

由引理可知 $\hat{\lambda}_N$ 和 λ_N^* 都是有意义的.

定理 1 (误差渐近分布). 假设条件 A1—A8 成立,则 $\sqrt{N}(\hat{\lambda}_N-\lambda)$ 是渐近正态分布,即

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt{N}(\hat{\lambda}_N-\lambda)\overset{p}{\sim}\mathcal{N}(0,\mu).$$

证明过程见作者博士论文.

定理 2 (渐近收敛速度). 假设 A1—A8 成立. 如果 $\lim\limits_{N\to\infty}\left|\sum\limits_{k=T}^{N}\beta_{k-T+1}y(k)-\sigma N\lambda-\sigma M_N\right|=+\infty$, *a.s.* 或者存在某个正常数 M 和某个正整数 N_4,使得对任意的 $N\geqslant N_4$,有 $0<\left|\sum\limits_{k=T}^{N}\beta_{k-T+1}y(k)-\sigma N\lambda-\sigma M_N\right|<M$, *a. s.* 其中 M_N 是与模型(5)的结构和采样点数 N 有关的数,则 $\hat{\lambda}_N$ 的收敛速度可以渐近地由下式表述:

$$\left|\frac{\hat{\lambda}_{N+m}-\lambda}{\hat{\lambda}_N-\lambda}\right|\leqslant K(m)\frac{N}{N+m},\quad a.\ s., \tag{26}$$

其中 $K(m)$ 是某个与 m 有关的正数. 证明过程见作者的博士论文.

推论. 假设 A1—A8 成立,如果以下条件满足:

A9. 噪声 $v(k)$ 一致有界,即存在某个正数 C,使得 $|v(k)|\leqslant C$, *a.s.* $k=1,2,\cdots\cdots$.

A10.

$$\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{N}v(k)\right|=+\infty,\quad \text{a. s.}, \tag{27}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{N}(\beta_k-1)\right|<+\infty, \tag{28}$$

则定理 2 成立. 证明过程见作者的博士论文.

条件 A9 是合理的. 实际上,在具有指数稳定性的线性系统中,设备和工业设施只能在有界的范围内工作. 况且,系统下层的 PID 调节器和适应控制器可以降低由噪声产生

的影响．在实际过程中条件(28)式也是可以接受的，加权因子通常可以由 $\beta_k = \beta_0\beta_{k-1} + (1-\beta_0), \beta_0, \beta_1 > 0, k = 2, 3, \cdots\cdots$ 构成，这类选择是常用的[7]．此时(28)式显然成立．

定理 3（渐近鲁棒性）．假设 A1—A10 和条件(28)式成立，则

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(M_N/N)}{G_N} = 0, \quad a.\ s., \tag{29}$$

其中项 M_N/N 是与近似线性模型结构选择有关的误差部分；G_N 是只与采样数据长度 N 有关的误差部分．证明过程见作者博士论文．

定理 3 说明，当采样数据足够多时，系统稳态模型的估计误差主要取决于采样数据的长度，由近似线性模型结构的不同选择而引起的估计误差可以忽略不计．

一般说来，在有限长度的采样数据前提下，为了获得最好的估计精度，近似线性模型结构的最佳选择将不仅取决于系统的结构和参数，而且与随机噪声的结构和实现有密切的关系．这一点从下一节仿真的结果中可以明显地看出．但是，这些因素都是未知的和不可预测的．因此就估计精度而言，在有限长的采样数据前提下，无法预先确定最佳的近似线性模型结构，而当采样数据足够多时，定理 3 则给出了定性的结论．

三、仿 真 研 究

考虑如下单输入单输出线性定常系统：

$$\begin{aligned} &y(k) - 1.26y(k-1) + 0.656y(k-2) - 0.1418y(k-3) \\ &= 0.936u(k-1) - 0.8075u(k-2) + 0.101u(k-3) + e(k), \end{aligned}$$

