



鲁棒 Luenberger 观测器设计

段广仁 李建华 周连山

(哈尔滨工业大学控制工程系, 150006)

摘 要

观测器控制系统中的观测器条件是系统的状态观测值渐近收敛于系统真实状态的根本条件。本文首先提出了 Luenberger 观测器设计的一种参数方法, 然后根据使观测器条件误差为最小的准则, 考虑了具有参数摄动的系统的鲁棒 Luenberger 观测器设计问题, 给出了简单、有效的算法。仿真结果说明了本文方法的有效性。

关键词: 线性系统, Luenberger 观测器, 参数摄动, 鲁棒性。

一、问题的提出

在本文中, $\lambda(A)$ 、 $\det(A)$ 、 $\|A\|_\infty$ 、 $\|A\|_1$ 及 $\|A\|_2$ 分别代表矩阵 A 的特征值、行列式、行和范数、列和范数及谱范数; \bar{S} 代表 S 的共轭; 记号 $i \in n$ 意指 $i = 1, 2, \dots, n$ 。

考虑下述观测器控制系统:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (1a)$$

$$\dot{z} = Fz + Ly + TBu, \quad u = K\hat{x} = Nz + My, \quad (1b)$$

其中 $x \in R^n$, $u \in R^r$, $y \in R^m$, $z \in R^p$; A, B, C 为适当阶的系统参数矩阵, 且 $[AB]$ 能控、 $[AC]$ 能观; F, L, T, N, M 为满足下述条件的实矩阵:

$$\operatorname{Re} \lambda(F) < 0, \quad (2a)$$

$$TA - FT = LC, \quad (2b)$$

$$K = NT + MC. \quad (2c)$$

条件 (2a)–(2c) 称为系统(1)的观测器条件, 它保证了下述渐近关系:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [K\hat{x}(t) - Kx(t)] = 0. \quad (3)$$

当系统参数矩阵 A, B, C 存在摄动 $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ 时, 显然观测器条件 (2b)–(2c) 将存在误差

$$\Delta_1 = L\Delta C - T\Delta A \quad \text{和} \quad \Delta_2 = M\Delta C. \quad (4)$$

不失一般性, 记

$$\Delta A = \sum_{i=1}^l \delta_a^i A_i, \quad \Delta C = \sum_{i=1}^l \delta_c^i C_i, \quad (5)$$

其中 $A_i, C_i, i \in l$ 为已知矩阵; $\delta_a^i, \delta_c^i, i \in l$ 为未知的标量, 则有

$$L\Delta C = \sum_{i=1}^l \delta_c^i LC_i, \quad T\Delta A = \sum_{i=1}^l \delta_a^i TA_i, \quad M\Delta C = \sum_{i=1}^l \delta_c^i MC_i.$$

从而观测器条件误差的一个合理度量可取为

$$J = \sum_{i=1}^l [\alpha_i \|TA_i\|_* + \beta_i \|LC_i\|_* + \gamma_i \|MC_i\|_*], \quad (6)$$

其中 $* = 1, 2, \infty$; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i \in l$ 为适当的加权因子。

注意到当 $T = 0$ 时 (1b) 中的 $u = Kx$ 退化为一个输出反馈律, 因而本文的鲁棒 Luenberger 观测器设计问题可描述如下。

问题 RLO: 给定完全能控、能观系统 (1a) 及适当的状态反馈增益阵 K , 求取适当阶的实矩阵组 (F, T, L, N, M) 满足(2)式及 $T \neq 0$, 且使得指标 J 达到最小。

二、观测器设计的参数方法

1. 矩阵 F, T, L 的参数表示

不失普遍性, 将 F 取为非亏损结构, 即

$$F = WJW^{-1}, \quad J = \text{diag}[S_1 \cdots S_p], \quad (7)$$

其中 J 与 $W = [w_1 \cdots w_p]$ 分别为 F 阵的若当标准型和特征向量矩阵, 它们满足下述约束:

$C_1: s_i, i \in p$ 复封闭, 且 $\text{Re}s_i < 0, i \in l$,

$C_2: s_i = \bar{s}_i$ 时有 $w_i = \bar{w}_i$, 且 $\det W \neq 0$ 。

将(7)式代入(2b)式, 并令 $T = WT', L = WL'$, 可得下述矩阵方程

$$T'A - JT' = L'C. \quad (8)$$

结合文献[4,5]中关于方程(8)的求解方法可得 T, L 阵的参数表示如下:

$$T = W[t_1^T \cdots t_p^T]^T, \quad t_i = H(s_i)g_i, \quad (9a)$$

$$L = W[l_1^T \cdots l_p^T]^T, \quad l_i = -L(s_i)g_i, \quad (9b)$$

其中 $g_i \in C^m, i \in p$ 为满足下述约束的参数:

$C_3: 当 $s_i = \bar{s}_i$ 时有 $g_i = \bar{g}_i$ 。$

$H(s)$ 与 $L(s)$ 为满足下式的右互素多项式矩阵:

$$(sI - A^T)^{-1}C^T = H(s)L^{-1}(s), \quad (10)$$

关于上式的求取可参见文献[8]。

注 1. 当约束 $C_1 - C_3$ 满足时, 由(9)式决定的 T, L 阵的列为复共轭封闭的。将 T, L 中相互共轭的列分别换为它们的实部与虚部, 可获得实阵 T, L 的参数表示。

2. 矩阵 N, M 的参数表示

易见(2c)式关于矩阵 N, M 有解的充要条件为

$$\text{rank}[T^T C^T]^T = \text{rank}[T^T C^T K^T]^T, \quad (11)$$

对矩阵 $[T^T C^T K^T]^T$ 施行初等变换,并在变换的过程中对 T 的参数 g_i, s_i 和 $\omega_i, i \in p$ 加以适当限定以使得(11)式成立。这里将这一限定条件记为 C_4 。则可得实可逆矩阵 P, Q 满足

$$P \begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad KQ = [K_0 0], \quad (12)$$

其中 $T_0 \in R^{r^* \times r^*}$, $\det(T_0) \neq 0$; $K_0 \in R^{r \times r^*}$, 而 r^* 为 $[T^T C^T]^T$ 和 $[T^T C^T K^T]^T$ 的公共秩。注意,这里的矩阵 P, Q, T_0, K_0 均可能与参数 $g_i, s_i, \omega_i, i \in p$ 有关。

进一步容易证得,矩阵 $[N, M]$ 具有下述参数表示:

$$[NM] = [K_0 T_0^{-1} M'] P, \quad (13)$$

其中 $M' \in R^{r \times (n+p-r^*)}$ 为一个无约束的实参数阵。

三、鲁棒观测器设计

利用上节的结果,可以得到求解问题 RLO 的下述算法:

算法 RLO:

- 1) 求解分解式(10),并置 $p = 1$;
- 2) 求取 T 阵的参数表示;
- 3) 求取约束 C_4 及矩阵 P, T_0, K_0, M 的参数表达式;
- 4) 求解优化问题

$$\begin{aligned} & \min(M', g_i, s_i, \omega_i, i \in p) \\ & \text{s.t. 约束 } C_1 - C_4, \end{aligned}$$

若该问题无解,置 $p \leftarrow p + 1$ 后转 2);

- 5) 和用 4) 中获得的参数和公式(7), (9), (13) 求取观测器系数矩阵。

注 2. 在实际应用中,考虑到对于观测器极点的限制,可将约束 C_1 换为

$C'_1: a_i \leq \text{Re}(s_i) \leq b_i, c_i \leq \text{Im}(s_i) \leq d_i, i \in p$, 这里 $a_i, b_i, c_i, d_i, i \in p$ 为适当选取的实数。

注 3. 对于满足 (2a) — (2c) 的矩阵组 (F, T, L, N, M) , 易见 $(F, \Delta F, \Delta L, N\Delta^{-1}, M)$ 仍满足(2)式。因而在求解 T, L 阵的过程中,参数向量 g_i 中的某一个元素可以事先取定。