其中 $e(k)$ 是平稳遍历白噪声序列，零均值正态分布，阶跃输入从 0.3 至 1.3，采样数据 1 000 个．四组不同的白噪声序列用于随机扰动．运用递推简单最小二乘估计法．系统的无噪声稳态增益真值为 $\lambda = 0.902909$．比较不同近似线性模型结构估计精度的指

表 1　噪声的标准差为 0.08 时 J_e 的值

噪声组号 / 模型阶数	1	2	3	4
$m_a = 0,\ m_b = 3$	0.015986966	0.007238003	0.014542153	0.007503006
$m_a = 1,\ m_b = 3$	0.005116455	0.044901274	0.062455790	0.016234066
$m_a = 2,\ m_b = 3$	0.013133083	0.013323786	0.021979163	0.004767781
$m_a = 3,\ m_b = 3$	0.010466356	0.016474857	0.025597813	0.004903402
$m_a = 0,\ m_b = 2$	0.027922437	0.003075985	0.005274877	0.017539711
$m_a = 1,\ m_b = 2$	0.006582345	0.024562983	0.037591927	0.006543878
$m_a = 2,\ m_b = 2$	0.014364272	0.008729377	0.016140754	0.005992891
$m_a = 3,\ m_b = 2$	0.008257615	0.016103686	0.025875272	0.004714034
$m_a = 0,\ m_b = 1$	0.043557602	0.004942935	0.002819821	0.031488896
$m_a = 1,\ m_b = 1$	0.034552726	0.003679599	0.003801305	0.023826236
$m_a = 2,\ m_b = 1$	0.027032101	0.003195624	0.005232625	0.016317015
$m_a = 3,\ m_b = 1$	0.016356454	0.006136632	0.010614577	0.008877278

表 2 噪声的标准差为 0.008 时 J_e 的值

模型阶数 \ 噪声组号	1	2	3	4
$m_a=0, m_b=3$	0.453381E-3	0.393238E-4	0.302310E-4	0.264315E-3
$m_a=1, m_b=3$	0.545005E-4	0.471495E-3	0.641333E-3	0.201860E-3
$m_a=2, m_b=3$	0.703805E-4	0.200924E-3	0.300828E-3	0.615628E-4
$m_a=3, m_b=3$	0.103742E-3	0.153600E-3	0.234874E-3	0.484649E-4
$m_a=0, m_b=2$	0.759526E-3	0.147237E-3	0.701095E-4	0.564104E-3
$m_a=1, m_b=2$	0.975866E-3	0.226942E-3	0.118857E-3	0.724538E-3
$m_a=2, m_b=2$	0.759519E-4	0.186742E-3	0.317656E-3	0.542116E-4
$m_a=3, m_b=2$	0.716394E-4	0.217289E-3	0.327526E-3	0.590625E-4
$m_a=0, m_b=1$	0.625623E-3	0.105754E-3	0.478986E-4	0.474897E-3
$m_a=1, m_b=1$	0.107195E-2	0.331337E-3	0.205878E-3	0.973136E-3
$m_a=2, m_b=1$	0.457765E-3	0.445843E-4	0.295906E-4	0.307046E-3
$m_a=3, m_b=1$	0.358339E-3	0.324296E-4	0.487942E-4	0.209236E-3

标是 $J_e \triangleq \sum_{k=500}^{1000}(\hat{\lambda}_k-\lambda)^2$. 利用两种不同水平的白噪声来验证这一结论，标准差分别是 0.08 和 0.008. 不同的近似线性模型结构对应的指标 J_e 的值见表 1 和表 2.

从表 1 和表 2 的结果看，在有限长的采样数据情况下，给出精度最好估计的模型不一定是能确切描述系统动态结构的那一类模型，具有比系统结构简单的近似线性模型往往能提供更好的增益估计精度.