例 1^[3]. 对于系统

$$(A, B, C, K) = \left(\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, [0 \ 1], [-30 \ 50] \right),$$

由第二节方法易得其一阶 Luenberger 观测器参数为 $F = s, T = [1 \ s], L = -s^2 - 4s - 3, N = -30, M = 50 + 30s$ 。

当 $\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta_1^1 & \delta_2^2 \end{bmatrix}, \Delta C = [0 \ \delta_c]$ 时,取 J 中的加权因子为 1,可知当 $s = -5/3$ 时观

测器为鲁棒的。且由分析易知,当 $s < -5/3$ 且越远离虚轴时,其鲁棒性便越差。图 1

中的仿真结果充分说明了这一点。

例 2. 考虑下述应用相当广泛的一类系统:

$$(A, B, C, K) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}, [1 \ 0 \ 0], [k_0 \ k_1 \ k_2] \right),$$

取 $g_i = 1, i = 1, 2$, 则易得

$$F = W \text{diag}[s_1 \ s_2] W^{-1},$$

$$T = W \begin{bmatrix} s_1^2 + a_2 s_1 + a_1 & s_1 + a_2 & 1 \\ s_2^2 + a_2 s_2 + a_1 & s_2 + a_2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L = W \begin{bmatrix} -(s_1^3 + a_2 s_1^2 + a_1 s_1 + a_0) \\ -(s_2^3 + a_2 s_2^2 + a_1 s_2 + a_0) \end{bmatrix}.$$

取约束 C_4 为 $s_1 \neq s_2$, 进一步可得

$$N = \begin{bmatrix} \frac{k_2(s_2 + a_2) - k_1}{s_2 - s_1} & \frac{k_1 - k_2(s_1 + a_2)}{s_2 - s_1} \end{bmatrix} W^{-1},$$

$$M = k_0 - k_1(s_1 + s_2 + a_2) + k_2[(s_1 + a_2)(s_2 + a_2) - a_1].$$

若以 δ_a^i 和 δ_c 分别记 a_i 和 c 的摄动, 则有

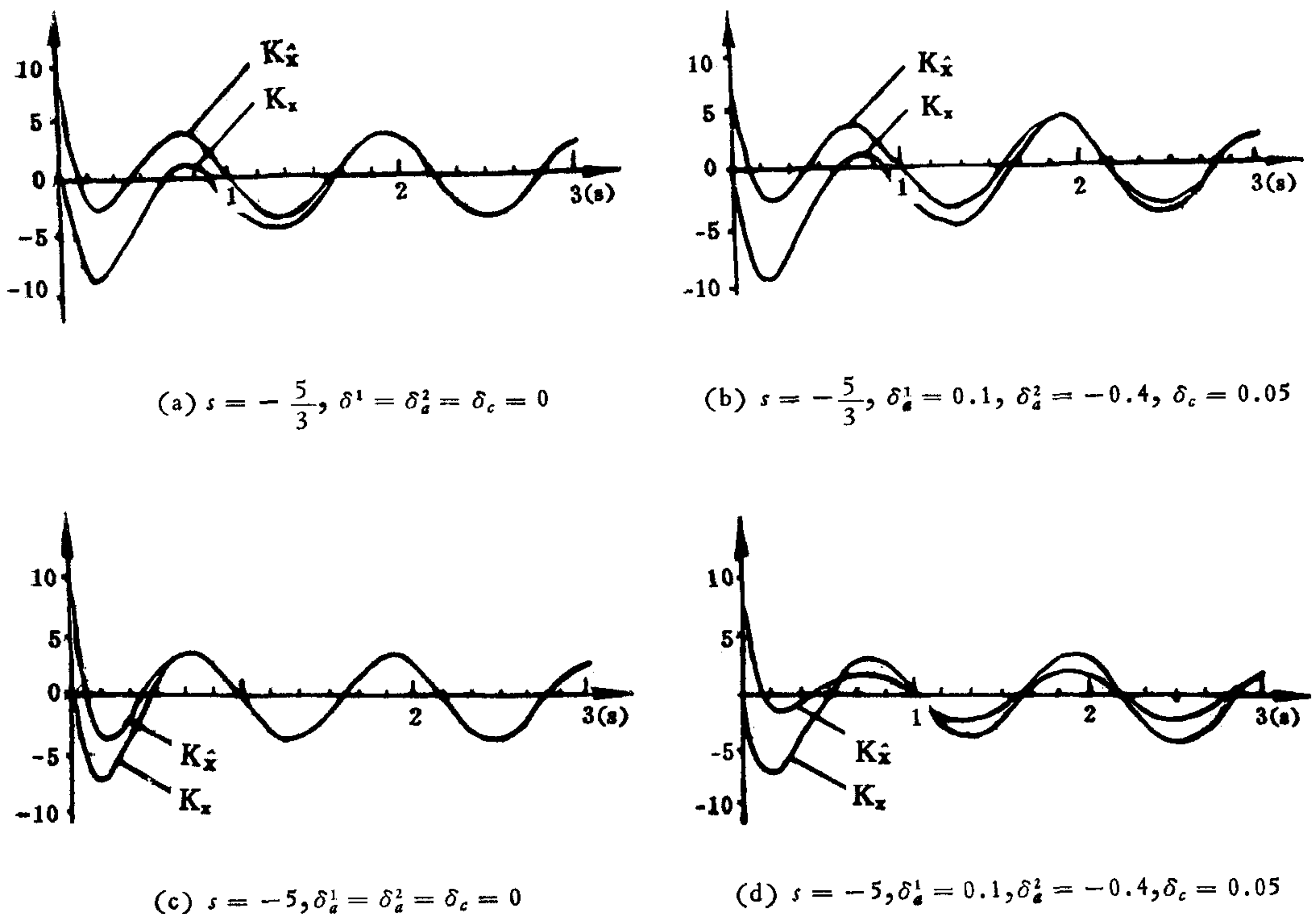


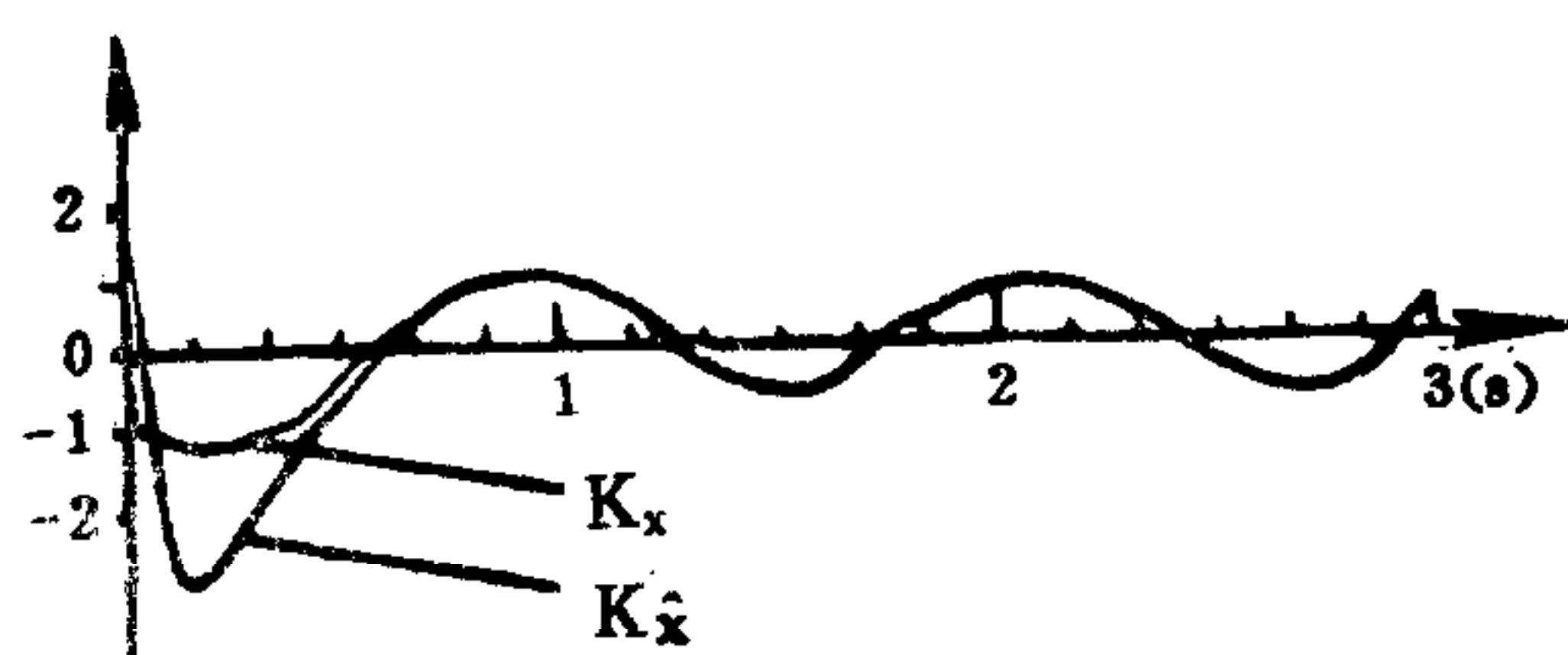
图 1 例 1 中系统的仿真结果

$$T\Delta A = W \begin{bmatrix} -\delta_a^0 & -\delta_a^1 & -\delta_a^2 \\ -\delta_a^0 & -\delta_a^1 & -\delta_a^2 \end{bmatrix},$$

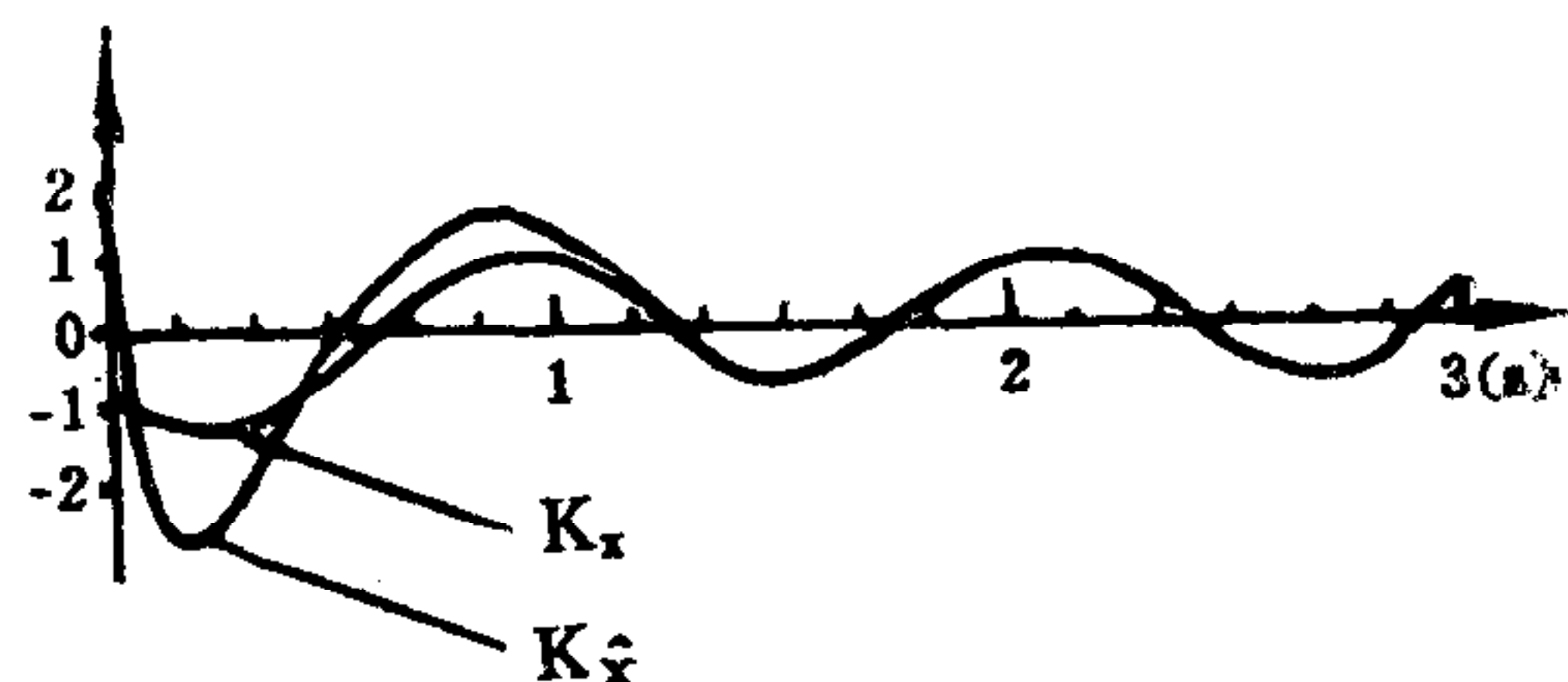
$$L\Delta C = W \begin{bmatrix} -(s_1^3 + a_2s_1^2 + a_1s + a_0)\delta_c & 0 \\ -(s_2^3 + a_2s_2^2 + a_1s_2 + a_0)\delta_c & 0 \end{bmatrix},$$