四、结 论

针对一类慢时变线性系统，当没有任何关于其结构方面的验前知识时，运用本文采用的辨识方法不需要进行在线系统结构辨识；唯一需要的辨识激励信号是系统优化过程中的设定点的阶跃变化；由此而产生的稳态模型估计误差是渐近正态分布的，同时也给出了其方差. 关于随机噪声的平稳性假设和分布上的假设没有要求. 近似线性模型集可以不包含真实的系统动态结构.

基于对稳态模型估计量的渐近收敛速度估计的进一步分析，找到了影响估计精度的主要因素，即样本长度和噪声方差. 由线性近似动态模型结构的不同选择而导致的估计误差可渐近地忽略不计.

一般说来，在有限长的采样数据情况下，能导致最佳估计精度的近似线性模型结构取决于多种因素，如系统的结构和参数，随机噪声的结构和实现等等，这些因素绝大多数是未知的和难以预测的. 在仿真研究中给出了随机噪声的实现是如何影响这一选择的. 仿真结果指出，并不是那一类能确切描述系统动态结构的模型会导致最优的估计精度，往往具有比系统动态结构简单的近似线性动态模型可以给出更好的估计结果.

参 考 文 献

[1] Bamberger, W. and Isermann, R., Adaptive On-line Steady-state Optimization of Slow Dynamic

Processes, *Automatica*, **14**(1978), 223—230.

[2] Garcia, C. E. and Morari, M., Optimal Operation of Integrated Processing Systems. Part I: Open-loop On-line Optimizing Control, *AIChE Journal*, **27**(1981), 960—968.

[3] Lin, J., Han, C., Roberts, P. D. and Wan, B. W., A New Approach to stochastic Optimization Control of Steady State Systems Using Dynamic Information, *Int. J. Control*, **50**(1989), 2205—2235.

[4] Ljung, L. and Caines, P. E., Asymptotic Normality of Prediction Error Estimators for Approximate System Models, *Stochastics*, **3**(1979), 29—46.

[5] Pòlya, G. and Szegö, G., Problems and Theorems in Analysis, V. 1, Springer-verlag, New York, (1972).

[6] Rohatgi, V. K., An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, Inc, New York, (1976).

[7] Söderström, T. and Stoica, P., System Identification, Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, (1989).

[8] 陈庆新、万百五，利用工业过程动态信息建立稳态模型及其强一致性分析：SISO 情形，控制与决策，**6**(1991)，90—96.

ASYMPTOTIC NORMALITY ANALYSIS OF THE ESTIMATION ERROR OF STEADY-STATE MODEL FOR INDUSTRIAL PROCESS: (SISO) CASE

CHEN QINGXIN　　WAN BAIWU

(*Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University*, 710049)

ABSTRACT

This paper investigates the asymptotic normality of the estimation error of steady-state models of industrial processes in quite mild conditions. The estimate is formed from the estimated parameters of an approximate linear model which is strong consistent to the steady-stategain of the slow time-varying linear SISO system. In the parameter estimation, the weighted leastsquares method is employed. The input signal (the system set point) is the usual step change in the optimization procedure. The rate of convergence is given out in this paper. The stationarity and the distribution of the stochastic process are not demanded. Under some acceptable conditions, the robustness to the structure of the approximate linear model is achieved In simulaion study, it is shown that for limited length of the sampled data, the best choice of the structure of approximate models in the aspect of estimation precision is dependent upon the realization of the stochastic noise.

Key words: System identification; stoch stic system; on-line optimization control; steady state set point optimization.

陈庆新　1963 年 3 月生于西安．1985 年和 1988 年分别获西安交通大学机械系工学学士和工学硕士学位．现在西安交通大学信控系系统工程研究所攻读博士学位．目前从事随机稳态大系统理论的研究工作．

万百五　1951 年在上海交通大学研究生毕业后留校任教，1958 年随迁校到西安交通大学工作，现为该校系统工程研究所大系统室主任、教授、博士生导师．主要从事大系统建模、优化、分解-协调以及大工业过程的递阶控制等研究．出版有《随机系统理论》等多部著作．曾获国家教委科技进步一等奖、二等奖各一次．发表论文近 110 篇．