$$M\Delta C = [(k_0 - k_1(s_1 + s_2 + a_2) + k_2[(s_1 + a_2)(s_2 + a_2) - a_1])\delta_c, 0 \ 0].$$

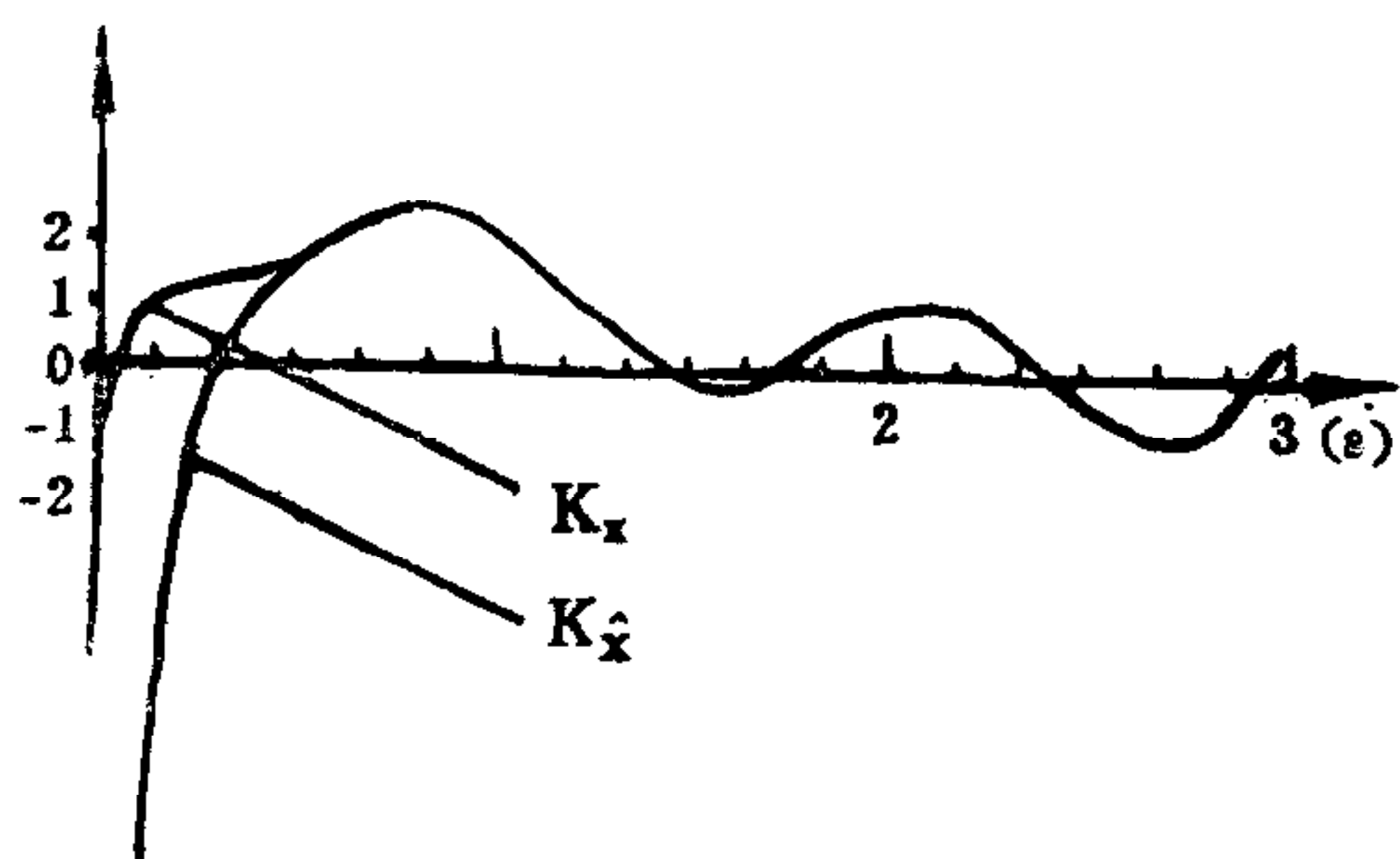
由此可见,通过适当选取参数 $s_1, s_2 (s_1 \neq s_2)$ 和 W 阵,可以有效地抑制摄动的影响. 图 2 针对 $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 3, b = c = 1, k_0 = k_1 = -4, k_2 = -1$ 的情形给出了一组仿真结果.



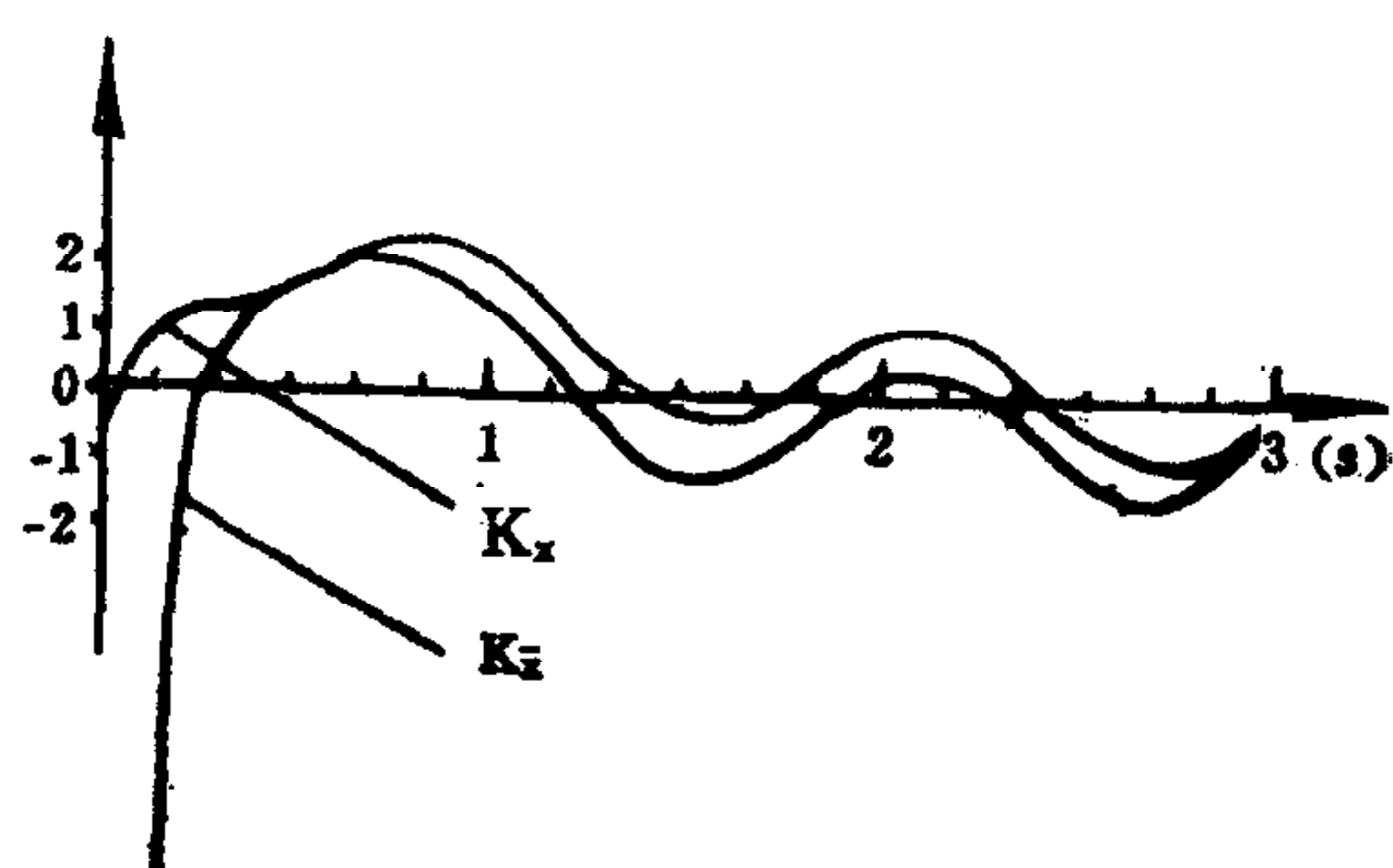
(a) $W = \begin{bmatrix} 1 & 1.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \delta_a^1 = \delta_a^2 = \delta_c = 0$



(b) $W = \begin{bmatrix} 1 & 1.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \delta_a^1 = 0.01, \delta_a^2 = 0.05, \delta_c = 0.03$



(c) $W = I, \delta_a^1 = \delta_a^2 = \delta_c = 0$



(d) $W = I, \delta_a^1 = 0.01, \delta_a^2 = 0.05, \delta_c = 0.03$

图 2 例 2 中系统的仿真结果

注 4. 在仿真结果中,外部输入信号均取为 $v = -4 \sin\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$; 例 1 和例 2 中的状态初值分别为 $x_0 = [1 \ 1 \ -0.3]^T$ 和 $x_0 = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 2.19]^T$.

参 考 文 献

- [1] Luenberger, D.G., An Introduction to Observers, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-16(1971), 190—197.
- [2] O'Reilly, J., Observer Design for Linear Systems, Academic Press, New York, 1984.
- [3] Tsui, C. C., New Approach to Robust Observer Design, *Int. J. Control*, 47(1988), No. 3, 745—751.
- [4] 段广仁等,时变线性系统的特征结构配置问题,中国科学(A辑), (1990), 7, 769—776.
- [5] 段广仁等,线性系统的状态反馈特征结构配置,自动化学报, 16(1990), 6, 556—558.

[6] 张福恩, 状态反馈极点配置的直接方法, 自动化学报, 12(1986), 2, 162—167.

DESIGN OF ROBUST LUENBERGER OBSERVER

DUAN GUANGREN LI JIANHUA ZHOU LIANSHAN

(Dept. of Control Engineering, Harbin Institute of Technology, 150006)

ABSTRACT

The observer condition in the observer-state feedback control system is an essential condition for the observed states to asymptotically approach the real states. In this paper, a parametric approach for the design of Luenberger observer is proposed, and the problem of robust Luenberger observer design for systems with parameter perturbations is then considered based on the criterion of minimum observer condition error. A simple and effective algorithm is given. Simulation results show the effectiveness and application value of the proposed approach.

Key words: Linear system; Luenberger observer; parameter perturbation; robustness.